UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci27fran

7350

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

32844 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOUËL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1902 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVII. — ANNÉE 1903.

(XXXVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179871
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

QA
1
B8
v.38

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BIANCHI (Luigi), Professeur à l'Université de Pise. — Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellitiche. 1 vol. in-8° de 600 pages. Pisa, Enrico Spoerri, 1901.

Ces leçons montrent bien les ramifications qui unissent la théorie des fonctions elliptiques à la théorie générale des fonctions d'une part, à l'Algèbre et à l'Arithmétique d'autre part; commençant à la définition des fonctions d'une variable complexe d'après Cauchy et Riemann, elles se terminent par un résumé des travaux d'Hermite sur la résolution de l'équation du cinquième degré et de ceux de Kronecker sur l'équation aux invariants de classe. Ces expositions d'ensemble exigent, outre une information étendue et très sûre, une habileté particulière dans la composition, et s'il convient de plus, comme ici, de mettre en valeur la finesse des analyses et la beauté des constructions, il y faut encore un art accompli. Ces conditions sont réalisées dans le livre de M. Bianchi.

Le livre est composé de deux Parties : I. Théorie des fonctions de variables complexes (p. 1-246); II. Théorie des fonctions elliptiques (p. 247-598). La seconde Partie me paraît demander des

indications plus détaillées; pour la première, je ne ferai guère que mentionner les sujets qui y sont traités.

PREMIÈRE PARTIE.

Chapitre I (p. 3-31). — Fonctions d'une variable complexe. Séries de puissances : Cercle de convergence. Théorème de Cauchy-Hadamard relatif au rayon de convergence. Fonctions élémentaires e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\log z$, z^n. Représentation conforme.

Chapitre II (p. 31-78). — Substitutions linéaires. Groupes discontinus de substitutions linéaires. Sous-groupes. Groupe de substitutions paraboliques. Groupe modulaire.

En vue des indications à détailler dans la seconde Partie, il est nécessaire d'insister sur les définitions et les notions données sur le groupe modulaire.

Le groupe modulaire Γ est formé des substitutions

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers qui satisfont à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. En joignant aux substitutions de Γ la substitution

$$z' = -z_0$$

(z_0, imaginaire conjuguée de z), on forme un groupe Γ_0 que l'on considère en même temps que Γ. Le réseau de triangles correspondant au groupe Γ_0 s'obtient en partant du triangle T compris entre les droites $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ et extérieur au cercle $x^2 + y^2 = 1$, en prenant l'image de ce triangle par rapport à chacun de ses trois côtés, et en répétant indéfiniment une construction analogue pour chacun des nouveaux triangles. On peut passer, par une substitution de Γ_0, d'un point quelconque du demi-plan positif à un point du triangle T; pour cette raison le triangle T est appelé *triangle fondamental*. Les substitutions par lesquelles on passe du triangle T à l'un des trois triangles adjacents permettent de

retrouver, par composition, toutes les substitutions du groupe Γ_0; elles se nomment les *substitutions génératrices* de Γ_0.

Pour le groupe modulaire Γ, le triangle fondamental est compris entre les droites $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ et en dehors du cercle $x^2 + y^2 = 1$ les deux substitutions génératrices sont

$$z' = z + 1, \qquad z' = -\frac{1}{z}.$$

Au moyen de la représentation géométrique du groupe modulaire, on donne une élégante interprétation à cette partie de la théorie des nombres qui traite des formes quadratiques binaires, à leur réduction de ces formes, et en particulier à la démonstration du théorème :

Les formes $ax^2 + 2bxy + cy^2$ qui correspondent à un même déterminant $b^2 - ac$ négatif se distribuent en un nombre fini de classes.

Une partie des résultats précédents établis pour le plan complexe sont généralisés dans l'espace.

Chapitre III (p. 78-117). — Intégrales curvilignes. Intégrales doubles. Transformation des intégrales doubles en intégrales curvilignes. Différentielles exactes. Fonctions harmoniques admettant des dérivées régulières sur un contour donné. Fonction de Green. Problème de Dirichlet. Solution du problème de Dirichlet pour un champ circulaire.

Chapitre IV (p. 117-140). — Intégrales définies de fonctions d'une variable complexe. Formule de Cauchy servant à déterminer la valeur d'une fonction à l'intérieur d'une aire, quand on connaît les valeurs de la fonction sur le contour. Développement en séries de puissances. Développement en série de Laurent. Fonctions analytiques. Séries de fonctions analytiques.

Chapitre V (p. 140-163). — Fonction uniforme. Points où la fonction est régulière. Zéros (*infinitesimi*) points singuliers. Pôles.

Résidus. Intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un contour à l'intérieur duquel sont des points singuliers. Valeurs multiples des intégrales. Indicateur logarithmique $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$. Inversion des séries.

Chapitre VI (p. 163-191). — Fonctions uniformes dans tout le plan complexe. Transcendantes entières. Points singuliers essentiels. Méthode de Cauchy pour les développements en séries de fractions simples. Développements de $\frac{1}{\sin z}$, $\cot z$. Théorème de Mittag-Leffler. Construction d'une transcendante entière au moyen de produits infinis. Genre des transcendantes entières. La fonction eulérienne $\Gamma(z)$.

Chapitre VII (p. 191-217). — Fonctions régulières de deux variables complexes. Séries de puissances de plusieurs variables. Définition, d'après Weierstrass, du domaine restreint de convergence d'une série de puissances de deux variables. Racines d'une équation dont le premier membre est une série de puissances de deux variables et où l'une des variables est considérée comme l'inconnue.

Théorème de Weierstrass :

Si la fonction régulière $f(w, z)$ des deux variables complexes w, z s'annule pour $w = 0$, $z = 0$, elle peut, dans un domaine suffisamment petit de $w = 0$, $z = 0$, se mettre sous la forme

$$f(w, z) = (w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \ldots + \alpha_n)e^{P(w, z)},$$

où le premier facteur est un polynome de degré fini en w ayant pour coefficients des fonctions régulières de z nulles pour $z = 0$, tandis que le facteur (exponentiel) ne s'annule pas à l'intérieur du domaine considéré.

Fonctions implicites. Fonctions algébriques. Points de ramification. Pôles. Les fonctions algébriques considérées comme fonctions analytiques.

Groupe de monodromie : On considère l'ensemble des contours

fermés partant d'un point A et y revenant; quand z décrit l'un de ces contours il se produit une permutation des indices des n racines de l'équation algébrique

$$\varphi_0(z)w^n + \varphi_1(z)w^{n-1} + \ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

et à l'ensemble des contours correspond un groupe de permutations; ce groupe se nomme *groupe de monodromie* de l'équation. On démontre que le groupe est indépendant de la position du point initial A. Il jouit des propriétés suivantes :

1° Si une fonction rationnelle

$$y = F(w_1, w_2, \ldots, w_n, z)$$

de z et des n branches de la fonction algébrique reste invariable pour toutes les substitutions du groupe de monodromie, y est une fonction rationnelle de z;

2° Si une fonction rationnelle $F(w_1, w_2, \ldots, w_n, z)$ peut s'exprimer rationnellement au moyen de z, elle doit rester invariable pour toutes les substitutions du groupe de monodromie.

Le groupe de monodromie est un sous-groupe invariant du groupe de Galois (le domaine de rationalité étant formé en adjoignant aux nombres rationnels le paramètre z et les coefficients constants de l'équation.

Chapitre VIII (p. 217-248). — Définition :

On appelle surface de Riemann pour une équation algébrique $f(w, z) = 0$ une surface fermée telle que, à tout point de la surface correspond un couple de valeurs de w et de z satisfaisant à l'équation et réciproquement, avec la condition que la correspondance biunivoque entre les couples (w, z) et les points de la surface soit une correspondance continue.

Surfaces de Riemann à deux feuillets pour $w = \sqrt{P(z)}$. Déformation de la surface à deux feuillets en une sphère à une ou plusieurs anses (équivalent d'un disque percé de trous). Surfaces de Riemann à m feuillets. Extension du théorème de Cauchy. Résidus.

Indicateur logarithmique. Fonctions rationnelles sur la surface de Riemann. Notions sur les intégrales abéliennes.

(L'auteur fait remarquer que, pour une partie des propriétés relatives aux surfaces de Riemann, il a dû se limiter à un simple énoncé; le cas hyperelliptique sert à confirmer et à illustrer les propositions énoncées.)

Formule de Riemann pour le calcul du *genre*

$$p = \sum \frac{r-1}{2} - m + 1,$$

m désignant le nombre des feuillets et $r-1$ l'ordre de l'un des points de ramification.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Chapitres IX et X : *Les fonctions σu et pu de Weierstrass. Les fonctions elliptiques générales exprimées au moyen de σu, ζu, pu. Multiplication et division de l'argument* (p. 249-311). — Après avoir rappelé les origines de la théorie des fonctions elliptiques, l'auteur indique qu'il étudiera principalement les fonctions de Weierstrass, sans négliger cependant les fonctions de Jacobi et principalement les fonctions θ, intéressantes en particulier par l'élégance et la rapide convergence de leurs développements en série.

Il prend pour point de départ le produit infini

$$\sigma u = u \Pi' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \qquad (w = 2m\omega + 2n\omega')$$

qui définit σu, en déduit par différentiation les développements de ζu et de pu et donne les formules relatives à l'addition d'une période.

En général, une fonction elliptique est une fonction uniforme doublement périodique n'ayant comme singularités à distance finie que des pôles. Une fonction elliptique générale peut s'exprimer au moyen de σu et des fonctions pu et ζu qui en dérivent. On donne les trois expressions générales suivantes : 1° une fraction

dont les deux termes sont des produits de σ; 2° une somme d'éléments simples de la forme

$$A\zeta(u-a),\quad A_1 p(u-a),\quad A_n p^{n}(u-a),$$

$A, A_1, \ldots, A_n$ désignant des constantes; 3° une fonction rationnelle de pu et de $p'u$.

A la première expression se rattache la formule

$$pu - pv = \frac{\sigma(u+v)\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v},$$

d'où l'on déduit l'équation à trois termes pour la fonction σ, l'équation différentielle pour la fonction pu,

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3,$$

les formules d'addition pour ζu et pour pu.

On démontre cette proposition que Weierstrass établissait au début de ses *Leçons sur les fonctions elliptiques :*

Si une fonction uniforme dans tout le plan admet un théorème d'addition algébrique, cette fonction est, ou bien une fonction rationnelle de u, ou bien une fonction rationnelle de $e^{\alpha u}$ (α const.) ou enfin une fonction rationnelle de pu et de $p'u$.

Le calcul de $p(nu)$, en fonction de pu, est fait à l'aide de la fonction auxiliaire

$$\psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)},$$

qui peut s'exprimer par un polynome entier en $y = pu$, ou par un tel polynome multiplié par $p'u$ et pour laquelle une formule récurrente se déduit immédiatement de l'équation à trois termes.

La question de la division de l'argument dans la fonction pu est traitée avec détails.

n désignant un nombre entier, si l'on donne la valeur de pu, on a, pour déterminer $p\left(\frac{u}{n}\right)$, une équation irréductible de degré n^2; les racines de cette équation sont données par l'expression

$$y_{r,s} = p\left(\frac{u + 2r\omega + 2s\omega'}{n}\right),$$

(r, s) parcourant un système complet de n^2 nombres incongrus

suivant le module n. On voit de suite que l'on a

$$y_{r,s} = \varphi\left(\mathrm{p}\,\frac{u}{n}\right), \qquad y_{r_1,s_1} = \varphi_1\left(\mathrm{p}\,\frac{u}{n}\right),$$

φ et φ_1 étant des fonctions rationnelles dont les coefficients contiennent rationnellement, outre g_2 et g_3, les valeurs de p et de p' correspondant aux parties aliquotes des périodes et l'on vérifie que

$$\varphi[\varphi_1(y_{0,0})] = \varphi_1[\varphi(y_{0,0})];$$

l'équation pour la division de l'argument est une équation abélienne de degré n^2 qui se résout à l'aide d'extractions de racines d'ordre n.

L'équation pour la division des périodes est, n désignant un nombre premier impair, l'équation

$$\psi_n(y) = 0,$$

qui admet pour racines

$$\mathrm{p}\left(\frac{2r\omega + 2s\omega'}{n}\right) \quad \begin{cases} r = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2} & \text{avec} \quad s = 0, \\ r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) & \text{avec} \quad s = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Cette équation est de degré $\frac{n^2-1}{2}$; ses coefficients sont des fonctions entières de g_3 et de $\frac{1}{4}g_2$ avec des coefficients numériques entiers. On obtient une résolvante de degré $n+1$ en considérant les expressions

$$z_\nu = \Phi\left[\mathrm{p}(\omega_\nu), \mathrm{p}(g\omega_\nu), \ldots, \mathrm{p}\left(g^{\frac{n-1}{2}-1}\omega_\nu\right)\right] \qquad (\nu = \infty, 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

où Φ désigne une fonction entière et symétrique de $\frac{n-1}{2}$ variables, g une racine primitive du nombre entier n et où l'on a posé

$$\omega_\nu = \frac{2\nu\omega + 2\omega'}{n}, \qquad \omega_\infty = \frac{2\omega}{n}.$$

Dès que l'on connaît la valeur de z_ν, les racines correspondantes de la proposée s'obtiennent par des extractions de racines

d'ordre $\frac{n-1}{2}$. Quant à la résolvante d'ordre $n+1$, son groupe de monodromie est le groupe des $\frac{n(n^2-1)}{2}$ substitutions représentées analytiquement par la formule

$$v' \equiv \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta} \pmod{n},$$

α, β, γ, δ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Dans le cas général, la résolvante n'est pas résoluble par radicaux.

Chapitre XI : *Propriétés fondamentales de l'invariant absolu considéré comme fonction du rapport des périodes. Inversion* (p. 312-339). — Les invariants g_2 et g_3 s'expriment à l'aide des périodes par les formules

$$g_2 = \frac{15}{4}\sum{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}, \qquad g_3 = \frac{35}{16}\sum{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6};$$

l'invariant absolu est défini par l'égalité

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

Il est évident que J ne dépend que du rapport des périodes $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$; on démontre que J est une fonction uniforme de la variable complexe τ dans le demi-plan positif : l'importance de cette fonction est fondamentale dans la théorie des fonctions modulaires.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$J(\tau') = J(\tau)$$

est que les arguments τ et τ' soient reliés par une substitution du groupe modulaire

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

en deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire, $J(\tau)$ prend des valeurs conjuguées.

Si l'on prend comme triangle fondamental la partie du demi-plan positif comprise entre les droites $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ et extérieure au cercle $x^2 + y^2 = 1$, la fonction $J(\tau)$ donne la représentation conforme biunivoque du triangle fondamental sur le demi-plan positif.

La fonction inverse $\tau(J)$ est une fonction analytique infinitiforme existant dans tout le plan complexe J; ses branches se déduisent toutes de l'une d'elles par les substitutions du groupe modulaire, chacune de ces branches est une fonction régulière de J en tout point distinct des trois points singuliers $J = 0, 1, \infty$.

Ces propriétés de la fonction $\tau(J)$ servent à établir un théorème de Picard, démontré ici dans un cas particulier :

Toute transcendante entière prend, à distance finie, toutes les valeurs finies, une au plus exceptée.

C'est aussi en s'appuyant sur les propriétés de la fonction modulaire $J(\tau)$ qu'on établit l'existence de la fonction $p(u; g_2, g_3)$ correspondant à des valeurs données des invariants g_2 et g_3.

On explique en détail les méthodes d'inversion et l'intégration d'une fonction rationnelle de w et de $\sqrt{P(w)}$, $P(w)$ désignant un polynome entier du troisième ou du quatrième degré.

Chapitres XII et XIII : *Les fonctions σ paires de Weierstrass; les fonctions* sn, cn, dn *de Jacobi. La fonction modulaire $k^2(\tau)$* (p. 339-390). — Les substitutions du groupe modulaire homogène

$$\begin{pmatrix} \alpha\omega + \beta\omega' & \gamma\omega + \delta\omega' \\ \omega & \omega' \end{pmatrix},$$

rapportées au module 2, se partagent en six classes

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(\bmod 2),$$

et si l'on cherche l'effet de ces substitutions sur les trois quantités

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\omega',$$

on trouve qu'il leur correspond les six permutations représentées par les cycles

$$1, \quad (e_1, e_3) \quad (e_2, e_3), \quad (e_1, e_3, e_2), \quad (e_1, e_2, e_3), \quad (e_1, e_2).$$

Si maintenant, pour la symétrie des notations, on pose

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \omega + \omega', \qquad \omega_3 = \omega', \\ &\eta_1 = \eta, \qquad \eta_2 = \eta + \eta', \qquad \eta_3 = \eta' \qquad (\eta = \zeta\omega,\ \eta' = \zeta\omega'), \end{aligned}$$

les fonctions σ paires de Weierstrass sont définies par les expressions

$$\sigma_r u = e^{-\eta_r u} \frac{\sigma(u + \omega_r)}{\sigma\omega_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

et l'on obtient de suite les formules

$$\mathrm{p}\, u - \mathrm{p}\, \omega_r = \left(\frac{\sigma_r u}{\sigma u}\right)^2,$$

les fonctions σ_1, σ_2, σ_3 restent invariables pour les substitutions du sous-groupe Γ_2

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{mod}\, 2)$$

du groupe modulaire Γ; pour les autres substitutions du groupe Γ, elles se permutent de la même manière que e_1, e_2, e_3. Après que l'on a défini avec précision le sens des notations $\sqrt{\mathrm{p}\, u - e_r}$, $\sqrt{e_s - e_r}$ les formules relatives à l'addition d'une période ou d'une demi-période pour σ_1, σ_2, σ_3 se déduisent immédiatement des formules correspondantes pour la fonction σ.

Les fonctions sn, cn, dn de Jacobi sont rattachées aux fonctions de Weierstrass par les égalités

$$\mathrm{sn}\, v = \sqrt{e_1 - e_3}\, \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \qquad \mathrm{cn}\, v = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \qquad \mathrm{dn}\, v = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}, \qquad v = u\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$\mathrm{K} = \omega\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad i\mathrm{K}' = \omega'\sqrt{e_1 - e_3},$$

et l'on vérifie de suite qu'elles satisfont aux relations

$$\mathrm{sn}^2 v + \mathrm{cn}^2 v = 1, \qquad k^2\, \mathrm{sn}^2 v + \mathrm{dn}^2 v = 1, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

k se nomme le *module;* le module complémentaire est défini par

la relation

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

On voit que k^2 et k'^2 sont des fonctions de τ et l'on trouve aisément

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4}.$$

Les propriétés des fonctions de Jacobi sont déduites de celles des fonctions de Weierstrass qui ont servi à les définir; il y a lieu cependant d'insister sur les propriétés qui se rapportent aux substitutions du groupe modulaire Γ effectuées sur les périodes.

La fonction $k^2(\tau)$ reste invariable pour les substitutions du sous-groupe Γ_2 défini par les congruences

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2;$$

pour les autres substitutions de Γ, elle subit les substitutions du groupe anharmonique

$$k^2, \quad 1 - k^2, \quad \frac{k^2}{k^2 - 1}, \quad \frac{k^2 - 1}{k^2}, \quad \frac{1}{1 - k^2}, \quad \frac{1}{k^2}.$$

Les fonctions $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ ne dépendent que de l'argument v et du rapport τ des périodes; considérées comme fonctions de τ, elles restent invariables pour les substitutions du sous-groupe Γ_2.

Les changements qu'elles éprouvent pour les autres substitutions de Γ peuvent se déduire de ceux qu'elles éprouvent pour les substitutions élémentaires

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux groupes de formules qui correspondent à ces deux substitutions définissent ce que l'on nomme la *transformation du premier ordre* pour les fonctions sn, cn, dn.

Une étude particulière est faite des fonctions de Weierstrass dans le cas des invariants réels, et des fonctions de Jacobi dans le cas du module compris entre 0 et 1, cas les plus importants dans la pratique. Des applications géométriques sont traitées, en

particulier, à propos de la cubique

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Chapitre XIV : *Développements en produits infinis et en séries trigonométriques. Séries* $\mathfrak{T}$ *de Jacobi* (390-420). — Si l'on considère la fonction auxiliaire

$$\psi(u) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_3 u,$$

et si l'on pose

$$e^{i\pi\frac{u}{\omega}} = z, \qquad e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}} = q, \qquad \psi(u) = \varphi(z),$$

la fonction uniforme $\varphi(z)$ peut être identifiée avec le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n-1}z)\left(1 - \frac{q^{2n-1}}{z}\right)}{(1 - q^{2n-1})^2}.$$

On déduit de là le développement en produit simplement infini de $\sigma_3 u$, et des développements analogues pour σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, puis pour $\sqrt{e_1 - e_2}$, $\sqrt{e_1 - e_3}$, $\sqrt{e_2 - e_3}$. En se servant des formules qui relient les fonctions de Jacobi à celles de Weierstrass, on a les développements en produit infini de $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$.

Le développement en série trigonométrique de

$$\psi u = e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_3 u$$

est de la forme

$$\psi u = a_0 + \sum a_n \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right).$$

La relation entre a_n et a_0 s'obtient en considérant l'intégrale

$$\int \psi(u)\, du$$

le long du contour d'un parallélogramme dont les sommets ont pour affixes $-\omega$, ω, $\omega + 2n\omega'$, $-\omega + 2n\omega'$, et a_0 se détermine par la condition $\psi(0) = 1$.

On déduit de là les développements en séries trigonométriques des fonctions σu, $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ multipliées par le facteur expo-

nentiel

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

Les quatre séries trigonométriques qui viennent d'être obtenues rentrent, à des facteurs simples près, dans le type

$$\vartheta_{g,h}(u) = (-i)^{gh} \sum_{n=-\infty}^{-\infty} (-1)^{hn} e^{i\pi\tau(n-\frac{g}{2})^2 + 2i\pi u(n-\frac{g}{2})},$$

où g et h désignent des entiers et les quatre fonctions de Jacobi $\vartheta_1(u)$, $\vartheta_2(u)$, $\vartheta_3(u)$, $\vartheta_0(u)$ se déduisent de cette série générale en y donnant aux indices g et h les valeurs (1, 1), (1, 0), (0, 0), (0, 1). On peut ainsi relier les fonctions ϑ de Jacobi aux fonctions σ de Weierstrass et profiter de l'étude déjà faite ici des fonctions σ. On retrouve de cette façon les propriétés fondamentales des fonctions ϑ. On étudie en particulier pour ces dernières fonctions la transformation du premier ordre, en cherchant l'effet des substitutions du groupe modulaire

$$\tau' = \frac{\alpha\tau - \beta}{\gamma\tau - \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

ou plutôt des deux substitutions génératrices de ces groupes

$$\tau' = \tau + 1, \qquad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Chapitre XV : *Transformation des fonctions elliptiques* (p. 420-455). — La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation algébrique entre $\wp(u \mid \omega, \omega')$ et $\wp(u \mid \Omega, \Omega')$ est que leurs périodes satisfassent à deux relations linéaires à coefficients entiers

$$r\omega = a_1\Omega - b_1\Omega',$$
$$r\omega' = c_1\Omega - d_1\Omega'.$$

La question se simplifie si l'on introduit la fonction

$$\wp(u \mid r\omega, r\omega');$$

les deux premières fonctions s'expriment rationnellement à l'aide de la fonction auxiliaire et l'on est ramené au problème :

Trouver la condition pour que $S = \wp(u \mid \Omega, \Omega')$ s'exprime rationnellement en fonction de $s = \wp(u \mid \omega, \omega')$.

Pour cela, il faut que l'on ait

$$\omega = a\Omega - b\Omega',$$
$$\omega' = c\Omega - d\Omega',$$

a, b, c, d étant des entiers; réciproquement, si cette condition est remplie, on a

$$S = \frac{U(s)}{V(s)},$$

U et V étant des polynomes entiers. On dit alors que la transformation est rationnelle; le déterminant $n = ad - bc$, que l'on suppose positif, est appelé l'*ordre de la transformation;* il fait connaître le degré de l'équation qui détermine s quand S est donné.

Deux transformations sont équivalentes si, appliquées successivement à une fonction $p(u \mid \omega, \omega')$, elle conduisent à des fonctions $p(u \mid \Omega, \Omega')$, $p(u \mid \Omega_1, \Omega'_1)$ qui sont égales entre elles. Il faut pour cela que l'une s'obtienne en faisant suivre l'autre d'une transformation du groupe modulaire; il y a évidemment réciprocité et, de plus, deux transformations équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles : on regarde comme appartenant à une même classe toutes les transformations équivalentes à une transformation donnée. Une transformation d'ordre n étant donnée, on peut toujours trouver une transformation qui lui soit équivalente et qui ait la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ \xi & \frac{n}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

où σ est un diviseur de n et où ξ est déterminé à un multiple près de $\frac{n}{\sigma}$. On déduit de là que le nombre des classes de transformations d'ordre n est fini : il est égal à la somme des diviseurs du nombre entier n.

On dit qu'une transformation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est *primitive* s'il n'existe aucun facteur commun aux entiers a, b, c, d; une transformation non primitive se ramène à une transformation primitive et à une multiplication de l'argument. On peut donc se borner à l'étude des transformations primitives et, comme une transformation pri-

mitive dont l'ordre est un nombre composé peut s'obtenir en composant des transformations primitives d'ordre premier, il suffit en définitive d'étudier les transformations rationnelles, primitives de degré premier.

On trouve alors que les transformations d'ordre n peuvent se ramener à $n+1$ transformations distinctes

$$\Omega = \frac{\omega}{n}, \qquad \Omega' = \omega',$$

$$\Omega = \omega, \qquad \Omega' = \frac{\nu\omega - \omega'}{n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on pose

$$\omega_\infty = \frac{2\omega}{n}, \qquad \omega_\nu = \frac{2\nu\omega + 2\omega'}{n},$$

et si l'on désigne par $\wp_\nu(u)$ $(\nu = \infty, 0, 1, \ldots, n-1)$ les fonctions qui correspondent aux $n+1$ transformations, on trouve, en décomposant $\wp_\nu(u)$ en éléments simples,

$$\wp_\nu(u) = \wp u + \sum_{\nu}^{1, 2, \ldots, n-1} [\wp(u - r\omega_\nu) - \wp(r\omega_\nu)],$$

et il est facile, en groupant les termes deux à deux, de mettre le second membre sous la forme d'une fonction rationnelle de $s = \wp u$ dont les coefficients sont composés rationnellement avec g_2, g_3 et $\wp\omega_\nu$:

$$\wp_\nu(u) = \frac{U(s)}{V(s)}.$$

On est conduit à une équation en s de degré n que l'on nomme *équation de transformation* si, dans la relation précédente, on regarde $\wp_\nu u$ comme donné; les racines de cette équation sont

$$\wp u, \quad \wp(u - \omega_\nu), \quad \ldots, \quad \wp[u - (n-1)\omega_\nu].$$

Si l'on considère le domaine de rationalité obtenu en adjoignant g_2, g_3, $\wp\omega_\nu$, $\wp_\nu u$, $\wp'_\nu u$ aux nombres rationnels, l'équation de transformation est résoluble par radicaux.

Entre l'invariant absolu J de la fonction $\wp u$, et l'invariant absolu J' de l'une quelconque des fonctions qui résultent de la transformation, il existe une équation algébrique

$$f(J', J) = 0,$$

dont les racines sont

$$J'_\infty = J(n\tau), \qquad J^0 = J\left(\frac{\tau}{n}\right), \qquad J'_1 = J\left(\frac{\tau+1}{n}\right), \qquad J'_{n-1} = J\left(\frac{\tau+n-1}{n}\right).$$

Cette équation, appelée *équation modulaire,* se présente ici comme une résolvante de l'équation pour la division des périodes et l'on peut conclure de là que son groupe de monodromie est défini par les substitutions

$$v' \equiv \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta} \pmod{n} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1),$$

effectuées sur les indices des $n+1$ branches

$$J'_\infty, \quad J'_0, \quad J'_1, \quad \ldots, \quad J'_{n-1}.$$

Si l'on passe maintenant à la fonction σu, le problème de la transformation pour cette fonction se ramène à la recherche de l'expression de $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{n}, \omega'\right)$ en fonction de σu, expression qui s'obtient aisément en considérant les zéros situés dans un parallélogramme des périodes 2ω, $2\omega'$.

La transformation de Landen est étudiée en détail avec son application au calcul des intégrales de première espèce et à la moyenne arithmético-géométrique de Gauss.

Chapitre XVI : *Fonctions modulaires elliptiques* (p. 455-485). — J désignant l'invariant absolu, une équation algébrique, entière et irréductible entre φ et J,

$$f(\varphi, J) = 0,$$

détermine φ comme fonction de τ; si cette fonction est uniforme, on dit que c'est une fonction modulaire (algébrique). Pour que φ soit une fonction uniforme de τ, il faut que la surface de Riemann correspondant à l'équation algébrique satisfasse à des conditions qui sont définies par un théorème de Klein (*Verzweigungssatz*) démontré dans ce Chapitre.

Supposons ces conditions remplies et considérons l'équation $f(\varphi, J) = 0$ comme une équation algébrique en φ. Si, pour une valeur de τ, $\varphi(\tau)$ est une racine, toutes les autres racines sont

données par l'expression

$$\varphi\left(\frac{\alpha\tau-\beta}{\gamma\tau-\delta}\right),$$

où $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ est une substitution du groupe modulaire Γ. Comme le nombre des racines est fini, il y a une infinité de substitutions de Γ qui laissent φ invariable; ces substitutions forment un sous-groupe G dont l'indice est égal au degré m de l'équation en φ. Inversement, à tout sous-groupe G d'indice fini du groupe modulaire correspondent des fonctions modulaires qui appartiennent à G.

On étudie, en particulier, le sous-groupe G des substitutions

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

et, en même temps, le groupe G_0 que l'on obtient en ajoutant aux substitutions de G la substitution $z' = -z_0$ (z_0 imaginaire conjuguée de z).

La fonction modulaire $k^2(\tau)$ donne la représentation conforme biunivoque du triangle fondamental de G_0 sur le demi-plan négatif; elle prend les valeurs 0, 1, ∞ (ou mieux, tend vers ces valeurs) seulement à l'infini et aux points rationnels de l'axe réel. Toute fonction algébrique de $k^2(\tau)$, ramifiée seulement pour $k^2 = 0$, $k^2 = 1$, $k^2 = \infty$, est une fonction modulaire de τ.

Après des indications générales sur les fonctions modulaires $\sqrt[n]{k}$ et $\sqrt[n]{k'}$, on donne les formules d'Hermite qui font connaître, pour les fonctions

$$\varphi(\tau) = \sqrt[4]{k}, \qquad \psi(\tau) = \sqrt[4]{k'},$$

l'effet produit par les six classes de substitutions du groupe modulaire rapportées au module 2. Les groupes auxquels appartiennent ces fonctions peuvent être définis par des congruences; pour la fonction $\varphi(\tau)$ ces congruences sont

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod 2,$$

$$\alpha\beta \quad \alpha^2 \quad 1 \pmod{16}.$$

CHAPITRE XVII : *Équations modulaires. Méthode d'Hermite*

pour la résolution de l'équation du cinquième degré (p. 485-525). — L'équation modulaire pour l'invariant absolu a déjà été rencontrée à propos de la transformation de la fonction pu; on reprend ici son étude en se fondant uniquement sur les propriétés des fonctions modulaires. On considère, au lieu de $J(\tau)$, le produit

$$j(\tau) = 12^3 J(\tau),$$

dont le développement, suivant les puissances de q, a ses coefficients entiers et l'on établit le théorème suivant :

Toute fonction de τ, uniforme, finie et continue dans le demi-plan positif, qui se reproduit pour toute substitution du groupe modulaire et qui, pour $j = \infty$, se comporte comme une puissance entière et positive de j, est une fonction entière et rationnelle de j.

Ce théorème démontré, on parvient directement à l'équation modulaire en se posant cette question : Trouver toutes les valeurs distinctes que prend $j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$, a, b, c, d étant des nombres entiers tels que le déterminant $ad - bc$ est égal à un nombre premier donné, p.

La réponse à cette question est résumée dans l'énoncé suivant :

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est une substitution à coefficients entiers et à déterminant premier* p, *entre les fonctions de* τ

$$j' = j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \qquad \text{et} \qquad j = j(\tau),$$

il existe une équation algébrique de degré $p + 1$ *en* j',

$$f(j'_1 j) = j'^{p+1} + \alpha_1 j'^{p} + \ldots - \alpha_p j' + \alpha_{p+1} = 0,$$

dont les coefficients α *sont des polynomes entiers en* j. *C'est l'équation modulaire entre* j *et* j' *et ses* $p + 1$ *racines en* j' *sont*

$$j'_\infty = j(p\tau), \quad j'_0 = j\left(\frac{\tau}{p}\right), \quad j'_1 = j\left(\frac{\tau + 1}{p}\right), \quad \ldots, \quad j'_{p-1} = j\left(\frac{\tau + p - 1}{p}\right).$$

Le groupe de monodromie de cette équation modulaire peut se déterminer si l'on remarque que, à un chemin fermé décrit par $j(\tau)$, correspond, sur τ, une substitution du groupe modu-

laire. On trouve que la substitution $\frac{\alpha\tau - \beta}{\gamma\tau - \delta}$ du groupe modulaire produit sur les $p+1$ indices de j' la substitution

$$v' = \frac{\delta v - \beta}{\gamma v - \alpha} \pmod{p}$$

et le groupe de monodromie est ainsi défini; comme ce groupe est transitif, l'équation modulaire est irréductible. Pour le groupe de Galois on a cette détermination très simple : le groupe de Galois de l'équation modulaire en j' est le groupe linéaire

$$v' = \frac{av - b}{cv - d} \pmod{p} \qquad (ad - bc \equiv 0).$$

L'irrationnelle numérique dont l'adjonction réduit ce groupe au groupe de monodromie est $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$. Quant au calcul effectif des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$, pour une valeur donnée de p, il est extrêmement laborieux, même pour de petites valeurs de p.

On obtient des résultats plus simples pour l'équation modulaire qui correspond à $\sqrt[4]{k} = \varphi(\tau)$. L'étude de cette équation est poussée assez loin pour qu'on puisse, dans les cas de $p = 3, 5, 7, 11$, construire effectivement l'équation. Les résultats sont donnés ici et l'on y a joint, pour $p = 3$ et pour $p = 7$, les formes irrationnelles très simples de Legendre et de Gutzlaff. On arrive enfin à la résolution de l'équation du cinquième degré au moyen de fonctions modulaires, en suivant la voie ouverte par Hermite :

L'équation modulaire, dans le cas de $p = 5$, est

$$v^6 - u^6 - 4uv(1 - u^4 v^4) - 5u^2 v^2 (v^2 - u^2) = 0;$$

elle est du sixième degré, mais elle admet une résolvante du cinquième degré. Ce fait, énoncé par Galois, s'explique en remarquant que le groupe de l'équation défini par la congruence

$$v' = \frac{av - b}{cv - d} \pmod{5} \qquad (ad - bc \equiv 1)$$

admet des sous-groupes d'indice 5; l'un d'eux peut être engendré au moyen des deux substitutions

$$(v_1, v_2)(v_3, v_4), \quad (v_0, v_1, v_3)(v_2, v_4, v_5).$$

Or, la fonction suivante

$$z_0 = (v_\infty - v_0)(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)$$

appartient à ce sous-groupe : on vérifie qu'elle prend, pour toutes les substitutions du groupe modulaire, les cinq valeurs

$$z_\lambda = (v_\infty - v_\lambda)(v_{1+\lambda} - v_{4+\lambda})(v_{2+\lambda} - v_{3+\lambda}) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Hermite, en 1858, a considéré cette fonction ; il a construit la résolvante qui lui correspond et montré que l'équation générale du cinquième degré peut se ramener à cette résolvante par la résolution d'une équation du troisième degré et d'équations du deuxième degré, ce qui donne, pour l'équation du cinquième degré, à l'aide de la fonction modulaire $\varphi(\tau)$, un mode de résolution comparable à celui de l'équation du troisième degré à l'aide des fonctions circulaires.

M. Bianchi donne des renseignements historiques sur cette importante question et il pousse jusqu'au bout le calcul de la résolvante d'Hermite.

Chapitre XVIII : *Multiplication complexe* (p. 525-563). — On sait déjà que, si n est un nombre entier, $p(nu \mid \omega, \omega')$ s'exprime rationnellement en fonction de $p(u \mid \omega, \omega')$. On se pose maintenant la question : Est-il possible, en choisissant convenablement les périodes ω et ω' et le nombre constant ε, d'obtenir que $p(\varepsilon u \mid \omega, \omega')$ s'exprime rationnellement en fonction de $p(u \mid \omega, \omega')$?

Il faut pour cela que l'on ait

$$\varepsilon\omega = a\omega - b\omega',$$
$$\varepsilon\omega' = c\omega - d\omega',$$

a, b, c, d étant des entiers tels que le déterminant $ad - bc = N$ soit positif.

Si ces relations ne se réduisent pas à des identités, ce qui est le cas de la multiplication ordinaire, et si, entre elles, on élimine τ, puis ω et ω', on trouve deux équations du second degré

$$b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0,$$
$$\varepsilon^2 - (a + d)\varepsilon - (ad - bc) = 0$$

ayant même déterminant $\Delta = (a + d)^2 - 4N$; comme τ doit être

complexe, on voit que ε doit l'être aussi, de là le nom de *multiplication complexe*.

D'après ce qui précède, si $p(u \mid \omega, \omega')$ est une fonction elliptique à multiplication complexe, on a entre les périodes une relation quadratique de la forme

$$A\omega'^2 + 2B\omega\omega' + C\omega^2 = 0,$$

où A, B, C sont des entiers sans diviseur commun et tels que le déterminant $D = AC - B^2$ est positif. Inversement, toute forme binaire quadratique à déterminant positif détermine une fonction pu à multiplication complexe, et les formes appartenant à une même classe déterminent la même fonction pu.

Il s'agit d'établir, pour la fonction pu correspondant à une forme quadratique donnée (A, B, C), les formules les plus générales de multiplication complexe. On reconnaît que ces formules peuvent s'obtenir en combinant les formules d'addition et de multiplication avec les formules élémentaires obtenues en donnant aux coefficients $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la transformation et au multiplicateur ε les valeurs suivantes :

$$a = B, \qquad b = A, \qquad c = -C, \qquad d = -B, \qquad N = D, \qquad \varepsilon = i\sqrt{D}$$

si la forme est de première espèce (c'est-à-dire si A et C ne sont pas pairs tous les deux), et

$$a = \frac{1}{2}(B - 1), \qquad b = \frac{1}{2}A, \qquad c = -\frac{1}{2}C,$$
$$d = \frac{1}{2}(-B + 1), \qquad N = \frac{D - 1}{4}, \qquad \varepsilon = \frac{1 - i\sqrt{D}}{2}$$

si la forme est de deuxième espèce (A et C sont pairs tous les deux).

On peut établir les formules effectives de multiplication complexe correspondant aux relations

$$\begin{aligned} \omega &= a\frac{\omega}{\varepsilon} + b\frac{\omega'}{\varepsilon} \\ \omega' &= c\frac{\omega}{\varepsilon} + d\frac{\omega'}{\varepsilon} \end{aligned} \qquad (ad - bc = N),$$

où a, b, c, d sont des entiers premiers entre eux.

En désignant par 2ϖ une période convenablement choisie, on trouve

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \wp u + \sum_{r=1}^{N-1} \left[\wp\left(u - r\frac{2\varpi}{N}\right) - \wp\left(r\frac{2\varpi}{N}\right) \right],$$

puis, en associant convenablement les termes,

$$\varepsilon^2 \wp(\varepsilon u) = \frac{U(\wp u)}{V(\wp u)};$$

dans cette formule, U et V sont des polynomes entiers en $\wp u$ de degré N et N — 1, les coefficients de U et de V sont des fonctions entières de g_2 et de g_3 avec des coefficients numériques qui sont rationnels ou contiennent la seule irrationnelle $i\sqrt{D}$, suivant que la forme (A, B, C) est de première ou de seconde espèce; la formule dépend seulement du déterminant D et de l'espèce de la forme quadratique.

L'équation pour la division des périodes qui, dans le cas général, n'est pas résoluble par radicaux, est, dans le cas d'une fonction $\wp u$ à multiplication complexe, une équation abélienne (avec un groupe de Galois de substitutions échangeables) et, par suite, est résoluble par radicaux, le domaine de rationalité étant composé de g_2, g_3 et des nombres rationnels.

Les invariants absolus $j(\tau)$ des fonctions elliptiques à multiplication complexe qui correspondent aux classes de formes quadratiques (A, B, C) de même déterminant D et de même espèce sont racines d'une même équation algébrique à coefficients entiers, le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue étant l'unité : on désignera le premier membre de cette équation par $H_D(j)$ ou $H'_D(j)$ suivant que les formes quadratiques considérées sont de première ou de seconde espèce. On indique une méthode pour le calcul effectif des expressions $H_D(j)$ et $H'_D(j)$, mais en ajoutant que cette méthode théorique conduirait à des calculs laborieux, et en renvoyant au livre de Weber (*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*) et à des Mémoires de Greenhill, où sont considérées des fonctions modulaires plus élevées et les équations modulaires correspondantes.

Les invariants de classe de deuxième espèce appartenant à un déterminant donné s'expriment rationnellement au moyen des

invariants de première espèce qui correspondent au même déterminant. On pourra donc se limiter à l'étude de *l'équation*

$$H_D(j) = 0,$$

qui donne les invariants des classes de première espèce et de déterminant D.

Chapitre XIX : *Composition des formes quadratiques d'après Gauss et groupe de Galois pour l'équation aux invariants de classe* (p. 563-598). — J'énoncerai seulement ici la règle suivante, à laquelle on est conduit en considérant deux réseaux de parallélogrammes que l'on fait correspondre à deux formes données : Pour composer deux classes de formes primitives de première espèce et de même déterminant, on choisit dans ces deux classes deux formes concordantes

$$(a, b, a'C), \quad (a', b, aC),$$

dans lesquelles a, a' et $2b$ n'ont pas de diviseur commun; la forme composée est

$$(aa', b, C).$$

et la classe définie par cette dernière forme est la classe composée.

Si K et K′ désignent les deux classes données, la classe composée K″ se représente par le produit symbolique

$$K'' = KK';$$

l'ordre des facteurs K et K′ est indifférent.

Si l'on considère toutes les classes de formes primitives de première espèce et de déterminant D

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_h,$$

et si on les multiplie par l'une d'elles prise arbitrairement, on retrouve, à l'ordre près, les h classes considérées; l'ordre reste le même si la classe par laquelle on multiplie contient la forme principale (1, 0, D). On définit, de cette manière, un groupe de h substitutions; ce groupe est appelé *groupe de composition des classes*.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Si, au domaine de rationalité formé des nombres rationnels,

on adjoint $i\sqrt{D}$, le groupe de Galois, pour l'équation aux invariants des classes $H_D(j) = 0$, est holoédriquement isomorphe au groupe de composition des classes.

L'équation $H_D(j) = 0$ est irréductible dans le domaine de rationalité $(1, i\sqrt{D})$. Mais si l'on adjoint des radicaux réels convenablement choisis, le polynome $H_D(j)$ se décompose en autant de facteurs qu'il y a de *genres* de formes quadratiques d'après Gauss et les racines de chaque facteur appartiennent aux classes d'un même genre.

Pour une étude plus approfondie de cette question M. Bianchi renvoie aux travaux de Kronecker sur la multiplication complexe.

E. Lacour.

GRANDJEAN (Georges). — Sur le régime permanent graduellement varié qui se produit a la partie amont des tuyaux de conduite et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tuyaux. (Thèse de doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris.) In-4° de 59 pages; C. Naud, 1902.

Ce Travail de Physique mathématique a pour objet l'étude de l'écoulement permanent varié que prend l'eau à l'entrée des tuyaux de conduite circulaires, sur une longueur pouvant atteindre, quand la paroi est très polie, jusqu'à trente-cinq ou quarante fois leur diamètre, parcours au bout duquel le régime uniforme, régnant dans le reste du tuyau, se trouve établi.

Comme on le voit, cette étude touche à une question capitale d'Hydraulique, celle des distributions d'eau des villes.... Cette question n'a été abordée qu'assez récemment, surtout en ce qui concerne le mode de distribution des vitesses dans les diverses sections du tuyau, où figurent, comme variables indépendantes, l'abscisse x de la section, comptée à partir de l'entrée, et la distance r de chaque point d'une section à son centre ou à l'axe; quant à la fonction inconnue, c'est le rapport de la vitesse en ce point à la vitesse moyenne de débit, ou mieux la petite partie π de ce rapport par laquelle le régime considéré se distingue du régime

uniforme, partie tendant asymptotiquement vers zéro pour x infini.

M. Boussinesq avait fait connaître en 1897 les équations aux dérivées partielles de ce problème et montré qu'elles s'intègrent par superposition de solutions simples ayant quelque analogie avec celles de Fourier dans la question des températures permanentes d'une longue barre qui remplirait le tuyau et qui serait chauffée à l'entrée de celui-ci, pareillement tout autour de l'axe, tandis que la surface latérale rayonnerait dans un milieu de température zéro. Mais ici l'équation est du quatrième ordre et non du second quant aux dérivées en r, et les conditions au contour des sections sont deux fois plus nombreuses et sont, en outre, telles que le produit de deux solutions simples n'a pas sa valeur moyenne nulle. Aussi les fonctions $\psi(r)$ multipliant les diverses exponentielles en x évanouissantes, y sont-elles de forme beaucoup plus complexe : elles semblent impossibles à obtenir autrement qu'en série, de même que l'équation transcendante dont les racines m, toutes réelles et positives, sont les coefficients respectifs d'extinction des exponentielles en x.

Enfin les constantes d'amplitude, dans la solution générale, des diverses solutions simples ne se séparent plus par le procédé d'élimination de Fourier; leur détermination exige l'emploi laborieux de la méthode des moindres carrés.

En dehors du cas d'un tuyau à paroi très lisse, où l'équation différentielle en Ψ se simplifie, les calculs effectifs paraissent inabordables. Cependant, M. Grandjean forme explicitement, sans rien négliger, la loi de récurrence reliant chaque coefficient des séries Ψ aux deux coefficients précédents : ce qui suffit pour prouver la convergence des séries et la légitimité de leur emploi.

Le Travail de M. Grandjean est divisé en trois Parties : la première est consacrée à la définition du régime graduellement varié et aux équations fondamentales de ce régime. Les deux autres Parties sont des applications de ces théories au cas d'un tuyau rectangulaire très large et au cas d'un tuyau circulaire.

Dans le second Chapitre de son Travail, M. Grandjean traite, d'une manière détaillée, le cas d'une paroi très lisse, cas pour lequelle on possède une expérience soignée de M. Bazin, et il y détermine la première racine m et, par suite, la solution simple

fondamentale dont dépend presque exclusivement le mode de distribution des vitesses, ainsi que la seconde racine m, et calcule la forme explicite de la seconde solution simple, puis les deux coefficients d'amplitude affectant ces deux premiers et principaux termes de la fonction cherchée, quand on y réduit la solution et qu'on fait, par exemple, l'hypothèse d'une entrée parfaitement évasée, assurant le quasi-parallélisme et l'égalité de vitesse des filets fluides au début de la partie cylindrique du tuyau. Malgré l'imparfaite vérification de cette hypothèse, la comparaison des résultats théoriques avec ceux qu'a constatés M. Bazin ne révèle que des écarts peu supérieurs aux erreurs d'observation.

M. Grandjean, avant d'aborder le cas de l'écoulement dans des tuyaux circulaires qu'il examine dans le Chapitre III de son Travail, a examiné celui d'un tuyau rectangulaire très large, pour que l'écoulement puisse être censé s'y faire dans des plans parallèles et de la même manière dans tous. Alors les séries Ψ précédentes font place dans le cas d'une paroi très lisse à des expressions trigonométriques finies et, dans les autres cas, à des séries qui sont de beaucoup moins compliquées que lorsqu'il s'agit des tuyaux circulaires. E. E.

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE;

PAR M. LELIEUVRE.

Je me propose de trouver les fonctions f, φ et F qui satisfont à l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(u)\varphi(v) - \varphi(u)f(v) = F(u+v)F(u-v). \tag{1}$$

La formule connue de la théorie des fonctions elliptiques

$$(pu - pv)\sigma^2 u\,\sigma^2 v = -\sigma(u-v)\sigma(u-v)$$

est un cas particulier de l'équation (1) : je vais montrer que la solution générale s'y rattache.

Tout d'abord, la permutation dans (1) de u et de v montre que la fonction F est impaire [donc $F(0) = 0$]; ensuite, le changement de v en $-v$ n'altérant pas le second membre de (1), il en résulte que f et φ doivent être paires.

L'équation (1) entraîne l'identité des deux membres et de leurs dérivées partielles successives par rapport à v pour la valeur $v = 0$; cette identité a lieu d'elle-même, d'après les remarques qui précèdent, pour les équations dérivées d'ordre impair; si on l'écrit pour l'équation (1) et, pour les deux premières équations dérivées d'ordre pair 2 et 4, on obtient les trois équations suivantes (dans lesquelles, pour simplifier, je supprime au second membre l'écriture de l'argument u) :

$$(2)\quad \begin{cases} f(u)\varphi(0) - \varphi(u)f(0) = F^2, \\ f(u)\varphi''(0) - \varphi(u)f''(0) = 2(FF'' - F'^2), \\ f(u)\varphi^{(4)}(0) - \varphi(u)f^{(4)}(0) = 2(FF^{(4)} - 4F'F''' + 3F''^2). \end{cases}$$

Ces équations étant linéaires en $f(u)$ et $\varphi(u)$, il en résulte que leurs seconds membres doivent satisfaire à une relation linéaire à coefficients constants : soit, en appelant A et B deux constantes et supposant $f(0)\varphi''(0) - \varphi(0)f''(0) \neq 0$:

$$FF^{(4)} - 4F'F''' + 3F''^2 = A(FF'' - F'^2) - BF^2.$$

Cette équation différentielle, du quatrième ordre par rapport à l'inconnue F, s'abaisse évidemment à un ordre moindre en prenant pour inconnue auxiliaire la dérivée logarithmique $\Phi = \frac{F'}{F}$; elle devient ainsi

$$\Phi''' + 6\Phi'^2 = A\Phi' - B;$$

d'où, en posant

$$G = \Phi' = \frac{d^2 LF}{du^2} \qquad (L, \text{ signe du log nép.}),$$

l'intégrale première suivante, dans laquelle C est une nouvelle constante,

$$(3)\qquad G'^2 = 4G^3 + AG^2 + 2BG + C,$$

G, puis F, étant choisis conformément à cette équation (3), f et φ,

en vertu du système (2), devront vérifier deux équations de la forme suivante, dans lesquelles α, β, α_1, β_1, sont des constantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha\, f(u) + \beta\, \varphi(u) = F^2, \\ \alpha_1 f(u) + \beta_1 \varphi(u) = F^2 G. \end{cases}$$

Voyons si l'on peut choisir les constantes α, β, α_1, β_1, de façon à vérifier (1). En vertu des équations (4), on a évidemment

$$(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)[f(u)\varphi(v) - \varphi(u) f(v)] = F^2(u) F^2(v) [G(v) - G(u)].$$

Il faudra donc que l'on ait

$$F^2(u) F^2(v)[G(v) - G(u)] = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1) F(u+v) F(u-v).$$

Par conséquent la fonction

$$\chi(u, v) = LF^2(u) + LF^2(v) + L[G(v) - G(u)]$$

doit d'abord satisfaire à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}.$$

Par un calcul facile que j'omets on vérifie que, en vertu de (3), il en est bien ainsi ; d'où résulte que $\chi(u, v)$ est de la forme

$$\Psi(u+v) + \Psi_1(u-v),$$

et comme χ ne change pas quand on change v en $-v$, car G est paire, il faut forcément que les fonctions Ψ_1 et Ψ coïncident. Donc j'ai

$$F^2(u) F^2(v)[G(v) - G(u)] = \Theta(u+v)\Theta(u-v).$$

Je détermine Θ en faisant $v = 0$ ce qui annule $F(v)$, tandis que le produit $F^2(v)G(v) = F'^2 - FF''$ devient égal à $F'^2(0)$; d'où

$$\Theta(u) = F'(0) F(u),$$

par conséquent :

$$F^2(u) F^2(v)[G(v) - G(u)] = F'^2(0) F(u+v) F(u-v).$$

On doit donc avoir $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = F'^2(0)$.
On vérifie d'ailleurs aisément que l'hypothèse écartée

$$f(0)\varphi''(0) - \varphi(0) f''(0) = 0$$

ne conduit à aucune solution. On a donc, en définitive, le résultat suivant :

Pour satisfaire à l'équation (1), *on doit choisir* F *par la condition que la fonction* $G = -\frac{d^2 LF}{du^2}$ *vérifie une équation différentielle de la forme*

$$G'^2 = 4G^3 - AG^2 - 2BG - C,$$

dans laquelle A, B, C *sont des constantes. Ensuite* f *et* φ *sont déterminées par deux équations telles que*

$$\alpha f + \beta \varphi = F^2,$$
$$\alpha_1 f + \beta_1 \varphi = F^2 G,$$

α, β, α_1, β_1, *étant quatre constantes assujetties seulement à la condition*

$$\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = F'^2(0).$$

On voit donc que G sera une fonction elliptique (ou dégénérescence) ne différant d'une fonction $\wp$ de Weierstrass que par une constante ; F ne différera de la fonction σ correspondante que par un facteur exponentiel de la forme me^{au^2} (F impaire); f et φ seront des combinaisons linéaires et homogènes convenables de F^2 et $F^2 G$.

Théorème d'addition de la fonction G. — Il est intéressant de montrer comment le théorème d'addition de la fonction G peut se déduire de l'équation (1) *sans différentiation*. Il suffit pour cela de déduire de (1) l'équation du second degré rationnelle par rapport à $G(u)$ qui a pour racines $G(u+v)$ et $G(u-v)$ [1]. J'écris l'équation (1) :

$$(1) \quad F^2(u)F^2(v)[G(u) - G(v)] = kF(v+u)F(v-u), \qquad k = F'^2(0).$$

Je poserai

$$(2) \quad \begin{cases} G(u+v) - G(v) = kX, \\ G(u-v) - G(v) = kY, \\ G(u) - G(v) = kZ. \end{cases}$$

[1] J'ai suivi une méthode analogue à celle que j'indique ici dans une Note sur la *multiplication de l'argument des fonctions elliptiques* (*Bull. Sc. math.*, février 1901).

De l'identité

$$[G(u) - G(v)] + [G(v) - G(w)] + [G(w) - G(v)] = 0$$

je déduis

$$(\beta)\quad \begin{cases} F(v+u)F(v-u)F^2(w) \\ \quad + F(w+v)F(w-v)F^2(u) + F(u+w)F(u-w)F^2(v) = 0. \end{cases}$$

Si, dans cette formule, je fais $w = 2v$, j'ai

$$(\gamma)\quad \begin{cases} F(v+u)F(v-u)F^2(2v) \\ \quad + F(3v)F(v)F^2(u) + F(u+2v)F(u-2v)F^2(v) = 0; \end{cases}$$

d'où, en déduisant des équations (α), $F(2v+u)$ et $F(2v-u)$ calculés en fonction de X et Y à l'aide de (1), puis remplaçant le produit $F(u+v)F(v-u)$ en fonction de Z, il vient, après disparition de $F(u)$:

$$XYZ^2 + Z\left[\frac{F(2v)}{F^4(v)}\right]^2 + \frac{F(3v)}{F^9(v)} = 0.$$

Je poserai, pour m entier quelconque positif, $\frac{F(mv)}{F^{m^2}(v)} = A_m$; l'équation précédente devient ainsi :

$$(p)\qquad XYZ^2 + A_2^2 Z + A_3 = 0.$$

D'autre part, si je change, dans (γ), u en $u+v$, puis en $u-v$, j'y introduis $F(u+3v)$ et $F(u-3v)$ que j'éliminerai entre les deux relations obtenues et celle que l'on forme en remplaçant, dans (β), w par $3v$; j'ai ainsi une relation renfermant

$$F(u+2v),\quad F(u-2v)$$

ainsi que $F(u-v)$, et j'élimine ces quantités de la même façon que précédemment à l'aide de (1) et des relations (α); $F(u)$ disparaît encore de lui-même, et j'ai

$$(q)\qquad A_2^3 XYZ + A_2 A_3 (X+Y)Z - A_4 = 0.$$

Les équations (p) et (q) résolvent la question en déterminant $X+Y$ et XY en Z. Du reste, A_m peut s'exprimer en fonction de $G(v)$ et de ses dérivées, car on a

$$G(mv) - G(v) = -\frac{kF(m+1)vF(m-1)v}{F^2(mv)F^2v} = -k\frac{A_{m-1}A_{m+1}}{A_m^2}$$

et comme $G(v) = -\frac{d^2 LF(v)}{dv^2}$, il en résulte

$$G(mv) - G(v) = -\frac{1}{m^2}\frac{d^2 LA_m}{dv^2};$$

d'où

$$k\frac{A_{m-1}A_{m-1}}{A_m^2} = \frac{d^2 LA_m}{dv^2}.$$

Cette formule détermine A_{m+1} en fonction de A_{m-1} et A_m. On part de $A_1 = 1$ et de A_2 tiré de (1) en y faisant tendre u vers v, ce qui donne $A_2 = -\frac{G'(v)}{F'^3(v)}$.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* III. Bd. 3 Abthlg. Abschn. XVIII. (1725-1758). 2e édition. Gr. in-8° avec 72 fig. Leipzig, Teubner. 12 m. 40 pf.

HADAMARD (J.). — *Leçons de Géométrie élémentaire.* II : *Géométrie dans l'espace.* In-8°, XXI-582 p. avec fig. Paris, Colin.

JAHRBUCH *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Herausgeg. von A. Wangerin u. A. Gutzmer. 5. Bd. 2. (Schluss-) Lfg. gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 14 m. 40 pf.

Contenu : E. Kötter, die Entwickelung der synthetischen Geometrie. 1. Thl.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TANNERY (J.) et MOLK (J.). — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. Tome IV : CALCUL INTÉGRAL (2e Partie). In-8°, x-304 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

MM. J. Tannery et J. Molk achèvent maintenant l'œuvre considérable qu'ils ont entreprise, il y a déjà quelques années, en se proposant d'exposer aux lecteurs français la théorie des fonctions elliptiques et ses applications d'une façon complète; leur titre est, en effet, trop modeste, et si je veux bien leur accorder qu'ils n'ont traité que les *éléments* de cette théorie (ce qui nous fait penser qu'ils auraient pu nous dire encore bien d'autres choses du plus haut intérêt), il faut bien qu'ils me permettent de les louer pour la façon dont ils ont traité ces *éléments,* non seulement au point de vue purement analytique, mais aussi au point de vue pratique, en ne laissant dans l'ombre aucune de ces petites questions qui peuvent paraître d'abord de mince importance, mais qui se placent naturellement au premier rang, quand on étudie les fonctions elliptiques *pour s'en servir,* et non seulement par curiosité d'esprit. Bien des fois, en effet, on a pu admirer l'élégance analytique des solutions naturelles de certains problèmes, telles que les fournit l'usage des fonctions elliptiques; mais, bien des fois aussi, on a été rebuté, quand il s'agissait de passer aux applications, par la complication des calculs, par le peu de convergence des séries à employer, par l'apparition d'arguments imaginaires, par l'indétermination apparente des logarithmes qui figurent dans les formules. Après avoir bien lu l'Ouvrage de MM. Tannery et Molk, on voit, au contraire, que toutes ces difficultés sont plus apparentes que réelles, et qu'il n'est rien de plus facile que de les surmonter : ce qui nous manquait, c'était un guide sûr, et ce guide nous l'avons maintenant. Des formules claires, résumées en un petit nombre de pages, permettent de résoudre numériquement tous les problèmes dans lesquels s'introduisent naturellement les fonctions elliptiques : les calculs à faire se présentent

de la façon la plus avantageuse, puisque les séries à employer, déjà connues d'ailleurs par le formulaire de M. Schwarz, sont toujours préparées, à l'aide de transformations très simples, de façon à fournir, par la considération des deux premiers termes, une approximation plus que suffisante, au moins dans les cas usuels; le choix de la valeur à prendre pour un logarithme est précisé d'une façon absolue; pour tout dire en un mot, l'usage des fonctions elliptiques est rendu véritablement *pratique*. MM. Tannery et Molk ont donc pleinement atteint le double but qu'ils se proposaient: l'élégance et la rigueur dans l'exposition analytique, en même temps que la brièveté et la précision dans l'usage.

Le présent Volume, qui termine l'Ouvrage, contient d'abord la fin de la théorie de l'*Inversion*, déjà commencée au Tome III.

Le Chapitre IX est consacré à l'*évaluation des intégrales de la forme*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Az^4 + 4Bz^3 - 6Cz^2 - 4Dz - E}}$$

prises le long d'un chemin quelconque, dans le cas où A, B, C, D, E *sont réels.*

Les auteurs examinent d'abord la détermination de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{Y}},$$

où $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$, en supposant les racines e_1, e_2, e_3 de l'équation $Y = 0$ réelles. On y arrive facilement en coupant convenablement le plan des y et en faisant la représentation conforme sur ce plan d'un demi-rectangle des périodes de la fonction pu, au moyen de la relation $y = pu$.

Ils étudient ensuite, et par des moyens analogues, la même question, dans le cas où les deux racines e_1 et e_3 sont imaginaires conjuguées, e_2 restant réelle.

Ils ramènent alors la différentielle $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, où Z est un polynome quelconque du troisième ou du quatrième degré à racines inégales et à coefficients réels, $Az^4 + 4Bz^3 + 6Cz^2 + 4Dz + E$, à la différentielle précédemment envisagée $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, à l'aide d'une sub-

stitution linéaire entre les variables z et y. Les cas où l'on a $\Lambda = 0$ ou bien $\Lambda \neq 0$ sont étudiés séparément.

La réduction à la forme de Legendre forme l'objet d'un paragraphe spécial; et le Chapitre se termine par l'étude des substitutions quadratiques qui permettent le passage de $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ à $\frac{dy}{-\sqrt{Y}}$.

Le Chapitre X est intitulé : *Intégrales elliptiques*. On se propose ici d'évaluer les intégrales de la forme $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$, où X est un polynome de x du troisième ou du quatrième degré, à racines inégales, et $F(x, \sqrt{X})$ une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{X}$. Cette évaluation s'obtient en faisant usage des substitutions définies précédemment pour ramener l'intégrale à la forme $\int f(y, \sqrt{Y})\,dy$, où $Y = 4y^3 - g_2 y - g_3$ et où f désigne une fonction rationnelle, et en profitant des résultats obtenus au Tome précédent (Chap. VI). Puis, en se plaçant à un tout autre point de vue, les auteurs exposent la réduction par Legendre des intégrales elliptiques aux formes dites *intégrales de première, deuxième et troisième espèce,* et expliquent les notations adoptées successivement par Legendre, Jacobi et Weierstrass pour représenter ce que ces différents géomètres désignent sous le nom d'*intégrales normales*.

Le Chapitre XI est consacré à l'étude des *Substitutions birationnelles de Weierstrass* et à l'*intégration de l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z - a_4.$$

Ce titre fait suffisamment comprendre l'objet du Chapitre : l'équation différentielle précédente admet pour intégrale générale une relation doublement quadratique entre z et $\wp(u - u_0)$, la fonction $\wp$ étant construite avec des invariants convenables; et si, pour $u = u_0$, z se réduit à z_0 et $\frac{dz}{du}$ à z'_0, on peut exprimer rationnellement z à l'aide de $\wp(u - u_0)$ et $\wp'(u - u_0)$.

Le Chapitre XII termine la partie de l'Ouvrage que les auteurs ont appelée *Calcul intégral*. Il est consacré à un sujet spécial : *Équations aux dérivées partielles*.

Si l'on considère les fonctions $\sigma(u; g_2, g_3)$ et celles qui en dérivent comme dépendant de u, de g_2 et de g_3, elles vérifient des équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes, qu'on peut appeler *équations d'homogénéité*. Mais, comme l'a montré Weierstrass, elles vérifient encore d'autres équations de même nature, mais distinctes des précédentes; c'est ainsi que l'on a

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} - \frac{g_2}{12} u^2 \sigma = 0.$$

L'étude de cette équation et des analogues forme l'objet de ce Chapitre; on en déduit facilement les coefficients des développements en séries entières de σu et des fonctions analogues $\sigma_\alpha u$.

MM. Tannery et Molk placent à cet endroit de leur Ouvrage le *Tableau des formules* relatif au Calcul intégral; il est d'une netteté parfaite et suffira pour les applications de la théorie des fonctions elliptiques, ainsi que je le signalais plus haut.

Vient ensuite une deuxième Partie consacrée aux *Premières applications des fonctions elliptiques*. Elle est divisée en deux Chapitres : le premier contient les *Premières applications à la Géométrie et à la Mécanique;* le deuxième renferme les *Premières applications à l'Algèbre et à l'Arithmétique*.

Dans le premier Chapitre on trouve d'abord la détermination de la longueur d'un arc d'ellipse, de la longueur d'un arc de lemniscate, de l'aire de l'ellipsoïde; puis l'étude du mouvement du pendule simple, une étude détaillée et très intéressante du pendule sphérique; enfin le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas où il n'y a pas de force extérieure est traité avec les développements convenables.

Le second Chapitre débute par le problème de la division des périodes par un nombre entier; les auteurs se limitent au cas où le nombre par lequel on divise les périodes est un nombre premier impair et mettent en évidence les propriétés si intéressantes des équations dont dépend alors leur problème, au point de vue surtout de leur irréductibilité ou de leur réductibilité dans un corps convenablement choisi.

L'étude des équations modulaires vient ensuite; entre

$$\sqrt{k} \quad \sqrt{k_1} \quad \ldots \quad \sqrt{k} \quad \sqrt{k_n}$$

existe, en supposant n premier impair, une équation algébrique de degré $n+1$, et d'un intérêt tout particulier, qui a reçu le nom d'*équation modulaire*. MM. Tannery et Molk montrent comment on peut former cette équation et quelles en sont les principales propriétés.

Les auteurs posent ensuite le problème de la transformation pour des fonctions doublement périodiques quelconques d'une même variable, définissent les transformations primitives et montrent comment les équations modulaires correspondant à une transformation quelconque dépendent des équations modulaires correspondant à une transformation primitive.

La division des périodes par 3 ou par 5 et l'étude des équations modulaires correspondantes fournissent des applications des théories générales précédentes.

Enfin, le Chapitre est terminé par la résolution du problème de la division d'une boucle de lemniscate en trois, quatre ou cinq parties égales, ce qui peut se faire à l'aide de la règle et du compas seulement; par l'étude du problème de la division de l'argument par un nombre entier n; par l'exposition de la question connue sous le nom de *multiplication complexe;* en dernier lieu, par le fameux théorème de Jacobi sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de quatre carrés.

Le Volume se termine par quelques notes intéressantes sur des points particuliers et par une lettre de la plus grande importance adressée quelques mois avant sa mort par M. Hermite à M. J. Tannery. Cette lettre, qu'il faudrait citer tout entière, contient la seule démonstration publiée par Hermite des formules, données par lui sans démonstration en 1858, qui expriment les fonctions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ à l'aide de $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$, en supposant $\tau = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}$, et désignant par a, b, c des entiers liés par la relation $ad - bc = 1$. Cette démonstration est très belle et du plus haut intérêt; mais la lettre d'Hermite a encore pour nous l'inestimable avantage de faire revivre à nos yeux ce maître vénéré, d'un esprit si fin et d'une si grande bonté. Remercions donc doublement M. Tannery de nous avoir fait connaître cette lettre : un Ouvrage sur les fonctions elliptiques ne pouvait pas trouver un plus beau couronnement.

H. Andoyer.

FRICKE (R.). — Hauptsätze der Differential- und Integral-Rechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. Dritte umgearbeitete Auflage. Mit 74 in den Text gedruckten Figuren. 1 vol. in-8°, xv-218 pages. Brunschweig, Vieweg, 1902.

Ce résumé d'un Cours de Calcul différentiel et intégral a été primitivement composé pour les élèves d'une École technique; le succès des deux premières éditions a persuadé l'auteur que son Livre pouvait rendre des services en dehors du milieu spécial pour lequel il avait été écrit. Ce livre a été remanié et complété sur quelques points pour cette troisième édition : sa brièveté et sa clarté le recommandent suffisamment. Il sera utile tant à ceux qui veulent surtout apprendre le Calcul différentiel et intégral pour s'en servir qu'à ceux qui, tout en désirant continuer leurs études mathématiques, veulent acquérir une première vue du sujet et se familiariser avec les méthodes.

Naturellement l'auteur n'a pas cherché à faire une exposition « arithmétique » du sujet; il n'a pas craint de faire appel à l'intuition, il a multiplié les figures, qui, souvent, dispensent presque du raisonnement; il n'entendait point faire œuvre de logicien subtil, mais apprendre aux gens à appliquer correctement des règles sûres; il a tenu compte de l'état d'esprit de ses lecteurs, et du but qu'ils cherchent à atteindre. Est-il utile de dire que ce sont là des qualités, et non des défauts?

GODEFROY (M.). — Théorie élémentaire des séries (Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction Gamma). 1 vol. in-8°, VIII-256 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Le Livre de M. Godefroy est d'une lecture facile et attrayante. Il n'y a pas d'étudiant, ayant quelque goût pour les Mathématiques, qui n'ait été frappé par la beauté et la simplicité des développements en série, ou en produits infinis, de ces fonctions élémentaires qui jouent dans toutes les parties des Mathématiques

un rôle si essentiel. S'il est vrai que « l'étonnement soit le commencement de la Science », il est bon de cultiver chez les commençants la faculté d'admirer, et de les retenir un peu sur quelques-unes des propriétés de ces fonctions et de leurs développements, soit que ces propriétés se présentent d'elles-mêmes, soit, au contraire, que leur connaissance résulte d'un long effort, comme, par exemple, la transcendance du nombre e, lorsque cet effort disparaît dans la perfection de la démonstration, et qu'il ne reste plus que l'émerveillement devant la beauté du résultat et la simplicité des moyens qui permettent de l'établir. Ceux qui sont chargés d'enseigner l'Analyse n'ont souvent pas le temps de s'attarder à ces belles propriétés. Les Livres comme celui de M. Godefroy sont très utiles pour développer le goût des Mathématiques. Ajouterai-je, pour répéter une idée qui était chère à Hermite, qu'il est désirable que ces fonctions élémentaires dont il traite s'individualisent en quelque sorte dans l'esprit des étudiants, et leur apparaissent comme ayant une vie propre, faite de leurs propriétés caractéristiques?

Quant au contenu du Livre, je ne saurais mieux le faire connaître qu'en reproduisant une partie de la Préface qu'y a mise M. L. Sauvage.

« L'auteur, dans le Chapitre I, définit d'une manière précise les notions de limite, de continuité et de dérivée, et rappelle celles de leurs conséquences dont il fera plus tard usage; la plupart ont été empruntées à l'*Analyse algébrique* de Cauchy; on ne saurait prendre un meilleur guide.

» La théorie des séries à termes constants est ensuite exposée avec détails. Le théorème de Kummer, les règles de Cauchy, de Raabe et de Gauss sont démontrées avec une méthode et une clarté parfaites. A ces propositions générales succèdent des développements intéressants sur la convergence absolue et sur les séries de séries, dont les séries de Lambert et de Clausen forment une curieuse application.

» Le Chapitre suivant est entièrement consacré aux séries à termes variables. L'auteur, après avoir fait connaître les théorèmes relatifs à la convergence uniforme et à la continuité de ces séries, passe aux séries entières. Le théorème d'Abel et ses im-

portants corollaires sont établis avec toute la netteté désirable; des exemples bien choisis éclairent les passages délicats, puis vient un résumé substantiel des premières propriétés des polynomes de Legendre et de la série hypergéométrique. Le lecteur est ainsi conduit à la formule de Taylor, considérée comme le développement naturel du développement de l'accroissement de la somme $f(x)$ d'une série entière. Le rôle pratique de la série de Maclaurin est assez effacé, des procédés directs dispensent souvent d'y recourir; aucun de ceux dont l'emploi est le plus courant n'a été omis.

» Le Chapitre IV traite avec ampleur de la fonction exponentielle. Aux méthodes ordinaires pour déterminer la limite de l'expression $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ est préférée, à juste titre, celle de M. Darboux. Nous signalerons encore un abrégé instructif des propriétés des polynomes de Hermite, des fonctions de Bessel, des nombres et des polynomes de Bernoulli; puis la belle démonstration de la transcendance de e due à MM. Hürwitz et Gordan. La fonction a^x est définie à l'aide de l'exponentielle e^x, à l'inverse de la marche habituelle; on évite ainsi des longueurs à propos de la continuité de a^x. Euler et, après lui, Cauchy et Abel se sont servis de la relation fonctionnelle caractéristique de cette transcendante pour étendre la formule du binome à un exposant irrationnel; la démonstration développée à ce sujet nous a paru particulièrement simple. Ajoutons que cette étude de a^x est le préliminaire d'une théorie complète des logarithmes qui termine le Chapitre.

» Les fonctions circulaires, introduites au moyen de définitions purement algébriques, font l'objet du Chapitre V. L'auteur déduit des développements en série de $\cos x$ et de $\sin x$ toute la Trigonométrie. Il reproduit, pour prouver l'irrationalité de π, l'ingénieux procédé donné par Hermite dans son Cours de la Sorbonne. Les développements en produits infinis, en séries entières ou en séries de fractions simples des différentes fonctions circulaires sont obtenus avec rigueur et facilité. Un Paragraphe spécial renferme quelques indications sur les séries trigonométriques et l'exemple imaginé par Weierstrass d'une fonction continue non dérivable. Les fonctions circulaires inverses viennent ensuite, puis le calcul de π,

son évaluation approchée, et enfin les fonctions hyperboliques, généralement un peu négligées dans les Cours.

» La fonction gamma se rattache étroitement par ses propriétés à la fonction exponentielle et aux fonctions circulaires. La considération du produit $\pi(x)$ permet d'en exposer la théorie sans y faire intervenir la notion d'intégrale, grâce à l'emploi constant des séries; les raisonnements gagnent par là même en élégance et en uniformité. Dans le dernier Chapitre de son Traité, M. Godefroy, se plaçant à ce point de vue, établit sans peine les formules de Weierstrass, de Legendre, de Gauss, de Stirling et de Gudermann, ainsi que les développements en séries entières de $\log\Gamma(1+x)$ et de $\Gamma(1+x)$. Les démonstrations relatives aux séries de Binet et à la fameuse série de Stirling méritent d'attirer l'attention. Il y a lieu de remarquer aussi la forme nouvelle sous laquelle est présentée l'étude des fonctions de Prym et des transcendantes $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.

» Enfin de nombreux exercices bien appropriés, et dus presque tous à des mathématiciens connus, accompagnent chacun des Chapitres. A la suite de ces exercices se trouve un petit index bibliographique des plus utiles à consulter.... »

GEISSLER (K.). — Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. 1 vol. in-8°, VIII-417 pages. Leipzig, Teubner; 1902.

Le Livre de M. Geissler comprend deux parties : dans la première, qui va jusqu'à la page 297, l'auteur s'occupe successivement d'un certain nombre de questions où intervient la notion de l'infini. La plupart de ces questions sont de celles qui, dans les Traités modernes, sont suffisamment élucidées à l'aide de définitions précises, et n'offrent plus de difficultés mathématiques. Malgré l'intérêt philosophique qu'elles peuvent conserver, il semble qu'il eût été préférable de s'attaquer aux théories de M. G. Cantor sur les nombres transfinis, ou à celles de M. P. du Bois-Reymond sur les fonctions, théories dont l'importance

et la fécondité ne sont pas douteuses, qui ont apporté quelque chose de nouveau dans la conception de l'infini mathématique, et dont le rôle n'est certainement pas épuisé.

La seconde Partie, de la page 297 à la fin du Livre, est à la fois historique et philosophique. L'auteur y a inséré un dialogue. Quant aux théories philosophiques de M. Geissler sur la possibilité d'affecter les quantités mathématiques de divers ordres de grandeur, en sorte que le fini soit représentable par les sens, que les divers ordres d'infini soient supra-sensibles, ou infra-sensibles, il me faudrait, pour les discuter, être sûr de les bien comprendre, et je préfère me limiter à une critique qui ne touche que les mots et ne pénètre probablement pas jusqu'à la pensée de l'auteur; il ne semble pas que nos sens jouent un rôle essentiel dans la distinction entre le fini et l'infiniment petit ou l'infiniment grand. Nous connaissons les limites de nos sens; je suis bien certain de ne pas voir, avec mes yeux, un micron, de ne pas distinguer une mouche à un kilomètre. Il ne viendra à l'esprit d'aucun mathématicien de dire qu'un micron est un infiniment petit, ou qu'un kilomètre est un infiniment grand. C'est avec la raison que le mathématicien raisonne sur l'infini, ce n'est pas avec ses sens qu'il le voit ou qu'il le touche. En particulier, ce qui est négligable aux yeux du praticien n'est nullement l'infiniment petit du mathématicien.

Mais, encore une fois, cette critique est entièrement superficielle, et je ne suis pas sûr d'avoir entendu comme il faudrait les termes dont s'est servi M. Geissler : s'il s'agit seulement de la formation psychologique des notions d'infiniment petit et d'infiniment grand, le rôle de nos sens dans cette formation n'est pas douteux; et il est encore vrai que dans les applications pratiques on traite souvent les quantités négligeables comme des infiniment petits; mais, à ce degré de formation, ces notions sont troubles et confuses. C'est la raison seule qui les élucide, qui en fait vraiment un instrument mathématique.

KONEN (Dr H.). — GESCHICHTE DER GLEICHUNG $t^2 - Du^2 = 1$. Gr. in-8, 132 pages. Leipzig, Hirzel; 1901.

Cette monographie remonte à l'arithmétique grecque (cas de $D = 2$ traité par les pythagoriciens, problème des bœufs d'Archimède), expose la méthode « cyclique » des Hindous, explique ensuite sous quelle forme le problème fut posé par Fermat, discute la solution de Wallis et Brouncker, et les travaux consacrés par Euler au même sujet. L'auteur montre ensuite comment Lagrange retrouva la méthode hindoue et donna le premier la démonstration, demandée par Fermat, de la possibilité de solutions en nombre infini; comment Gauss transforma le problème par sa méthode des substitutions, comment enfin Dirichlet et Jacobi le rattachèrent à la division du cercle. Après avoir indiqué les quelques perfectionnements apportés depuis à la théorie, il s'arrête aux travaux de Kronecker.

Son étude, bien conçue et développée avec talent, me semble particulièrement intéressante comme exemple de l'utilité de l'histoire des Mathématiques. Déjà Euler et Lagrange ne pouvaient plus lire facilement Wallis; le premier ne reconnaît pas que la solution de ce dernier est générale (il n'y manque que la démonstration de l'exactitude du *diorisme* de Fermat, à savoir que le problème est possible toutes les fois que l'entier D n'est pas carré); le second n'y voit d'abord qu'un tâtonnement assez incertain, tandis que cette solution, sous une forme assez compliquée, il est vrai, procède effectivement par la détermination méthodique des éléments du développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue. L'un et l'autre, malgré leur génie, ont certainement perdu de bonnes heures, ce qu'ils eussent évité si le travail de Wallis eût été mis au point pour eux par quelque historien.

M. Konen a eu le courage au reste, dont il faut le féliciter, de dire l'équation de Fermat et non l'équation de Pell. Dès 1874, l'ouvrage posthume de Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik*, p. 208) avait singulièrement réduit le rôle de Pell; il n'aurait fait qu'exposer la solution de Brouncker et Wallis dans des notes ajoutées à une traduction faite en 1668, par l'anglais Brancker,

d'une algèbre allemande de Rahn. Mais M. Konen a fait une découverte assez piquante. Quoique Hankel qualifie l'Ouvrage en question de « vielgelesenem », M. Konen a eu beaucoup de peine à s'en procurer un exemplaire; il n'en a trouvé qu'un à Göttingue, et, quoique paraissant bien complet, cet exemplaire ne contient rien de relatif à l'équation $t^2 - Du^2 = 1$. De plus, sans aboutir, il est vrai, à une solution ferme, M. Konen a rendu très probable que Pell ne s'est jamais occupé de l'équation qui a porté son nom.

Il est constant, en effet, que c'est Euler qui, le premier, a employé l'expression de « Problema Pellianum », et que c'est son exemple qui a été suivi par tous ceux qui, depuis, ont eu l'occasion de parler du même sujet. Euler s'est d'ailleurs servi de cette désignation d'une façon de plus en plus déterminée, de 1730 à 1773. Mais dès le début (lettre à Goldbach du 10 août 1730), alors qu'il sait d'ailleurs très bien que le problème a été proposé par Fermat à Wallis, il semble croire qu'il ne l'avait été que sur des exemples particuliers, et il affirme d'autre part qu'une méthode spéciale pour les questions de ce genre a été imaginée par l'anglais Pell, et *que cette méthode est exposée dans les œuvres de Wallis.* Il faut admettre nécessairement qu'Euler ne fait pas ici allusion au *Commercium epistolicum*, mais bien au Chapitre XCVIII de l'*Algèbre* de Wallis (T. II. p. 418 de l'édition latine, 1693). C'est en effet de là qu'Euler a tiré, à peu près textuellement, pour l'insérer dans ses propres *Eléments d'algèbre*, la solution de Wallis, en la mettant sous le nom de Pell.

Or, dans le Chapitre en question, Wallis ne dit pas un mot de Pell, tandis que dans les précédents (Chap. LVII, LIX, LX, LXI, LXV) il fait de larges emprunts à l'*Algèbre* de Pell pour divers problèmes indéterminés. Au Chapitre LVII, il explique que cette *Algèbre* a d'abord été éditée en allemand, à Zurich, 1659, sous le nom de Rhonius (Rahn), qui avait été auparavant l'élève de Pell; qu'elle a été ensuite traduite en anglais par Th. Brancker M(agister) A(rtium), et à cette occasion revue et augmentée par Pell lui-même; il ajoute l'indication bibliographique complète comme si cet Ouvrage n'était pas suffisamment connu.

La conclusion est inéluctable : Euler a fait une étrange confusion. Qu'il se soit imaginé en feuilletant les œuvres de Wallis que

tout ce qui suivait le Chapitre LVII était emprunté à l'*Algèbre* de Pell, on ne peut le penser, car c'est avant le Chapitre XCVIII que Wallis parle des travaux de Newton, et en particulier au Chapitre XCV qu'il expose la méthode des fluxions.

Il faut donc qu'en lisant Wallis, Euler se soit pénétré de l'idée que Pell avait fait des travaux intéressants sur l'Analyse indéterminée, reproduits dans les Œuvres du professeur d'Oxford ; il faut qu'ayant fait l'extrait d'une méthode qui l'intéressait particulièrement, sans marquer que cette méthode devait être de Wallis, Euler ait ensuite cru qu'elle était de Pell, seulement parce qu'il savait que celui-ci avait traité d'autres problèmes indéterminés. Enfin il ne se sera jamais avisé de vérifier si cette croyance était justifiée.

M. Konen a, de son côté, commis une petite inadvertance, que je relève simplement parce que, si Euler l'avait commise également, elle aura peut-être contribué à son erreur. Page 33, note 1, ligne 12 en remontant, il dit que l'*Algèbre* de Rahn ou Rhonius avait été traduite en anglais par Brouncker, tandis que cinq lignes plus bas, reproduisant le titre de l'édition anglaise, il donne exactement le nom du traducteur Thomas Brancker, M. A. De plus, dans la *Namen-Verzeichnis* à la fin de son opuscule, M. Konen identifie les deux personnages « Brancker = Brouncker ». Cette identification est insoutenable. Le lord vicomte Brouncker s'appelait William, non Thomas, et ne s'est jamais affublé du titre de *maître ès arts* qui indique un professeur.

Je m'arrête également sur une difficulté historique que soulève M. Konen, et qui ne me paraît pas exister en réalité.

Il signale une contradiction entre ce fait que, dans sa lettre à Digby de juin 1658, Fermat reconnaît comme légitimes les solutions données par les Anglais pour son problème, et celui que, dans sa lettre à Carcavi d'août 1658, il qualifie ces solutions de *particulières*.

La même contradiction existe, d'après M. Konen, entre les louanges hyperboliques dont Frenicle comble Wallis au sujet de sa solution (lettre à Digby du commencement de mai 1658, traduite, *Œuvres de Fermat*, t. III, p. 592 et suiv.) et les réserves formulées dans la *Réplique anonyme au Commercium* (*Ib.*, p. 603), que cette dernière pièce soit de Frenicle ou de Fermat.

Sur le premier point, il me semble clair, d'après le contexte de sa lettre à Carcavi, que Fermat y constate seulement que la solution de Wallis ne comporte pas la démonstration qu'il demandait, ce en quoi M. Konen reconnaît parfaitement qu'il avait tout à fait raison. Si, l'année précédente, Fermat a admis comme légitimes les dernières solutions de Wallis, cela signifiait d'ailleurs seulement que les précédentes (en nombres fractionnaires) ne pouvaient être considérées comme telles. Une fois qu'on lui a envoyé des solutions en nombres entiers, et pour des exemples qui excluaient la possibilité de simples tâtonnements, Fermat, en répondant à Digby, fait le beau joueur: il n'insiste pas sur le manque de la démonstration demandée, il profite au contraire de l'occasion pour chercher à intéresser Wallis à d'autres questions de la théorie des nombres, dont il multiplie les énoncés.

Maintenant, en écrivant à Carcavi une lettre destinée, semble-t-il, à être montrée au moins à Pascal, ce qui l'obligeait à peser ses termes, Fermat avait-il le droit strict de qualifier de « particulières » des solutions obtenues par une méthode qu'il devait avoir reconnue comme « générale »?

Il me le semble, le *Commercium* était public, et tout mathématicien pouvait juger que la méthode de Wallis engageait de longs calculs sans avoir résolu préalablement la question de savoir s'ils aboutiraient, et sans donner la preuve subséquente qu'ils devaient aboutir. Or, c'est bien là le caractère d'une solution particulière. Il est vrai que la méthode de Wallis apparaissait en même temps comme conduisant nécessairement au résultat, si l'équation était possible (en dehors des valeurs particulières : $t = 1$, $u = 0$); mais cela ne suffit point.

Pour prendre, comme terme de comparaison, un exemple bien connu, il est certain que le procédé pour la recherche des racines entières d'une équation n'est bien qu'un procédé conduisant à des solutions particulières, quoique, s'il y en a, il les donne toujours et les donne toutes. C'est qu'on ne sait point, en dehors de l'application même de ce procédé, s'il aboutira à trouver une racine entière; en un mot, pour employer le langage des géomètres grecs, il n'y a point de *diorisme*.

Quant à la *Réplique anonyme*, la réserve qui s'y trouve formulée n'a pas un autre caractère, et sous ce rapport cette *Réplique*

représente bien l'opinion de Fermat. Mais ce n'est pas un motif suffisant pour la lui faire attribuer, en présence des indices qui s'opposent à ce qu'il soit regardé comme le rédacteur de cette pièce. J'ai fait remarquer que Fermat y était désigné par l'expression « *amicus noster* » et Frenicle par l'initiale F. L'exagération des éloges donnés antérieurement à Wallis dans une lettre de Frenicle à Digby n'a d'importance que comme trait de caractère de Frenicle. Loin de pouvoir être invoquée contre l'attribution de la pièce à Frenicle, cette exagération même peut expliquer que ce dernier ait cru devoir prendre le masque de l'anonyme.

J'ajoute une dernière remarque concernant la façon dont les Pythagoriciens seraient arrivés à la détermination des nombres diamétraux et latéraux (c'est-à-dire aux solutions de l'équation $t^2 - 2u^2 = \pm 1$). L'exposé de Proclus dans son *Commentaire sur la République de Platon* (éd. Kroll, 1901, p. 24-29) peut bien, à la vérité, avoir été emprunté à Geminus ou à Adraste, c'est-à-dire à des auteurs du 1er siècle avant ou après Jésus-Christ. Mais entre ces auteurs et les premiers pythagoriciens, il y a eu toute une littérature pseudonymique qui a plus ou moins abusé la postérité.

Si l'on réfléchit que cette littérature a son origine et son modèle dans le *Timée* de Platon lui-même, il faut bien dire qu'il n'y a guère un témoignage ancien touchant les connaissances des anciens pythagoriciens qui puisse être accepté comme valable sans contrôle et sans réserves. Dans le cas particulier, celui de Proclus est certainement intéressant, mais je ne puis guère lui attribuer aucune valeur historique.

PAUL TANNERY.

BOCCARDI (J.). — GUIDE DU CALCULATEUR (Astronomie, Géodésie, Navigation, etc.). Première Partie : RÈGLES POUR LES CALCULS EN GÉNÉRAL. In-4°, 78 pages. Deuxième Partie : RÈGLES POUR LES CALCULS SPÉCIAUX. In-4°, 145 pages. Paris, A. Herman; Catane, J. Pastore, 1902.

J'imagine que beaucoup de mathématiciens voudront lire ce Livre de M. Boccardi; les uns, qui pratiquent le Calcul numérique, pour confirmer ou infirmer leurs méthodes et leurs habi-

tudes : les autres, qui le pratiquent peu, pour connaître un art dont ils savent la théorie, mais non les secrets, et je crois que tous ceux qui le liront y trouveront plaisir et profit. M. Boccardi a fait beaucoup de calculs numériques ; il n'est pas le seul, assurément, mais il *s'est regardé calculer,* ce qui est plus rare ; il a jugé ses habitudes, et il sait en rendre compte ; il ne se contente pas de dire que telle méthode, telle disposition, telle table numérique est plus commode qu'une autre, ou plus sûre ; il sait expliquer en quoi et pourquoi cette méthode, cette disposition, cette table, sont plus commodes et plus sûres. Comme beaucoup de calculateurs, il a fait, chemin faisant, bien des remarques ingénieuses ; il a recueilli et classé ces remarques, et il en fait part au lecteur, qui s'étonne parfois de n'y avoir jamais pensé. Ceux qui enseignent les Mathématiques, en particulier, liront avec grande utilité la première Partie de son *Guide* ; sans doute, ils n'auront guère à faire exécuter à leurs élèves des calculs aussi compliqués que ceux dont traite l'auteur ; mais ils trouveront dans ce Guide matière à penser, et peut-être quelques-unes de leurs réflexions persuaderont-elles leurs auditeurs qu'on peut, au moins dans la préparation d'un calcul, mettre quelque intelligence ; si ceux-ci arrivent à ne pas mépriser un art dont la valeur pratique est indiscutable, le bénéfice ne sera pas médiocre.

La première Partie est divisée en trois sections : avant les Calculs ; dans le cours des Calculs ; après les Calculs. C'est la première qui est la plus importante ; l'auteur traite avec détail de la disposition des calculs. A signaler, en particulier, la critique de certains types de calcul recommandés officiellement. Les trois Chapitres consacrés aux Tables numériques, et en particulier aux Tables de logarithmes, sont fort intéressants ; les Tables les plus usuelles y sont passées en revue et y sont critiquées l'une après l'autre, dans leurs avantages et leurs inconvénients : l'auteur montre comment on peut en tirer le meilleur parti. A signaler aussi l'étude des logarithmes de Gauss. L'opinion de M. Boccardi sur les machines à calculer mérite d'être citée ; pour que leur emploi, par les astronomes, se généralisât, il faudrait d'une part que l'on publiât de bonnes Tables des valeurs naturelles des fonctions trigonométriques, avec les différences et les parties proportionnelles ; d'autre part, il

conviendrait que les machines fussent *réduites*, de manière à donner non pas, par exemple, la valeur exacte d'un produit, mais les premiers chiffres; il n'y a pas intérêt, d'ordinaire, à dépasser le degré d'exactitude que donnent les bonnes Tables de logarithmes.

La seconde Section est un recueil de conseils à suivre pendant que l'on calcule ; l'auteur ne néglige rien, ni le format des feuilles, ni les bandes mobiles sur le bord desquelles on écrit les nombres qu'on aura plusieurs fois à employer, ni ce qui concerne l'arrondissement des chiffres auxquels on s'arrête, ni la règle « festina lente ».

La dernière Section concerne les *vérifications :* les remarques de l'auteur sur les qualités d'une bonne formule de vérification, en particulier sur sa *sensibilité*, sur la façon dont elle dénote les *petites* erreurs, semblent très judicieuses. On lira enfin avec intérêt le dernier Chapitre, consacré à cette *recherche des erreurs* qui cause tant d'énervement au calculateur non exercé, et qui, dit-on, donnait tant de plaisir à Gauss, lorsqu'il avait la satisfaction de trouver la cause de son erreur dans une Table dont il s'était servi.

La seconde Partie du Livre de M. Boccardi intéresse particulièrement les Astronomes; aussi, après avoir signalé les Chapitres qui concernent la construction des Tables numériques et l'application de la méthode des moindres carrés, ainsi que le Chapitre final relatif à divers Calculs de Géodésie, me contenterai-je d'extraire du *Bulletin astronomique* [1] quelques lignes concernant le gros morceau du Livre, la détermination des orbites.

« L'auteur donne toutes les explications nécessaires au sujet des constantes de Gauss, au passage des coordonnées équatoriales, aux elliptiques et *vice versa*, de même qu'aux éléments équatoriaux et elliptiques des orbites. Entre autres choses, il donne la signification géométrique des constantes de Gauss, et montre le peu de valeur de quelques formules de contrôle. Viennent ensuite le calcul des éphémérides et la réduction des observations. Relativement au problème fondamental de la détermination d'une

[1] T. XIX, 1902, p. 387.

première orbite de petite planète au moyen de trois observations, l'auteur recommande aux débutants la méthode de Gauss-Encke, un peu plus longue que les autres, mais d'une simplicité remarquable. La variation des distances est traitée même pour le cas où l'on tient compte des perturbations ; mais l'auteur pense que, dans ce cas, l'emploi des coefficients différentiels est préférable. La correction d'une orbite au moyen de coefficients différentiels prend 21 pages. L'auteur applique à la même planète la méthode d'Oppolzer et la méthode plus simple de Tietjen. Il est vraiment étonnant de voir que, après de très longs développements des calculs, on arrive *identiquement* aux mêmes éléments corrigés. C'est un vrai tour de force, qui témoigne de l'habileté du calculateur. Pour le calcul des perturbations spéciales, M. Boccardi recommande l'emploi de la variation des constantes. Il donne les types de calcul relativement aux méthodes d'Oppolzer et de Tietjen....

» L'Ouvrage de M. Boccardi est conçu dans un esprit de réaction. En Italie, il paraît que la jeunesse des Facultés se passionne trop pour les abstractions, au détriment de l'esprit pratique. M. Boccardi craint, avec raison, que l'excès d'abstraction ne fausse l'esprit scientifique des étudiants. L'Italie est le seul pays où un Mémoire d'Astronomie, de Mécanique céleste ou de Géodésie n'est pas accepté comme thèse de Doctorat.

» Il y a là une anomalie d'autant plus singulière que partout l'on s'efforce de resserrer les liens de la Science pure et des applications. L'étude approfondie de la Nature n'a pas cessé d'être, comme le disait Fourier, la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

SNYDER (V.) et HUTCHINSON (J.-I.). — DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS. 1 vol. in-8°, XVI-320 pages. New-York, American Book Company.

Le Livre que publient MM. Snyder et Hutchinson est destiné à des commençants : il est rédigé d'une façon claire et attrayante.

Si, dans quelques démonstrations, les auteurs se croient obligés de laisser une difficulté de côté, il le disent habituellement : du moment que le lecteur est averti, cela n'a pas d'inconvénient. En outre, les exercices, choisis et gradués avec soin, abondent. L'étudiant qui aura bien compris ce petit Livre, qui aura résolu les problèmes qu'il contient, sera à même de traiter bien des applications, ou, s'il le veut, d'aborder l'étude de Cours plus abstraits et plus savants.

BACHMANN (P.). — NIEDERE ZAHLENTHEORIE. Erster Teil. T. X de la *Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*. 1 vol. in-8°, x-402 pages. Leipzig, Teubner; 1902.

M. Bachmann était certainement désigné, par le genre de travaux auxquels il a consacré sa vie, à écrire dans la collection de M. Teubner ce petit Livre sur ce qu'on appelle en Allemagne la « *Niedere Zahlentheorie* ».

Après une intéressante introduction historique, où l'on voit les germes de la théorie des nombres apparaître chez les Pythagoriciens et chez Euclide, se développer chez Diophante, chez les Indiens et les Arabes, commencer de fleurir avec Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, devenir enfin dans les *Disquisitiones* de Gauss une véritable doctrine qui, depuis un siècle, s'est encore singulièrement développée, l'auteur aborde son sujet en discutant la notion des nombres entiers, fondée sur la notion d'ensemble ou de pluralité (*Mehrheit*), de pluralités semblables (*Aehnliche Mehrkeiten*) et de section (*Abschnitt*), de manière à bien lever la difficulté relative à la distinction entre les ensembles finis et infinis et à faire ressortir le caractère fini du nombre naturel. Ce même Chapitre contient la théorie des opérations fondamentales et l'introduction des nombres négatifs et nuls.

L'auteur établit ensuite les théorèmes fondamentaux de la divisibilité en se fondant sur la notion de *module*. C'est peut-être en effet la façon la plus philosophique de présenter les choses. Signalons un intéressant Paragraphe sur la détermination de la plus

haute puissance d'un nombre premier qui entre dans une factorielle. Après avoir traité des congruences et des principales propriétés de la fonction $\varphi(n)$, l'auteur s'occupe d'une manière détaillée de l'algorithme d'Euclide, et d'algorithmes analogues, des fractions continues, des suites de Farey, de ces suites qu'on peut en tirer pour approcher d'un nombre rationnel ou irrationnel w, auxquelles MM. Christoffel et Hurwitz ont donné le nom de *caractéristiques* du nombre w, des suites $(r, s)_p$ de Stern dont la première est formée des nombres r, $r+s$, s, et dont chacune se déduit de la précédente en intercalant leur somme entre deux termes consécutifs, enfin d'une fonction numérique liée à ces suites, et qu'Eisenstein a utilisée dans ses recherches sur la généralisation de la loi de réciprocité. Il passe ensuite à l'étude des théorèmes de Fermat et de Wilson et de leurs conséquences, puis à celle des restes quadratiques et de la loi de réciprocité. Ce Chapitre, par la beauté propre du sujet, les renseignements historiques, par l'étude minutieuse des nombreuses démonstrations qui y sont rappelées, dont M. Bachmann fait ressortir les différences et les rapprochements, est l'un des plus instructifs et des plus intéressants du Livre [1]. J'emprunte à l'auteur le Tableau chronologique des démonstrations de la loi de réciprocité. Les indications contenues dans la dernière colonne, I., FQ., C., DC., GL., P., veulent dire Induction, formes quadratiques, congruences d'ordre supérieur, division du cercle, lemme de Gauss, permutations, et se rapportent à l'ordre d'idées où se sont placés les auteurs.

1.	Gauss. —	1re	démonstration,	*Disqu. Ar.*, art. 135, 1901, 1796..	I.
2.	»	2e	»	art. 257, 1801	FQ.
3.	»	7e et 8e	»	*W.*, t. II, 1801, p. 233	C.
4.	»	3e	»	*Comm. Gott.*, t. XVI, 1808; *W.*, t. II, p. 1	GL.
5.	»	4e	»	*Comm. Gott.* rec., t. I, 1809; *W.*, t. II, p. 9	DC.
6.	»	5e	»	*Comm. Gott.* rec., t. IV, 1808; *W.*, t. II, p. 47	GL.

[1] Il convient de citer le travail historique de M. Baumgart : *Ueber das quadratische Reciprocitäts Gesetz*, dans la partie historique de la *Zeitschrift Mathematik. u. Physik.*, 1885, p. 169.

7. Gauss. — 6e démonstration, *Comm. Gott.* rec., t. IV, 1808; *W.*, t. II, p. 47 ..... DC.
8. Cauchy. — *Bull. Férussac*, t. XII, 1829, p. 205 ..... DC.
9. Jacobi. — *Journ. f. Math.*, t. XXX, p. 72; *cf.* t. XXXV, p. 273 ..... DC.
10. Eidenstein. — *Journ. f. Math.*, t. XXVII, 1844, p. 322 ..... DC.
11. » » t. XXVIII, 1844, p. 41 ..... DC.
12. » » t. XXVIII, 1844, p. 246 ..... GL.
13. » » t. XXIX, 1845, p. 257 ..... DC.
14. Liouville. — *Journ. de Math.*, t. XII, 1847, p. 93 ..... DC.
15. Lebesgue. — *Journ. de Math.*, t. XII, 1847, p. 457 ..... DC.
16. Schaar. — *Bull. Belgique*, t. XIV (I), 1847, p. 79 ..... GL.
17. Genocchi. — *Ac. R. Belg. mém. cour.*, t. XXV, 1853 ..... GL.
18. Lebesgue. — *C. R.*, t. LI, 1860, p. 9 ..... C.
19. Kummer. — (Deux démonstrations) *Abh. Berl. Ak.*, 1861 ..... FQ.
20. Stern. — *Gött. Nachr.*, 1870, p. 237 ..... GL.
21. Zeller. — *Berl. Monats.*, 1872, p. 846 ..... GL.
22. Zolotareff. — *Nouv. Ann. de Math.*, 2e série, t. XI et XVIII, p. 354 ..... P.
23. Kronecker. — *Berl. Monats.*, 1876, p. 301 ..... I.
24. Bouniakowsky. — *Bull. soc. Pét.*, t. XXII, 1876 ..... GL.
25. Schering. — *Gött. Nachr.*, 1877, p. 217 ..... GL.
» *C. R.*, t. LXXXVIII, p. 1073 .....
26. Petersen. — *Amer. Journ.*, t. II, 1879, p. 217 ..... GL.
» *Zeuthen Tidskr*, 1879, p. 86 .....
27. Voigt. — *Zeitschr. f. M. u. P.*, t. XXVI, 1881, p. 134 ..... GL.
28. Busche. — Dissertation, *Göttingen*, 1883 ..... GL.
29. Kronecker. — *Berl. Sitz.*, 1884, p. 645 ..... GL.
30. Gegenbauer. — *Wiener Ber.*, 1884, p. 1026 ..... GL.
» » 1885, p. 876 .....
31. Kronecker. — *Berl. Sit.*, 1885, p. 117 ..... GL.
32. » » 1885, p. 383, 1045 ..... GL.
33. Hermes. — *Arch. f. Math. u. P.*, 2e série, t. V, 1887, p. 190 .. I.
34. Lerch. — *Teixeira Journ.*, 1887, p. 157 ..... GL.
35. Busche. — *J. f. Math.*, t. CIII, 1888, p. 118 ..... GL.
36. » » t. CVI, 1890, p. 65 ..... GL.
37. Lucas. — *Bull. St Pét.*, nouv. sér., t. I, 1890 ..... GL.
» *Ass. fr. Limoges*, t. XIX, 1890 .....
38. Franklin. — *Mess. of Math.*, 2e série, t. XIX, 1890, p. 176 .... GL.
39. Field. — *Amer. Journ.*, t. XIII, 1891, p. 189 ..... GL.
40. Gegenbauer. — *Wiener Ber.*, t. C, 1891, p. 855 ..... GL.
41. Schmidt. — *J. f. Math.*, t. CXI, 1893, p. 107, 1re démonstr. ... GL.
» » 2e » ... GL.
» » 3e » ... GL.
42. Gegenbauer. — *Wiener Ber.*, t. CIII, 1894, p. 285 ..... GL.

43. Bang. — *N. Tidskr for Math.*, t. VB, 1894, p. 22..... I.
44. Busche. — *Hamburger Mitt.*, III, t. VI, 1896, p. 253..... GL.
45. Lange. — Trois démonstrations. *Leipzig Ber.*, t. XLVIII, 1896, p. 629..... GL.
t. XLVIII, 1897, p. 607..... GL.

A cette longue liste s'ajoutent encore une démonstration de M. J. König, parue dans le Tome XXII des *Acta mathematica*, et une de M. E. Fischer, parue dans le *Monatsheft für Math. und Phys.*, 11e année, p. 176, qui ont été signalées à l'auteur pendant que son Livre était en cours d'impression. On pourrait encore lui adjoindre bien des remarques qui, sans constituer une démonstration proprement dite, ne laissent pas d'avoir leur importance.

Le dernier Chapitre se rapporte aux congruences d'ordre supérieur, en particulier à la théorie des congruences binomes et à diverses théories connexes, comme celle des *indices* et les propositions concernant les fractions décimales périodiques, puis aux congruences suivant un module premier p et à la décomposition en facteurs premiers (mod. p), aux congruences suivant un système de modules formé d'un nombre premier p et d'un polynome $P(x)$ premier (mod. p), enfin aux imaginaires de Galois. Il se termine par la septième preuve de Gauss de la loi de réciprocité.

LEBESGUE. — Intégrale, longueur, aire (Thèse).

Le beau travail de M. Lebesgue se rapporte aux points les plus délicats de la théorie des fonctions de variables réelles. M. Lebesgue définit d'abord ce que l'on peut entendre par mesure d'un ensemble, et compare sa définition avec celle qui a été donnée par divers géomètres, notamment par M. Jordan et par M. Borel. Cette notion acquise d'abord pour un ensemble de points en ligne droite est étendue aux ensembles dont les éléments sont les points d'un plan. Une application de ces généralités est faite au problème des aires planes, qui n'est possible que si l'on considère des do-

maines dont la frontière est de mesure superficielle nulle; la frontière d'un domaine peut ne pas jouir de cette propriété, puisqu'il existe, comme on sait, des courbes passant par tous les points d'un carré.

Le second Chapitre est consacré aux intégrales; l'auteur y donne une définition différente de celle de Riemann et de M. Darboux, et la notion à laquelle il arrive de fonction *sommable* est plus générale que celle de fonction *intégrable*. Une fonction définie dans un intervalle (α, β) est dite *sommable* par M. Lebesgue si, quels que soient a et b, l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles

$$a < f(x) < b,$$

est mesurable; il existe des fonctions sommables qui ne sont pas intégrables. L'étude des intégrales indéfinies et fonctions primitives est alors développée.

Ici encore il faut apporter la plus grande attention dans l'examen des théorèmes classiques. Comme il existe des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann, on ne peut pas nécessairement calculer les fonctions primitives à l'aide de l'intégration au sens ordinaire. La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la dérivée d'une fonction dérivable existe, est que cette fonction soit à variation bornée; s'il en est ainsi, la fonction est l'une des intégrales indéfinies de sa dérivée. Les résultats obtenus pour une variable sont étendus aux fonctions de plusieurs variables.

Les Chapitres suivants traitent d'applications géométriques relatives aux longueurs des courbes et aux aires des surfaces. L'auteur retrouve d'abord, en se plaçant à un autre point de vue, les résultats classiques de M. Peano et de M. Jordan sur les courbes rectifiables. La question des aires est beaucoup plus délicate. Après avoir discuté les définitions données antérieurement et montré pourquoi elles ne lui paraissaient pas suffisantes, M. Lebesgue commence par définir ce qu'il appelle un arc *quarrable* de courbe plane ou gauche, et il se restreint au problème des aires pour les surfaces limitées par des courbes quarrables, celles-ci comprenant d'ailleurs, comme cas particuliers, les courbes rectifiables. La plus petite limite des aires des surfaces polyédrales

qui tendent vers une surface donnée est dite l'*aire intérieure* de la surface; cette limite existe bien, et la surface est alors dite *quarrable*, quand elle est limitée par des courbes quarrables. Une classe particulière de surfaces quarrables est formée par les surfaces rectifiables; M. Lebesgue en fait une étude approfondie. Sans résoudre toutes les questions soulevées, ce Chapitre apporte une importante contribution à des questions extrêmement délicates.

Les deux derniers Chapitres traitent de problèmes particuliers qui reposent des généralités dont nous venons de donner une analyse rapide. L'étude des surfaces applicables l'une sur l'autre, qui occupe le cinquième Chapitre, se présente tout autrement que dans la théorie classique, si l'on ne fait pas les hypothèses habituelles relatives à l'existence de certaines dérivées. Pour M. Lebesgue, deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, s'il y a entre elles une correspondance biunivoque telle qu'à toute courbe rectifiable de la première corresponde sur l'autre une courbe de même longueur. A ce point de vue très général, une surface peut être applicable sur un plan sans être une surface réglée; l'auteur donne plusieurs propositions de ce genre fort curieuses par leur aspect paradoxal. Citons encore celle-ci : il y a des courbes gauches ayant en tout point un plan osculateur et dont les tangentes forment une surface non applicable sur un plan, et mentionnons seulement la recherche des surfaces de révolution applicables sur un plan.

Le dernier Chapitre est consacré au problème de Plateau, ou du moins au problème qui porte ce nom, quand il s'agit de surfaces ayant des plans tangents et des rayons de courbure principaux, mais il ne s'agit pas ici nécessairement de telles surfaces. Soit dans l'espace une courbe fermée C. M. Lebesgue appelle l'aire minima de C la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont les frontières tendent vers C; il démontre l'existence d'une surface S ayant pour frontière le contour C et pour aire intérieure l'aire minima de C. La surface S est en un sens une surface minima, mais rien n'autorise actuellement à la ranger parmi les surfaces auxquelles on donne habituellement ce nom. Il n'est pas certain que la surface S satisfasse à l'équation classique des surfaces minima, ni même qu'elle ait des plans tangents, mais le

résultat de M. Lebesgue n'en est pas moins très digne d'être noté et ne peut manquer de contribuer, pour le cas où elle existe, à la solution d'un problème justement célèbre. Il termine très bien cette thèse remarquable où l'auteur montre une grande puissance d'abstraction en même temps que le souci d'appliquer les généralités à des problèmes particuliers. E. P.

LUTKEMEYER. — Ueber den analytischen Character der Integrale von partiellen Differentialgleichungen. Inauguraldissertation, 50 pages. Göttingen, 1902.

Il est un fait remarquable du domaine de l'Analyse sur lequel l'attention s'est portée récemment ; c'est qu'il existe des équations aux dérivées partielles dont toutes les solutions sont nécessairement des fonctions analytiques ; c'est-à-dire des fonctions représentables par des séries de puissances des variables indépendantes.

L'exemple le plus anciennement connu et le plus important d'ailleurs est celui de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

M. Picard a démontré autrefois que la propriété précitée appartient aussi aux intégrales de l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\Delta u = a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u$$

où $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ sont des séries de puissances des variables x et y, et ce résultat a été établi autrement par M. Hedrick dans sa dissertation inaugurale (1901). Le même fait a lieu pour les intégrales de l'équation

$$\Delta u = e^u,$$

que l'on peut ramener à la forme linéaire ; mais la méthode de M. Hedrick (*loc. cit.*) n'est pas susceptible de généralisation et n'est pas applicable, par exemple, à l'équation

$$\Delta u = e^u + e^{-u}.$$

Les équations linéaires ont tout dernièrement été étudiées par MM. Sommerfeld et Hilbert ([1]). La méthode de ces savants repose sur une certaine représentation des solutions de l'équation linéaire, obtenue en s'appuyant sur une généralisation des théorèmes de Green; la réciproque du théorème de Cauchy relatif au cas de deux variables complexes fournit ensuite le résultat cherché. Leur démonstration suit une marche exactement analogue, parallèle pour ainsi dire, à celle relative à l'équation harmonique; mais ce procédé ne peut pas être étendu au delà du domaine des équations linéaires, car les théorèmes de Green ne sont plus susceptibles alors de généralisation.

M. Picard ([1]) avait auparavant donné, comme je l'ai dit plus haut, une tout autre méthode pour démontrer le caractère analytique des solutions des équations linéaires aux dérivées partielles. M. Picard se sert d'une méthode d'approximation, employée par M. Schwartz dans un cas particulier, mais qu'il a essentiellement généralisée et étendue. L'auteur lui donne le nom de *méthode de Schwartz et Picard*. Les approximations successives ont la forme $\Delta u_1 = 0$ et $\Delta u_i = f_i(x, y)$, $(i = 2, 3, 4, \ldots)$, les $f_i(x, y)$ désignant des séries de puissances de x et y; la solution de l'équation linéaire est

$$u = u_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots.$$

M. Picard transforme les solutions des approximations successives en séries trigonométriques et forme par leur moyen la série trigonométrique représentant u. La forme de cette série permet de reconnaître que u est effectivement une fonction analytique de x et y.

Le sujet de la remarquable thèse de M. Lutkemeyer est le suivant : Les équations les plus générales du type dit *elliptique*, telles que

$$\Delta(u) = F(u), \qquad \Delta(u) = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

([1]) A. Sommerfeld, *Randwertaufgabe für partielle Differentialgleichungen* (*Math. Encyclopädie*, t. II, p. 4). D. Hilbert, *Vorlesung über lineare partielle Differentialgleichungen*; 1901.

([1]) E. Picard, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1890 et *Acta Mathematica*, t. XXV).

où F est une fonction analytique, ont-elles pour solutions des solutions toutes analytiques?

L'auteur étudie cette question dans tous ses détails; il arrive au but par une généralisation des méthodes de M. Picard. Il met ainsi en évidence que les équations du type hyperbolique, telles que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

ont pour intégrales des solutions dont le caractère intime est tout opposé à celui des équations du type elliptique. Les résultats obtenus par l'auteur permettent de résoudre quelques problèmes très importants de la théorie des surfaces. Ce n'est pas ici le lieu de développer les méthodes; contentons-nous d'en citer quelques intéressants résultats. M. Lutkemeyer résout les problèmes posés par M. Hilbert dans le Chapitre XIX de sa Conférence, devant le Congrès international de 1900 (¹). Il démontre ce théorème :

Toutes les surfaces à courbure positive constante sont nécessairement des surfaces analytiques.

En effet, la détermination de toutes les surfaces à courbure positive constante dépend de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{e^{-u} - e^{u}}{2}.$$

L'on sait qu'à toute solution de cette équation correspondent deux surfaces à courbure positive constante. Si ces solutions sont toutes analytiques, il en sera nécessairement de même des surfaces. Or, M. Lutkemeyer démontre qu'il en est ainsi dans le cas plus général

$$\Delta(u) = F(u)$$

où $F(u)$ désigne une fonction analytique. Le théorème est donc démontré.

L'auteur étudie ensuite le cas des surfaces pseudo-sphériques non analytiques, représentées par des fonctions non analytiques,

---

(¹) Voir *Compte rendu du deuxième Congrès*, etc. Gauthier-Villars, p. 101 à 103. Comparer HILBERT, *Ueber Flächen von constanter Gauss'chen Krummung* (*Transactions of the American Math. Soc.*, vol. II, p. 87 et 99, janv. 1901).

mais cependant continues et susceptibles de différentiation successive. La question est naturellement plus difficile et plus compliquée. Il étudie même l'exemple de surfaces pseudo-sphériques où la fonction n'est susceptible que d'un nombre limité de différentiations, et où même elle n'en admet aucune.

Il fait usage, dans ce dernier cas, de l'exemple célèbre de Weierstrass où l'on a

$$x_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos a^n \pi x$$

$$\left[0 < b < 1,\ a > 0,\ a \equiv 0 \pmod 4,\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\right].$$

L'on sait ce que M. Hilbert entend par problèmes *réguliers* du calcul des variations. Ce sont les problèmes définis par la formule

$$\iint F(p, q, z; x, y)\, dx\, dy = \text{minimum}$$

et où pour tous les arguments considérés doit avoir lieu l'inégalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 = 0,$$

F étant une fonction analytique. Les principaux problèmes de ce genre sont ceux que l'on rencontre dans les applications du calcul des variations à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique mathématique. Voici alors le beau théorème que M. Lutkemeyer inspiré par M. Hilbert (*loc. cit.*, p. 102-103) démontre dans sa Thèse :

Les équations aux dérivées partielles de type elliptique qui proviennent d'un problème régulier du calcul des variations ont nécessairement des solutions toutes analytiques.

Le caractère des équations hyperboliques est tout différent, comme on le voit de suite par l'exemple des surfaces pseudo-sphériques, et en voici la raison. Dans le cas des équations elliptiques, les caractéristiques sont imaginaires. Dans le cas des équations hyperboliques les caractéristiques sont réelles et les propriétés de la fonction, telles que la continuité et le caractère analytique, se transmettent pour ainsi dire tout le long des caractéristiques.

Voici la Table des matières de cette belle Thèse :

INTRODUCTION.

CHAPITRE I. — *De la représentation des fonctions analytiques de deux variables au moyen de séries trigonométriques.*

1. Théorèmes de Harnack.
2. Du caractère des intégrales de $\Delta u = 0$ et de $\Delta u = f(x, y)$.
3. Lemmes relatifs à certains coefficients.

CHAPITRE II. — *Des surfaces à courbure constante positive ou négative.*

4. Énoncé du problème. Méthodes de MM. Schwarz et Picard. Méthode des séries trigonométriques.
5. Les solutions de $\Delta(u) = F(u)$ sont uniformes.
6. Une méthode de représentation des surfaces pseudo-sphériques non analytiques.

CHAPITRE III. — *Des équations aux dérivées partielles du type elliptique et hyperbolique.*

7. De l'équation $\Delta(u) = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right)$.
8. Du caractère des solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right).$$

L. L.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

KOLL (O.). — *Die Theorie der Beobachtungsfehler u. die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie u. die Wassermessungen.* 2e édition. In-8°, XII-323 et 31 p. Berlin, Springer. 10 m.; relié, 11 m. 50 pf.

MÜLLER (F.). — *Mathematisches Vocabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enth. die Kunstausdrücke der reinenu. angewandten Mathematik.* 2e partie. In-8°. Leipzig, Teubner. Paris, Gauthier-Villars. Complet en 1 Volume relié, 20 m.

WEBER (H.). — *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen.* In-4°. Aufl. neu bearbeitet. II. (Schluss-)Bd. Gr. in-8° XI-527 p. avec figures. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 10 m.; relié, 11 m. 60 pf.

BUHL (A.). — *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe* (thèse). In-8°, 64 p. Paris, Naud.

GODEFROY (M.). — *La fonction Gamma. Théorie, Histoire, Bibliographie* (thèse). In-8°, VII-95 p. Paris, Gauthier-Villars.

HANCOCK (H.). — *Mémoires sur les systèmes modulaires de Kronecker* (Thèse). In-4°, 119 p. Paris, Gauthier-Villars.

JAHRBUCH *ueber die Fortschritte der Mathematik.* Herausgeg. von E. Lampe und G. Wahlenberg. 30. Bd. Jahrg. 1899. 1. Heft. Gr. in-8°, IV-432 p. Berlin, G. Reimer. 13 m. 60 pf.

PINCHERLE (S.). — *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche tenute nella R. Universita di Bologna, cura di A. Bottari.* In-8°. Bologne, Beltrami. 15 l.

BOUSSINESQ (J.). — *Théorie analytique de la chaleur.* 2 vol. gr. in-8°, avec fig. Tome I : *Problèmes généraux.* XXVII-333 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

PELLAT (H.). — *Cours d'électricité.* T. I : *Electrostatique, Lois d'Ohm, Thermo-Electricité.* In-8°, VI-330 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 10 fr.

ANNALES *de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse.* T. IV, renfermant une partie des travaux exécutés de 1891 à 1900 sous la direction de M. B. Baillaud. In-4°, 525 p. Paris, Gauthier-Villars.

CAPELLI (A.). — *Lezioni sulla teoria delle forme algebraiche.* In-8°. Naples, Pellerano. 10 l.

DANGER (R.). — *Surfaces et divisions de surfaces, Calculs trigonométriques, suivi d'une table des carrés des nombres de* 1 *à* 10000. In-16, 104 p. et planches. Paris, Vve Dunod. 4 fr. 50.

JAHRBUCH *ueber die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtmann.* Herausgeg. von E. Lampe und G. Wahlenberg. 30. Bd Jahrg. 1899. 2 Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 5 m. 60 pf.

KORN (A.). — *Abhandlungen zur Potentialtheorie.* 3 vol. gr. in-8°. Berlin, Dümmler. 1 m.

Contenu : Ueber die zweite u. dritte Randwerthaufgabe u. ihre Lösung. 56 p.

LANGHEINEKEN (P.). — *Das Potential einer materiellen Kugel, deren*

Dichtigkeit eine ganze rationale Funktion der rechtwinkeligen Koordinaten ist (Akad. Preisschrift). Gr. in-8°, III-59 p. avec fig. Leipzig, Engelmann. 1 m.

LEBON (E.). — *Traité de Géométrie descriptive et de Géométrie cotée.* 3e édit. In-8°, VI-280 p. Paris, Delalain frères. 5 fr.

LYNN (W.-T.). — *Remarkable Eclipses. Sketch of most interesting Circumstances connected with the Observation of solar and lunar Eclipses in ancient and modern times.* 6e édit. In-12. Londres, Low. 6 d.

SCHULTZ (H.). — *Rede am Sarge des Professors Dr. phil. Wilhelm Schur.* Gr. in-8°, 5 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 40 pf.

VIVANTI (G.). — *Teoria delle funzioni analitiche.* In-16. Milan, Hoepli. 3 l.

WASSMUTH (A.). — *Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeinen Coordinaten* (Sonderdr.). Gr. in-8°, 27 p. Vienne, Gerold. 60 pf.

BAULE (A.). — *Lehrbuch der Vermessungskunde.* 2e édition. Gr. in-8°, VIII-476 avec 280 fig. Leipzig, Teubner. 8 m. 80 pf.

BIANCHI (L.). — *Lezioni della teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* In-8°. Pise, Spoerri. 20 l.

BRIOSCHI (F.). — *Opere matematiche.* T. I. In-4°. Milano, Hoepli. 25 l.

CHARLOUIS (M.-D.). — *Handleiding bij de studie der integralrekening.* 1. gedlte. Gr. in-8°. Delft, Waltman jr. pro compl. à 3 stkn. 7 fl. 50 c.

HANDWÖRTERBUCH *der Astronomie,* herausgeg. von W. Valentiner. 26. Lfg. Gr. in-8°. Breslau, Trewendt. 3 m. 60 pf.

NOBLE (CH.-A.). — *Eine neue Methode in der Variationsrechnung.* (Dissert.) Gr. in-8°, 76 p. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 80 pf.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N° 122. In-8°. Leipzig. Engelman. Cart. 1 m. 80 pf.

Contenu : C.-F. Gauss, sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische Reste. Herausgeg. von E. Netto. 111 p.

Ibid. N° 123. In-8°. Cart. 2 m.

Contenu : J. Steiner. einige geometrische Betrachtungen. (1896.) Herausgeg. von R. Sturm. 125 p. avec fig.

PAPPERITZ (E.). — *Ueber die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie u. ihre Entwickelung bis zur systematischen*

Begründung durch Gaspard Monge. (Rectoratsrede.) Gr. in-8°, 24 p. Freiberg, Craz et Gerlach. 1 m.

SAMMLUNG Schubert. X. u. XI. Bd. 2. In-8°. Leipzig, Göschen.

X. Bd. W.-F. Meyer. Differential- u. Integralrechnung. 3. Bd. Differentialrechng. XVIII-395 p. avec 13 fig. Relié 9 m. — XI. Bd. J. Classen, Mathematische Optik. X-207 p. avec 52 fig. Relié 6 m.

FINGER (J.). — *Elemente der reinen Mechanik als Vorstudium für die analytische u. angewandte Mechanik u. für die mathemat. Physik.* 2e édition. Gr. in-8°, XIII-797 p. avec 210 fig. Wien, Hölder. 20 m.

BALL (Sir R.-S.). — *Story of the Sun.* 5e édition. In-8°, 388 p. avec 11 planches. London, Cassell. 10 sh. 6 d.

— *Story of the Heavens.* Rev. ed. Roy.-8°. 580 p. with 24 col. plates. Ebendas. 10 sh. 6 d.

BOURLET (C.). — *Cours de Mathématiques,* à l'usage des élèves architectes et ingénieurs. In-8°, III-249 p. avec fig. Paris, Naud.

JAHRESBERICHT *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Herausgeg. von R. Mehmke u. A. Gutzmer. T. X. 2e édition, 1re partie. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 5 m. 60 pf.

Contenu : H. Burkhardt, Entwickelungen nach oscillirenden Functionen. 1re partie. 176 p.

LONDON *Mathematical Society. Proceedings.* Vol. XXXIII. In-8°. London, Hodgson. 20 sh.

NETTO (E.). — *Lehrbuch der Combinatorik.* Gr. in-8°, VIII-260 p. Leipzig, Teubner. Relié 9 m.

NOUVELLES TABLES *de logarithmes à cinq décimales pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres de* 1 *à* 12000. In-8°, 221 p. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

ROST (G.). — *Theorie der Riemann'schen Thetafunction.* Gr. in-4°, IV-66 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 4 m.

STUDNICKA (F.-J.). — *Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe.* In-8°, 55 p. Prag, Rziwnatz. 1 m. 50 pf.

BALL (Sir R.-S.). — *The earth's beginning.* In-8, 392 p. avec fig. en couleurs. London, Cassell. 7 sh. 6 d.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

C. WOLF. — Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793. In-8°, XII–392 pages avec 15 planches. Paris, Gauthier-Villars.

« L'histoire de l'Observatoire que je me suis proposé d'écrire, dit M. Wolf au début de son Avertissement, n'est pas celle des travaux astronomiques qui ont été exécutés dans ce célèbre établissement : l'histoire céleste de l'Observatoire est bien connue. Il n'en est pas de même de l'histoire des bâtiments et de leurs transformations successives, des instruments qui y ont été employés, des astronomes qui les ont habités et du régime sous lequel ils ont vécu. C'est cette histoire purement terrestre, l'histoire du personnel et du matériel de l'Observatoire, que j'ai essayé de reconstituer. »

Peu de tâches ont été plus intéressantes que celle que s'est imposée M. Wolf; peu de livres sont plus attrayants et instructifs que le sien pour tous ceux qui s'intéressent au développement de la Science et qu'anime l'amour de notre pays. Exposer les origines d'un des plus importants établissements scientifiques du monde, indiquer par quelle suite d'efforts il a pu s'organiser et vivre, montrer combien modestes ont été ses débuts et difficiles ses progrès, rendre à ses directeurs la justice qui leur est due, notamment à son fondateur J.-D. Cassini et à son arrière petit-fils J.-D. Cassini IV, qui, à la fin du XVIIIe siècle, en mena à bonne fin la restauration, tel est le but que s'est proposé M. Wolf. Il est superflu de dire qu'il l'a pleinement atteint et que son Livre, œuvre d'historien, est écrit avec cet art et cette conscience qui caractérisent ses travaux antérieurs.

On sait que l'Académie des Sciences fondée en 1666 avait été installée, avec la Bibliothèque et le Cabinet des curiosités, dans une maison de la rue Vivienne appartenant au fils aîné de Colbert, abbé du Bec, plus tard archevêque de Rouen. C'est là que, jusqu'en 1699, les 16 académiciens et leurs aides tinrent leurs séances. Les astronomes Picard, Auzout, Buot, Huygens observaient dans

le jardin ainsi que dans les jardins du Louvre. Mais ces deux emplacements étaient bien mal choisis, et, dès 1665, Auzout se faisait l'interprète des besoins et des doléances des astronomes : « Il y va, Sire, de la gloire de votre Majesté et de la réputation de la France ». Cet appel devait être entendu, et Colbert accueillant avec empressement la proposition d'Auzout, fit entendre aux astronomes que, dès qu'ils auraient choisi un lieu propre aux observations, « il y serait construit un édifice qui non seulement surpasserait en grandeur, en beauté et commodité les observatoires d'Angleterre, de Danemarck et de Chine, mais, ce qui était tout dire, qui répondrait en quelque sorte à la magnificence du Prince qui le ferait bâtir ».

La dédicace dans laquelle Auzout faisait appel au Roi était de 1665; le 7 mars 1667 fut acheté, au nom du Roi, pour 6604 livres tournois, le terrain de neuf arpents sur lequel devait s'élever l'édifice de Perrault. La même année furent jetées les fondations, et dès 1668, était construit un mur de clôture. C'est le mardi 21 juin 1667, jour du solstice, qu'Auzout, Frénicle, Picard, Buot et Richer tracèrent une méridienne et mesurèrent à midi la hauteur du Soleil. En commémoration de cet événement fut frappée une médaille avec ces mots au revers : « Sic ♈ itur ♈ ad ♈ astra ♈ », et en exergue : « Turris, siderum. Speculatoria. MDCLXVII ». La construction particulièrement soignée, où il ne devait entrer ni fer ni bois, fut menée vite. Le gros œuvre était terminé en 1672 et le pavage de la terrasse supérieure en 1677. Les comptes arrêtés en 1683 montent à 714000 livres.

Ce n'était pas seulement un Observatoire qu'avait voulu ériger Colbert, mais un palais des Sciences plus spacieux, commode et durable que la maison de la rue Vivienne, et autour duquel pourraient être construits des logements pour les astronomes et les autres savants qui y seraient attachés. Et ce n'était pas seulement pour les Académiciens français : Colbert cherchait à attirer les savants les plus illustres de tous les pays. Huygens résida à Paris de 1666 à 1681. J.-D. Cassini, astronome déjà célèbre, professeur à Bologne, ingénieur du pape Clément IX, y arriva en 1669, et, en 1673, malgré les instances du pape et de l'Université de Bologne, accepta des lettres de naturalisation. Le 14 septembre 1671 il s'installait à l'Observatoire encore inachevé.

M. Wolf consacre les Chapitres II et IX à la description détaillée de l'Observatoire. Les plans primitifs de Perrault ont été brûlés dans l'incendie du Louvre en 1871. Mais la construction est conforme à ces plans sauf en ce qui concerne le second étage, où la grande salle carrée a été faite à la demande de Cassini qui aurait voulu arrêter les tours de l'est, de l'ouest et du nord, au premier étage, de façon que, de la grande salle carrée, on pût voir le ciel de tous côtés. Il voulait placer contre les murs quatre grands quarts de cercle capables de donner les secondes.

L'emplacement était des plus heureux, au milieu d'immenses jardins. Encore aujourd'hui, on en trouverait difficilement à Paris un meilleur. Napoléon Ier dans sa visite à l'Observatoire, avait eu l'idée de continuer, tout autour, la grande avenue des marronniers et de la prolonger jusqu'au boulevard extérieur. C'est surtout aujourd'hui que l'on doit regretter que ce plan grandiose n'ait pas été réalisé.

Quant au plan même de l'édifice, les critiques nombreuses et en apparence fondées, dont il a été toujours l'objet, sont, en fait, injustifiées. Perrault, en 1666, ne pouvait prévoir quelles transformations subiraient, peu d'années après, les instruments d'astronomie. C'est en 1668 que Picard observa pour la première fois des étoiles en plein jour; que, pour la première fois, il appliqua les lunettes aux cercles divisés. L'Observatoire une fois construit, rien ne s'est trouvé disposé pour recevoir les instruments nouveaux. On ne saurait, sans injustice, le reprocher à Perrault et à Cassini.

Les premiers logements concédés à l'Observatoire le furent à J.-D. Cassini dans les salles orientales du premier étage, et à son assistant Couplet, dans celles du rez-de-chaussée. Couplet eut le titre de concierge de l'Observatoire, chargé de la garde et de l'entretien des instruments de l'Académie : il eut aussi le titre de trésorier de l'Académie. Les titres ne correspondent pas toujours aux réalités. Couplet, trésorier, n'avait pas de fonds à garder; il dut même faire sur sa fortune personnelle des avances importantes dépassant 23000 livres, dont son fils, qui lui succéda, n'obtint qu'avec peine le remboursement. Ainsi Couplet rendit incontestablement service aux Sciences. En revanche il remplit bien peu son rôle d'assistant de Cassini qui, plus d'une fois, écrit sur ses

registres ces mots : *D. Couplet, qui me adjuvare debebat, abfuit.* Peut-être trouverait-on ailleurs des mentions analogues sur des registres d'Observatoires. Je ne résiste pas à l'envie de reproduire celle-ci, écrite par d'Aubuisson sur un registre de Toulouse en 1818 :

« M. P., aide pour les observations, m'a secondé dans plusieurs observations et plusieurs calculs; je lui ai confié l'Observatoire lorsque je suis parti pour Paris. J'ai plaidé pour lui auprès du grand maître, et croyais devoir m'intéresser à lui à cause de son travail; je l'avais logé à l'Observatoire. Mais plus il me devait de reconnaissance pour mes peines et mes complaisances, plus il s'est dispensé, sous les plus légers prétextes, de faire son devoir. J'ai cru devoir me plaindre auprès de M. L. qui me l'avait recommandé, afin qu'il rentrât dans l'ordre et qu'il fît quelque chose pendant mon absence, mais, dès que j'ai été parti, il n'a plus rien fait sous de mauvais prétextes. Sa conduite me fait présumer que ce sera un très mauvais sujet dans la suite. »

Le cas était bien différent de celui de Couplet qui négligeait l'Astronomie parce qu'il avait d'autres occupations, étant maître de Mathématiques des pages de la grande Ecurie. On pourrait faire bien des réflexions sur la situation matérielle qui a été si longtemps faite aux astronomes français. Couplet fils fut remplacé, comme concierge, par Maraldi; comme trésorier, par Buffon; Maraldi, en 1783, le fut par Méchain. Quant aux logements qui ont fini par envahir tout l'Observatoire, ils ont été attribués successivement à bien des astronomes parfois peu exigeants, tel logement se réduisant à une seule embrasure de fenêtre; leur réunion dans un même immeuble a donné lieu à des querelles bien curieuses.

On lit avec intérêt la description des divers étages et d'abord des caves, du puits qui y descend, la relation des expériences de Mariotte et Philippe de la Hire sur la chute des corps, l'installation dans ces caves des boussoles de Cassini, celle, en 1783, par Cassini IV et Lavoisier, d'un thermomètre qui existe encore.

Sur le pavé du premier étage, Cassini avait ébauché une méridienne que son fils Jacques traça de nouveau en 1712. Dans la tour de l'ouest, J.-D. Cassini avait fait tracer à l'encre, sur le pavé,

un planisphère terrestre représentant les résultats des nombreux voyages, organisés par l'Académie, pour la détermination des positions géographiques en tous lieux de la Terre. C'est dans la grande salle du second étage que fut, en 1729, construite sur le pavé, la méridienne en cuivre qui y existe encore, formée de 32 règles dont M. Wolf trouve la longueur 0,9927 identique à celle du pendule de Picard. Sur la terrasse on détermina à diverses reprises la vitesse du son. En 1784, puis en 1793, Cassini IV proposa d'y établir un canon pour annoncer l'heure de midi.

M. Wolf rapporte les visites royales que reçut l'Observatoire, celle de Louis XIV en 1682, du roi d'Angleterre Jacques II, en 1690. Pierre le Grand s'y rendit. Mais ni Louis XV, ni Louis XVI ne le visitèrent. Il est juste de dire que dans la seconde moitié du XVIIIe siècle les astronomes avaient, dans Paris, des observatoires particuliers : l'observatoire des Cassini était bien déchu de son ancienne splendeur.

Les Chapitres X, XI, XII sont consacrés à un inventaire des instruments. C'est avec un sextant de six pieds de rayon muni d'un limbe en cuivre et d'alidades à pinnules que fut déterminée la latitude le 21 juin 1667. C'est dans l'été de la même année que furent faits les premiers essais d'adaptation des lunettes aux cercles divisés. En 1678, Cassini employa un azimutal de Migon et une machine parallactique, véritable équatorial à mouvement d'horlogerie. Il importe de signaler aussi un projet dressé par Picard d'un instrument comprenant quatre lunettes pointées sur la polaire, dans quatre azimuts équidistants, et deux micromètres, et destiné à la détermination des inégalités de la polaire signalées par Picard, inégalités dont l'étude sur γ du Dragon a conduit Bradley à la découverte de l'aberration et de la nutation.

A côté de ces instruments destinés aux mesures précises s'introduisaient, par les encouragements de Colbert, les grandes lunettes destinées à la recherche d'astres nouveaux. J.-D. Cassini, à Rome, avait trouvé, au moyen d'un objectif de 17 pieds de foyer de Campani, la rotation de Jupiter et celle de Mars. A Paris le même objectif lui donna une durée de 27 jours pour la rotation du Soleil et en 1671 lui fit découvrir un satellite de Saturne; puis, en 1672, un objectif de 34 pieds lui en montra un autre. Campani fournit plus tard des objectifs de 80, 90, 100, 136 pieds

de foyer. Celui de 100 pieds révéla encore deux autres satellites de Saturne. M. Wolf reproduit une note bien intéressante, et probablement inédite, sur la manière d'observer aux grandes lunettes sans tuyaux. C'est pour ces lunettes que fut transportée à l'Observatoire, de 1685 à 1688, la tour en bois de Marly, de 120 pieds de hauteur. La carte de la Lune de Cassini, publiée en 1679, est le résumé des documents inscrits dans un atlas de 57 planches lunaires obtenues au moyen des objectifs à long foyer. Cependant 50 ans plus tard les astronomes étaient impuissants à voir ce qu'avait vu Cassini. On ne construisait les télescopes newtoniens qu'en petites dimensions. La comparaison des deux sortes d'instruments est intéressante. En 1723, Pound et Bradley trouvèrent qu'un télescope newtonien de 6 pouces d'ouverture et 5 pieds de foyer valait un objectif d'Huygens de 123 pieds; il donnait seulement un peu moins de lumière.

C'est en 1730, en 1742, en 1760 que furent construits, au pied de la tour orientale, trois cabinets d'observations pour divers quarts de cercle et pour un demi-cercle d'un pied de rayon pourvu de deux lunettes achromatiques. « L'observatoire de Cassini IV devint presque inutile et ne fut pour ainsi dire qu'un lieu de représentation ». En 1776 on refit ces cabinets qui déjà tombaient en ruines. Le matériel devenait de plus en plus pauvre, les nombreux instruments envoyés en mission au Pérou, en Laponie, aux passages de Vénus, n'étant généralement pas rentrés à l'Observatoire. L'un d'entre eux, un sextant de La Caille, acheté par cet astronome de ses deniers, emporté par lui au Cap, employé ensuite au Collège Mazarin, fut acheté par Lalande à ses héritiers, prêté en l'an II à Duc la Chapelle, à Montauban, puis, en 1814, déposé à l'Observatoire de Toulouse, d'où j'ai cru devoir le renvoyer à Paris avec le grand quart de cercle de Lalande et divers instruments provenant de l'ancien Observatoire de Toulouse; ces instruments sont déposés au Musée astronomique organisé par l'Amiral Mouchez en 1883.

Les Chapitres XIII, XIV, XV concernent le régime de l'Observatoire, de sa fondation jusqu'en 1793. Ces Chapitres sont des plus importants de l'Ouvrage. Comment un établissement, pour la construction duquel on avait fait de si grandes dépenses, qui devait être le centre du travail scientifique à Paris, a-t-il, pendant

un siècle, rendu relativement peu de services? Qui doit-on rendre responsable de cette situation? Les reproches que l'on a faits à J.-D. Cassini Ier sont-ils vraiment fondés? M. Wolf prend résolument sa défense et certes avec succès. L'Observatoire, pendant un siècle, n'a pas eu de directeur, et n'a guère eu un budget proprement dit. Le premier astronome qui ait reçu le brevet de directeur fut Cassini de Thury, Cassini III, en 1771, plus d'un siècle après la fondation de Colbert. Dans toute cette période, travaillait à l'Observatoire un peu qui voulait, et le monument se prêtant très mal à l'installation des instruments, par suite de la transformation complète des méthodes d'observations, due à l'adaptation des lunettes aux cercles divisés, les nombreux astronomes qui ont illustré l'Académie travaillaient ailleurs. Si Picard n'a pu installer son quart de cercle mural, cela a tenu à la difficulté de le construire et de faire mouvoir dans le méridien la lunette d'un grand quart de cercle. Si Roemer n'a pu établir sa lunette méridienne, cela a tenu à ce qu'il n'y avait aucun local où la placer. On a accusé J.-D. Cassini d'avoir préféré les découvertes faciles, que permettaient les grandes lunettes, aux travaux patients et difficiles qui sont l'honneur d'un observatoire, travaux dont Picard, dès le début, avait tracé le programme. L'examen des six registres d'observations de Cassini et de ses élèves montre que Cassini avait précisément imposé le plan de travail de Picard à ses élèves, et s'y était appliqué lui-même. On lui a reproché certaines opinions scientifiques erronées, oubliant qu'à cette époque bien des idées paraissaient paradoxales, qui sont aujourd'hui le fondement de la Science. On a attaqué son caractère : Arago dit qu'il s'est attribué fort légèrement l'honneur d'avoir dirigé la mesure de la Terre exécutée par Picard. Or J.-D. Cassini de 1683 à 1701 a mesuré l'arc de six degrés de Paris à Collioure et, dans son Mémoire, rend pleine justice à l'œuvre de Picard. Il est de tradition que ceux qui ont l'honneur de diriger, de faciliter les travaux des autres, s'effacent eux-mêmes et évitent de laisser entendre qu'ils y ont eu quelque part : Cassini n'était pas directeur et sa liberté était entière. Le témoignage de ses contemporains lui est assurément favorable. M. Wolf rappelle les termes si élogieux dans lesquels Fontenelle et l'abbé Bignon, président de l'Académie, ont parlé de lui, de sa modestie, de son caractère, de sa science.

M. Wolf donne la liste des astronomes et académiciens qui ont travaillé à l'Observatoire; parmi eux Roemer et Huygens et divers collaborateurs de J.-D. Cassini et de Ph. de la Hire pour le tracé de la méridienne. En 1669, un règlement crée trois places d'associés et trois d'élèves et crée deux adjoints pour chacune des six branches des Sciences auxquelles s'appliquait l'Académie; les deux adjoints d'Astronomie furent Lieutard et Delisle le cadet. En 1723 trois autres astronomes sont introduits, laissés à la nomination du président Bignon de l'Académie. Après 1732 divers astronomes sont employés à la méridienne. La Caille travaille à l'Observatoire de 1736 à 1742, puis s'installe au Collège Mazarin. En 1739 Le Monnier établit dans la tour de l'Ouest un instrument des passages peu stable et dans la tour de l'Est son quart de cercle de deux pieds. Nombre d'astronomes, ensuite, ne firent que passer; parmi eux on doit citer Jérôme de Lalande.

J.-D. Cassini, né en 1625, mourut en 1712. Son fils Jacques Cassini II, né en 1677, académicien en 1694, mourut en 1756. César-François Cassini de Thury vécut de 1716 à 1784, laissant le titre de directeur de l'Observatoire à J.-D. Cassini, Cassini IV, qui était né en 1748 et mourut en 1845. Il y eut un cinquième Cassini, Alexandre-Henri-Gabriel, né à l'Observatoire le 9 mai 1781, qui fut membre de l'Académie des Sciences, dans la section de Botanique, et mourut en 1832, sans postérité.

Non seulement l'Observatoire était, avec le temps, déserté des astronomes, qui trouvaient plus facilement des installations commodes ailleurs, mais le monument de Perrault se dégradait et, par suite des infiltrations d'eau que laissait passer le pavé de la terrasse supérieure, menaçait ruine. En 1765, Cassini de Thury demandait instamment la permission de faire l'avance des fonds nécessaires pour le réparer et le pourvoir d'instruments. Son Mémoire, qu'il eût été bien intéressant de connaître, n'a pu être retrouvé. M. Wolf donne la réponse de M. Marigny, directeur des bâtiments, en date du 24 août 1865; elle finit par ces lignes : « Si mes vœux étaient exaucés, Sa Majesté ne bornerait pas la récompense d'une si belle action à vous accorder la place de directeur de l'Observatoire, avec 3000 livres de pension, aux charges que vous vous imposez vous-même; vous en auriez le gouvernement, et il passerait à tous ceux de vos descendants qui seraient dignes de porter votre nom. » Le 12 no-

vembre 1771 fut signé l'acte *créant* la place et le titre de Directeur de l'Observatoire royal. Cassini de Thury, malade, eut peu d'occasions d'exercer ses fonctions nouvelles. C'est en 1776 que son fils Cassini IV, directeur en survivance, fit, pour la première fois, vis-à-vis de l'Académie, acte d'administrateur, en demandant la réparation des cabinets d'observation.

La création du titre de directeur diminuait sensiblement les prérogatives de l'Académie, et Cassini rencontra de sourdes oppositions « premiers symptomes, dit M. Wolf, de la rivalité qui éclatera bientôt entre l'Académie et la famille des Cassini, et qui se traduira, plus tard, par des attaques passionnées ». Cassini passa outre en faisant, à ses propres frais, aux instruments, les réparations les plus urgentes. Il obtint, en 1777, la restauration des cabinets et, en 1779, la construction d'un nouveau cabinet, au sud des anciens, où l'on installa une lunette méridienne construite, par Charité, sur le modèle d'un instrument de Ramsden.

Cassini IV méditait des réformes et des améliorations plus importantes. En 1784, il demandait au baron de Breteuil, ministre de la maison du roi, la construction d'un quart de cercle mural, d'un équatorial, d'un cercle entier; il demandait, en outre, un crédit annuel de 2 400 livres pour l'entretien des instruments, un autre crédit égal pour trois places d'élèves astronomes, et 1200 livres pour la bibliothèque et les frais du bureau. Son projet, soumis par le baron de Breteuil à l'approbation de l'Académie, ne fut approuvé par elle qu'en ce qui concerne les instruments. Le ministre passa outre et fit agréer par Louis XVI, le 25 février 1785, un règlement qui dépassait en nouveauté les propositions de Cassini.

« Le directeur aura seul inspection sur ses élèves... il rédigera au moins tous les 10 ans, sous le titre *Histoire céleste,* les principales observations faites, qui seront publiées, avec l'approbation de l'Académie, par l'imprimerie royale. »

Les premiers élèves furent Dom Nouet, Perny de Villeneuve, Ruelle. En mai 1786, Cassini présenta au roi 80 pages in-folio contenant les observations faites et leur comparaison aux Tables. Un extrait d'un semblable Mémoire fut, jusqu'en 1792, inséré dans les Mémoires de l'Académie. En même temps Cassini entre-

prenait une Histoire céleste qui devait comprendre toutes les observations faites depuis le 14 septembre 1671. Il en communiqua 18 années à l'Académie.

Des instruments commandés par Cassini, le cercle entier, commandé à Lenoir le 15 janvier 1785, était encore, après des péripéties diverses, chez cet artiste en 1810, et fut abandonné. Aucun artiste français n'étant outillé pour exécuter le grand quart de cercle, Cassini créa à l'Observatoire même un atelier et une fonderie. L'artiste Mégnié, recommandé et cautionné par Lalande, fut chargé de fondre le quart de cercle d'un seul jet, ce que Cassini, après d'importants essais, avait jugé possible. On avait aussi commandé à Mégnié l'équatorial. En octobre 1786, tout était prêt pour la fonte du quart de cercle; Mégnié, perdu de dettes, traqué par ses créanciers, disparut. L'atelier dut être abandonné en raison des travaux de restauration de la grande terrasse. La fonderie fut utilisée en 1793 pour la fonte de canons. L'équatorial commandé à Mégnié fut remplacé par un télescope grégorien de Dollond. Cassini ayant été amené à Londres par la jonction de la triangulation de France à celle d'Angleterre, y visita l'atelier de Ramsden et lui commanda une lunette méridienne, qui fut livrée en 1803, et a été plus tard prêtée à l'Observatoire de Toulouse, où elle est encore.

C'est en juillet 1786 que Cassini vit enfin aboutir ses demandes continues et pressantes pour la reconstruction des voûtes qui menaçaient ruine. On reconstruisit les voûtes en jetant dessus d'autres voûtes formant toitures pour les protéger. Le gros œuvre de la restauration était presque terminé en 1791. Au dire des entrepreneurs il ne restait plus que pour 3 mois d'ouvrage quand des nécessités imprévues firent arrêter les travaux.

Le lecteur trouvera dans les Chapitres XX et XXI le récit des scènes affligeantes qui se passèrent à l'Observatoire de 1789 à 1793. Il serait surprenant que cet établissement, avec ses souterrains, eût échappé aux perquisitions, et que le comte de Cassini n'eût pas été soupçonné de donner asile à des suspects. La Convention qui, le 7 août 1793, supprimait l'Académie des Sciences, ne devait pas maintenir le régime établi par le règlement royal de 1785. Un décret du 31 août décide que les quatre astronomes de l'Observatoire jouiront des mêmes droits. Ce décret amena, à

la date du 5 septembre, la démission de Cassini, qui fut remplacé par Bouvard. M. Wolf rejette sur Lakanal toute la responsabilité du décret. La lecture des pièces de la correspondance échangée pour la remise de l'Observatoire entre Cassini, Perny et les conventionnels est des plus pénibles. L'attitude des trois astronomes, Nouet, Perny, Ruelle, à qui Cassini avait rendu les plus signalés services, fut simplement odieuse. Cassini pensait qu'ils étaient poussés par Lakanal, et c'est aussi l'avis de M. Wolf. Les lettres de Lakanal à Cassini, citées par M. Wolf, prouvent que Lakanal était circonvenu par les astronomes, notamment par Perny, directeur temporaire. M. Wolf reconnaît que, plus tard, Lakanal unit ses efforts à ceux de Lalande pour chasser de l'Observatoire les intrigants et y ramener Cassini. « Mais, écrit M. Wolf, il était trop tard; le génie de Cassini avait sombré dans la tourmente révolutionnaire. » Les crises les plus glorieuses laissent après elles bien des tristesses; ce n'est pas une des moindres que la ruine morale d'esprits des mieux trempés.

Cassini avait quitté l'Observatoire le 6 octobre. Arrêté le 13 février 1794, il échappa à la mort grâce à la protection des citoyens du quartier et fut mis en liberté le 5 août.

Ce fut à Lalande d'abord, puis au Bureau des Longitudes que fut confiée, en 1795, la direction de l'Observatoire.

Nous avons cru ne pouvoir mieux faire, pour montrer l'importance du Livre de M. Wolf, que d'en donner un résumé aussi fidèle qu'il nous a été possible de l'écrire en quelques pages. Il nous a semblé que c'était le meilleur moyen de donner au lecteur le désir de lire tout au long l'Ouvrage lui-même. Si l'on n'y trouve pas, par le menu, l'histoire des observations faites à l'Observatoire, l'*Histoire céleste,* on y rencontre un magistral exposé des efforts des quatre Cassini, prolongés pendant cinq quarts de siècle, pour donner à la France un Observatoire digne d'elle. Il était impossible d'élever à l'Astronomie française un monument plus beau et plus important que ce livre, d'une lecture si attachante. Les lecteurs attendront impatiemment la seconde Partie, l'histoire de l'Astronomie au XIXe siècle. B. B.

ANDOYER (H.). — Théorie de la lune (*Scientia*). 1 vol. in-8°, 86 pages. Paris, C. Naud.

« Dans une série de monographies, écrivent les éditeurs de la collection *Scientia,* nous nous proposons de mettre au point les questions particulières... en nous efforçant de montrer le rôle actuel et futur de telle ou telle acquisition. » Devant traiter en 80 pages de la *Théorie de la Lune,* M. Andoyer a réussi à en faire la mise au point. Il a dû renoncer à un essai critique et historique; à ces points de vue le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand et le Livre de M. E.-W. Brown : *An introductory treatise on the Lunar theory,* donnent toute satisfaction au lecteur. M. Andoyer, dans ses 80 pages, donne une ébauche d'une théorie de la Lune, qu'il suffirait de développer en se conformant pas à pas à ses indications. La marche qu'il suit est, sauf de légères modifications, celle de Pontecoulant; les constantes qu'il introduit sont celles de Delaunay. Il détermine par la méthode des coefficients indéterminés les coefficients des séries dont il a établi la forme générale, le succès même de la méthode en légitimant les résultats.

C'est, en fait, à la partie principale de la théorie, *la théorie solaire de la Lune,* que M. Andoyer applique la méthode. En mettant en évidence, dans les développements, les termes à courtes périodes, ceux à longues périodes, les termes séculaires, il utilise son Mémoire sur l'extension du théorème de Poisson. Il donne, chemin faisant, et emploie fréquemment une importante relation, qui contient en particulier les théorèmes d'Adams.

M. Andoyer donne des indications suffisantes pour le calcul effectif des termes jusqu'au quatrième ordre, en regardant comme quantités du premier ordre le rapport m, analogue au rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, et deux quantités analogues aux excentricités; le rapport α des grands axes est du second ordre. En fait m est environ $\frac{1}{13}$ et les développements suivant les puissances de m convergent lentement. MM. Hill et Brown, en introduisant dès le début les valeurs numériques des constantes dans les coefficients des excentricités, de l'inclinai-

son et de α, ont obtenu une convergence bien plus rapide. M. Andoyer signale la haute importance de l'Ouvrage de M. Brown : *Theory of the motion on the moon,* inséré au Tome LIII des *Memoirs on the R. A. S.* (1899).

Pour le calcul *des inégalités secondaires,* qui constitue la seconde Partie de la théorie, M. Andoyer introduit des constantes canoniques et applique la méthode de la variation des constantes arbitraires. Il renvoie à un Mémoire de Newcomb formant les trois Parties du Vol. V des *Astr. Papers* et à un Mémoire de M. Radau inséré au Tome XXI des *Annales de l'Observatoire de Paris.*

Le dernier Chapitre concerne l'influence des inégalités séculaires du Soleil. M. Andoyer étudie les inégalités mixtes où le temps entre en facteur en dehors des signes sinus et cosinus; il montre enfin comment, en suivant les principes employés par MM. Newcomb et Brown, on peut calculer les inégalités séculaires du moyen mouvement, et celles des vitesses du nœud et du périgée.

C'est, en fait, en une large mesure, une œuvre personnelle que ce petit Livre. Dans d'importants Mémoires insérés au Tome III des *Annales de l'Observatoire de Toulouse,* M. Andoyer a montré, il y a déjà quelques années, combien praticable est sa méthode, en signalant et rectifiant des erreurs sensibles dans certaines inégalités calculées par Delaunay au delà du septième ordre de grandeur, ce qui a été, par un procédé tout différent, confirmé par M. Hill. On nous permettra, en terminant cet article, de signaler les récentes et belles recherches de M. Andoyer sur la théorie de la Lune, notamment ses derniers articles du *Bulletin astronomique,* dans lesquels, entre autres résultats, il obtient pour la partie qui ne dépend que de m du coefficient de t^2 dans l'expression de la Longitude moyenne de la Lune, $5'',700$. Delaunay avait trouvé $5'',765$ et M. Brown, au Tome LVII des *Monthly notices,* $5'',70$. B. B.

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE, A PARTIR DE $z = x + iy$, DES FONCTIONS CONTINUES DE x ET y;

PAR M. H. LEBESGUE.

Je m'appuie sur cette propriété : Si C et Γ sont deux contours sans point commun, tracés dans le plan des xy, limitant deux domaines D et Δ extérieurs l'un à l'autre, il existe une série de polynomes en $z = x + iy$ qui converge uniformément vers 1 dans D et sur C, vers zéro dans Δ et sur Γ [1].

Ceci revient à dire qu'on peut trouver un polynome $P(z)$ tel que $|1 - P(z)|$ soit inférieur à ε dans D et sur C et que $|P(z)|$ soit inférieur à ε dans Δ et sur Γ. Donc, si l'on a des constantes K_1, K_2, ..., K_n et des contours sans point commun C_1, C_2, ..., C_n limitant des domaines D_1, D_2, ..., D_n, extérieurs les uns aux autres, on peut trouver un polynome $P(z)$ tel que, quel que soit i, $|K_i - P(z)|$ soit inférieur à ε dans D_i et sur C_i.

Ceci posé, soit une fonction $f(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble (x, y), et définie dans un domaine fini Δ. Je divise le plan en carrés C de côté η par des parallèles à Ox et Oy; η étant choisi assez petit pour que, dans chaque carré, l'oscillation de $f(x, y)$ soit inférieure au nombre positif ε pris arbitrairement. Je définis une fonction $\varphi_\varepsilon(x, y)$ par les conditions suivantes : Pour les sommets des carrés C, f et φ_ε sont égales; sur chaque côté des carrés C, les sommets exceptés, φ_ε est constante et égale à l'une des valeurs que prend f sur ce côté; dans chaque carré C, les côtés exceptés, φ_ε est constante et égale à l'une des valeurs de f dans ce carré. Alors, dans le domaine Δ où φ est définie, on a

$$|f - \varphi_\varepsilon| \leqq \varepsilon.$$

La fonction φ_ε admet une représentation analytique à partir de z. Pour le démontrer, à tout carré C de côté η je fais correspondre le

---

[1] *Voir* WEIERSTRASS, *Sur la théorie des fonctions* (*Monatsberichte d. Berliner Akad.*, août 1880).

carré concentrique C′ de côté $\eta - 2\eta_1$, η_1 étant un nombre positif plus petit que $\frac{\eta}{2}$; à chaque côté D des carrés C je fais correspondre le rectangle D′, ayant pour centre le milieu de D, de côtés parallèles à Ox et Oy, et dont les dimensions sont $\eta - 2\eta_1$ parallèlement à D, η_1 perpendiculairement; à chaque sommet E des carrés C je fais correspondre le cercle E′ de centre E et de diamètre η_1. Je considère une fonction $\psi_{\eta_1}(x, y)$ constante dans chacun des domaines C′, D′, E′ et sur leurs frontières, et égale à φ_ε au centre de chacun de ces domaines. On sait qu'il existe un polynome en z, $P_{\eta_1, \varepsilon_1}(z)$ qui représente ψ_{η_1}, à moins de ε_1 près, dans chacun des domaines C′, D′, E′. Mais si l'on fait tendre η_1 vers zéro, ψ_{η_1} tend vers φ_ε; donc, si l'on fait tendre simultanément η_1 et ε_1 vers zéro, $P_{\eta_1, \varepsilon_1}(z)$ tend vers $\varphi_\varepsilon(x, y)$.

Ainsi $\varphi_\varepsilon(x, y)$ est représentable par une série de polynomes en z.

Si maintenant on fait tendre ε vers zéro, φ_ε tend uniformément vers f; donc *toute fonction $f(x, y)$, définie dans un domaine fini, continue par rapport à l'ensemble (x, y) peut être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des séries de polynomes en $z = x + iy$.*

Pour le cas où $f(x, y)$ est définie dans un domaine infini Δ il est nécessaire de prendre quelques précautions. Choisissons des domaines infinis Δ_1, Δ_2, ... tels que chaque point A de Δ appartienne à tous ceux de ces domaines dont l'indice surpasse un certain entier α qui varie avec A. Faisons jouer le rôle de η_1 aux nombres η_1^1, η_1^2, ..., qui tendent vers zéro; à η_1^i correspond la fonction $\psi_{\eta_1^i}$, analogue à la fonction ψ_{η_1} définie précédemment. Prenons des nombres tendant vers zéro ε_1^1, ε_1^2, ... Nous appellerons $P_{\eta_1^i, \varepsilon_1^i}(z)$ un polynome tel que le module de la différence

$$\psi_{\eta_1^i} - P_{\eta_1^i, \varepsilon_1^i}$$

soit inférieur à ε_1^i dans chacun des domaines C′, D′, E′ intérieurs à D_i. Quand i croît, $P_{\eta_1^i, \varepsilon_1^i}$ tend vers φ_ε et l'on achève comme précédemment. La proposition est donc vraie quel que soit le domaine où $f(x, y)$ est définie et l'on obtient une expression valable pour tous les points de ce domaine, sauf pour le point à l'infini; mais la série, dont les termes sont des séries de polynomes, n'est uniformément convergente que dans toute portion finie de Δ.

Le théorème précédent s'applique en particulier aux fonctions x

et y; x et y admettent donc des représentations analytiques à partir de z, et par conséquent toute fonction de x et y représentable analytiquement à partir de ces variables l'est aussi à partir de $z = x + iy$.

Ce résultat n'est pas nouveau. Bien avant les travaux de Weierstrass, en 1871, Seidel a donné des exemples d'expressions analytiques représentant des fonctions différentes de z dans différents domaines. En se servant d'intégrales définies il a pu exprimer x et y à partir de z (1).

M. Baire (2) à défini un ensemble de fonctions exprimables analytiquement à partir de x et y, à l'aide des seules opérations suivantes : addition, multiplication, passage à la limite; c'est l'ensemble E commun à tout ensemble de fonctions qui, contenant ses fonctions limites, comprend les polynomes en x, y. Les fonctions de E admettent des représentations analytiques à partir de z, à l'aide des mêmes opérations. Or l'ensemble E est très vaste, on n'a pas pu citer jusqu'à présent de fonction qui ne fasse pas partie de E; on ne connaît donc aucune fonction qui ne soit représentable analytiquement à partir de z.

Les résultats obtenus par M. Baire permettent, dans quelques cas, d'obtenir des renseignements sur la structure de l'une des réprésentations analytiques. Par exemple, la fonction qui a pour valeur o si x et y sont rationnels, x si x seul est rationnel, $\frac{1}{y}$ si y seul est rationnel, xy si x et y sont irrationnels, admet une expression de la forme

$$\sum_k \sum_j \sum_i P_{i,j,k}(z)$$

où les P sont des polynomes, à condition d'effectuer les sommations dans l'ordre indiqué.

---

(1) *Ueber eine eigenthümliche Form von Functionen einer complexen Variabeln und über transcendante Gleichungen, die keine Wurzeln haben* (*Journal de Crelle*, t. 73).

Ludwig Seidel remarque que, si $z = x + iy$, on a

$$x + iy = 2\int_0^\infty \left[\lim_{n=\infty} \frac{z^{n-1}\delta}{z^n + \delta^n}\right] d\delta,$$

où δ est réel.

(2) *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1900).

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAPELLI (A.). — Istituzioni di Analisi algebrica. Tertia edizione con aggiunte delle Lezioni di Algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche et matematiche. 1 vol. petit in-4°, XVIII-714 pages. Naples, Pellerano; 1902.

Il suffira de dire au lecteur français, pour qu'il se rende grossièrement compte des matières traitées dans ce Livre, que ce sont celles qui constituent l'objet du cours d'Algèbre dans nos classes de Mathématiques spéciales; elles constituent, comme on sait, un mélange d'Analyse et d'Algèbre, où prédomine l'Algèbre. C'est aussi ce mélange qu'on trouve dans le Livre de M. Capelli. L'auteur a d'ailleurs développé quelques points, sur lesquels je reviendrai tout à l'heure, qui sont étrangers à nos programmes : les uns y ont figuré et n'y figurent plus; d'autres, sans doute, n'y figureront jamais. En outre, il a repris les choses au début : c'est là une habitude fréquente dans les Universités étrangères, et qui se justifie peut-être par d'autres raisons que le désir esthétique de constituer un enseignement parfaitement cohérent, qui se suffise à lui-même et qui suppose chez l'auditeur, non des connaissances positives acquises, mais seulement l'aptitude à manier les abstractions mathémathiques, à suivre de longues et subtiles déductions logiques. Il va de soi que, sauf pour de rares esprits, cette aptitude ne peut s'acquérir qu'en se familiarisant avec les faits mathématiques, et que M. Capelli ne conseillerait pas de suivre son cours à un étudiant qui ne saurait pas déjà une partie notable des choses qu'il entend lui enseigner; mais on ne peut nier l'utilité d'une revision sévère des principes pour ceux qui veulent s'initier à l'enseignement supérieur; trop souvent l'habitude même qu'ils ont des conséquences leur a laissé oublier ces principes, et le mécanisme des opérations leur a fait perdre la signification de ces opérations. Il n'est pas mauvais d'y revenir au début d'un cours d'Algèbre ou d'Analyse, d'autant que cette signification n'a pu être enseignée à des commençants avec ce degré d'abstraction, ce souci

de la logique et de la rigueur qui sont de mise avec des étudiants dont l'esprit est formé. Chez nous, ce travail de critique et de revision, ce retour aux concepts fondamentaux, est laissé à l'initiative individuelle, et nos étudiants seraient singulièrement étonnés si, en entrant dans un cours de Faculté, ils entendaient le professeur faire une leçon sur la division des nombres entiers, ou le plus grand commun diviseur.

Les premiers Chapitres sont consacrés à la notion de nombre entier, fondée sur l'idée de collection, d'ensemble fini. On y remarquera en particulier la façon dont est présentée la multiplication, indépendamment de l'addition, et considérée comme le résultat de la *composition* de deux ensembles. C'est un point sur lequel l'auteur est revenu dans plusieurs communications intéressantes. A ces notions sont rattachées immédiatement celles d'arrangement, de permutation, de substitution, de groupe, y compris, pour ce qui concerne les substitutions, celles de transitivité, de similitude, d'isomorphisme, et la démonstration, reproduite d'après un Mémoire de l'auteur [1], de l'existence d'un sous-groupe d'ordre p^α pour un groupe dont l'ordre n, décomposé en facteurs premiers, est égal à $p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$.

L'auteur traite ensuite de la « genèse combinatoire du concept de valeur », des fractions, des nombres rationnels positifs et négatifs, des opérations rationnelles, des fonctions entières et des fonctions rationnelles, des déterminants et de leur application à la résolution des équations du premier degré et à l'étude des fonctions linéaires, de la formule de Taylor pour le développement des polynomes.

C'est arrivé là qu'il introduit les nombres irrationnels, la notion de limite, les propositions élémentaires sur les séries et les fractions continues, la série exponentielle et la série logarithmique, puis la notion de continuité pour les fonctions à une ou plusieurs variables. Les Chapitres suivants constituent une théorie développée des équations entières à coefficients réels, et de la recherche des racines réelles. C'est ici que vont s'introduire les nombres imaginaires, la définition de la fonction exponentielle

---

[1] *Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni.* (*Journal de Battaglini*, t. XVI, 1878).

pour une variable imaginaire, et même celle des fonctions ϑ sn, en, dn de Jacobi.

Nous revenons maintenant à l'Algèbre, à la démonstration de l'existence des racines et aux conséquences immédiates qu'on en tire, notamment à la formation, au moyen des coefficients de l'équation, des fonctions symétriques des racines; M. Capelli traite ensuite de la divisibilité, de l'élimination, de la transformation des équations, de la résolution générale des équations du troisième et du quatrième degré; il introduit ensuite la notion de réductibilité et d'irréductibilité dans un domaine donné, traite de la forme réduite d'une expression formée avec des radicaux, de manière à pouvoir établir rigoureusement l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale de degré $n > 4$. Le dernier Chapitre, enfin, est consacré aux éléments de la théorie des transformations linéaires, à la formation des invariants et des covariants.

Ce résumé, si sec qu'il soit, a pu laisser au lecteur l'impression d'un plan méthodique et d'un enseignement élevé. L'exposition reste toujours claire et intéressante. Ajoutons encore que l'auteur a introduit très fréquemment des « Notes et Exercices » qui ne constituent pas le moindre attrait de son livre. Ces notes sont tantôt historiques, tantôt théoriques; dans ce dernier cas, elles suffisent le plus souvent au lecteur studieux pour reconstruire des théories qui n'ont pu, malgré leur importance, être développées dans le texte; quant aux exercices proprement dits, plusieurs d'entre eux sont fort intéressants, et il est inutile d'insister ici sur l'utilité pratique qu'ils peuvent présenter.

HERONIS ALEXANDRINI OPERA QUÆ SUPERSUNT OMNIA (Vol. III). — Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von *Hermann Schöne*. In-16, XXII-366 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

Ce Volume renferme, en dehors du Traité *Sur la dioptra* déjà connu, un Ouvrage jusqu'à présent inédit de Héron d'Alexandrie, les *Métriques*, retrouvé en 1896, dans un manuscrit de la Biblio-

thèque du Vieux-Sérail de Constantinople, par R. Schöne, qui a confié à son fils une tâche dont celui-ci a su s'acquitter de façon à ne pas laisser regretter la main du père.

Cet Ouvrage est composé de trois Livres, et, depuis plus de deux siècles, il n'y avait pas eu de publication plus importante comme document pour l'histoire de la Mathématique grecque.

A première vue, on s'aperçoit que tout ce qui avait été publié jusqu'à présent comme Géométrie sous le nom de Héron, n'est qu'une série de travaux byzantins lesquels ne peuvent donner aucune idée de l'œuvre qu'ils représentaient à nos yeux. L'authenticité s'affirme cette fois d'elle-même, et il est à peine besoin de faire appel à la circonstance qu'on retrouve textuellement, à sa place naturelle, le fragment sur l'extraction de la racine carrée que j'ai, le premier, tiré, en 1894 (¹), de *Prolégomènes* inédits *à la Syntaxe de Ptolémée,* prolégomènes écrits vers 500 après J.-C.

Comme forme, à cause de la différence du sujet avec les écrits conçus sur le type euclidien, les *Métriques* sont pour nous toute une révélation d'une face inconnue de la Géométrie grecque. Et cette fois, bien mieux que par les *Pneumatiques* ou par les *Mécaniques,* on peut apprécier Héron. C'est un homme qui sait vraiment composer un Livre.

Et le Livre qu'il a fait, destiné à l'enseignement de la Géométrie au point de vue du calcul (c'est-à-dire en excluant les procédés de mesure sur le terrain), est un livre pour les maîtres. Démonstrations claires, quoique succinctes; l'auteur insiste sur la méthode, laisse de côté l'intérêt pratique.

Les problèmes sont énoncés sur des données numériques qui ne sont jamais rapportées à une unité concrète. La démonstration est faite sur les lignes de la figure, et a simplement pour objet de montrer comment on arrive à la détermination demandée; c'est l'*analyse;* le calcul n'est effectué que dans l'ordre inverse, *synthèse;* alors il est présenté comme type, sans démonstration; le soin de vérifier si la synthèse est bien conforme à l'analyse est laissé au lecteur. Ce n'est pas un élève qui pourrait se débrouiller avec un Livre écrit de cette sorte; les Byzantins lui ont naturellement substitué des recueils d'exercices de calculs en supprimant

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. XVIII.

toutes les analyses; on n'a plus alors que des livres d'élèves, pour des enfants ou de simples praticiens.

Voici le sommaire succinct des *Métriques :*

Livre I (*surfaces*). — Introduction. — 1. Rectangle. — 2. Triangle rectangle. — 3. Triangle isoscèle. — 4. Reconnaître dans un triangle dont on connaît les trois côtés, si un angle est aigu, droit ou obtus. — 5. Calcul de la hauteur dans un triangle acutangle. — 6. Dans un triangle obtusangle. — 7-8. Méthode générale (c'est la formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

que Héron ne revendique nullement comme lui appartenant). — 9. Calcul de l'aire quand la hauteur est irrationelle. — 10. Trapèze ayant un côté perpendiculaire aux bases. — 11. Trapèze isoscèle. — 12. Trapèze acutangle. — 13. Trapèze obtusangle. — 14-15. Quadrilatère (appelé *trapèze*) avec un angle droit. — 15. Le même avec un angle rentrant. — 17-25. Polygones réguliers de 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 côtés. — 26. Cercle et couronnes circulaires. — 27-33. Segments de cercle (Héron y présente une certaine formule comme de lui). — 34. Ellipse. — 35. Parabole. — 36. Surface du cylindre. — 37. Du cône. — 38. De la sphère. — 39. Du segment de sphère.

Livre II (*volumes*). — Introduction. Principes généraux. Corps droits. — 1. Cône. — 2. Cylindre oblique. — 3. Prisme oblique à base hexagonale, appelé *parallélépipède*. — 4. Prisme (demi-parallélépipède). 5. Pyramide. — 6. Tronc de pyramide. — 7. Tronc de pyramide triangulaire oblique. — 8. Solide ayant deux bases rectangulaires parallèles mais dissemblables (mériterait d'être introduit dans l'enseignement élémentaire). 9-10. Tronc de cône. — 11. Sphère. — 12. Segment de sphère. — 13. Spire (tore). — 14. Tronc de cylindre. — 15-19. Polyèdres réguliers. — 20. Indication, pour les corps irréguliers, du procédé de jauge d'Archimède (mesure du volume d'eau déplacé).

Livre III (*division des surfaces*). — Introduction. — 1. Partager dans un rapport donné un triangle par une droite issue d'un sommet. — 2. Par une droite parallèle à la base. — 3. Par une droite issue d'un point donné sur un côté. — 4. Inscrire à l'intérieur d'un triangle donné un autre triangle d'aire donnée, en sorte que les trois autres triangles partiels soient équivalents entre eux. — 5. Diviser un trapèze dans un rapport donné par une droite issue du point de concours de deux côtés. — 6. Par une droite issue d'un point donné sur une base. — 7. Par une parallèle aux bases. — 8. Par une droite issue d'un point donné sur un côté. — 9. Partage d'un cercle dans un rapport donné par une circonférence concentrique. — 10. Partager, dans un rapport donné, un triangle par une droite passant

par un point donné sur le prolongement de la base. — 11-12. Un quadrilatère par une droite issue d'un point donné sur un côté. — 13. En dehors d'un côté. — 14-15. Cas d'un polygone quelconque. — 16. Par un point donné, mener une droite interceptant, sur deux parallèles à partir de points donnés, deux segments dont la somme soit donnée. — 17. Partager par un plan la surface de la sphère dans un rapport donné. — 18. Mener une droite retranchant le tiers d'un cercle. — 19. Trouver un point tel qu'en le joignant aux sommets d'un triangle, celui-ci se trouve partagé en trois triangles équivalents. — 20. Partager une pyramide dans un rapport donné par un plan parallèle à la base (procédé remarquable pour l'approximation de la racine cubique). — 21. Même problème pour un cône. — 22. Pour un tronc de cône. — 23. Pour une sphère.

On voit que ce cadre, sur quelques points, dépasse l'enseignement élémentaire; certains des problèmes de ce Livre pourraient au contraire être systématiquement repris de nos jours, au moins comme exercices.

Héron attribue à Dionysodore le théorème donnant la mesure du tore. D'autre part, il cite des écrits d'Archimède que nous n'avons plus.

1° Dans un écrit *sur les plinthides et les cylindres,* Archimède aurait donné pour le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre des limites plus étroites que celles qui sont célèbres sous son nom. Les dénominateurs des rapports donnés ayant cinq figures, l'approximation devait atteindre au moins la quatrième décimale; malheureusement les nombres donnés,

$$\frac{197888}{62351} > \pi > \frac{211875}{67441}$$

sont inexacts. Il faudrait, avec les mêmes dénominateurs,

$$\frac{195882}{62351} > \pi > \frac{211872}{67441}.$$

2° Dans un Ouvrage appelé l'*Ephodikon,* Archimède démontrait la quadrature de la parabole (le Livre qui nous reste sur cet objet faisait-il donc partie de cet *Ephodikon!*) mais aussi la cubature de l'onglet retranché d'un cylindre droit par un plan oblique coupant la base suivant un diamètre. D'où, dans le même Livre, la jolie proposition :

Si dans un cube on mène deux cylindres ayant pour bases

les cercles inscrits dans deux faces contiguës du cube, le volume commun aux deux cylindres sera les deux tiers du cube.

3° La *Mesure du cercle* devait être plus étendue que nous ne la possédons et contenir un théorème spécial sur la mesure du secteur de cercle.

Héron a un talent incontestable pour la démonstration, et on lui doit, à cet égard, certains abrégés qui auraient mérité de devenir classiques, mais que Pappus a écartés comme incorrects. C'est ainsi que Héron ne se fait aucun scrupule de parler du carré de l'aire d'un triangle, etc.

La seule faute qu'on puisse sérieusement lui reprocher, c'est de considérer les problèmes de divisions de surfaces un peu compliqués (III, 10-14) comme impossibles à résoudre en nombres, mais susceptibles de solutions géométriques. En fait il les ramène aux problèmes traités dans le Traité d'Apollonius (perdu) sur la *Section d'aire*. Or ce sont là des problèmes plans, c'est-à-dire numériquement du second degré. Le langage de Héron n'est donc guère à l'honneur ni de son propre génie, ni de l'enseignement mathématique de son temps (vers 100 après J.-C.). Évidemment dès lors la grande tradition est perdue, et jusqu'à Viete on en restera là.

Je m'arrêterai encore sur la formule d'approximation pour le calcul du segment de cercle plus petit que la demi-circonférence, la seule que Héron paraisse revendiquer. Soit c la corde, f la flèche; il indique que l'aire S était autrefois calculée grossièrement par la formule $S = \frac{c+f}{2} f$. Il remarque qu'alors on devait admettre 3 pour le rapport de la circonférence au diamètre, qu'en raison de l'adoption du rapport $\frac{22}{7}$, on a, depuis, ajouté un terme complémentaire $\frac{1}{14}\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Mais il trouve que si $c > 3f$, il vaut mieux employer la formule $S = \frac{2}{3} cf$, ce qui revient, comme il l'explique, à substituer au segment de cercle un segment de parabole qui sera d'ailleurs toujours plus petit. Sa critique de la formule précédemment courante est juste, puisque si, en valeur absolue, l'erreur y est bien nulle $\left(\text{en supposant } \pi = \frac{22}{7}\right)$ pour $f = 0$, et

pour $f = \frac{c}{2}$, c'est-à-dire pour les limites entre lesquelles f peut varier, le terme complémentaire n'en dépasse pas moins de beaucoup l'aire même du segment pour les valeurs très petites de f. Seulement Héron s'est trompé quant au point à partir duquel sa formule devient préférable; il aurait dû indiquer la condition $c > 5f$, (le coefficient 5 est même en réalité un peu faible).

Il est à remarquer que dans les écrits pseudo-héroniens la formule authentique de Héron ne se retrouve point; on n'y rencontre que les deux précédentes.

Je m'arrête ici, ayant seulement voulu signaler une importante publication sur laquelle il y aura lieu de revenir. Je dirai seulement, comme impression générale, que Héron y paraît, comme géomètre, supérieur à ce que pouvaient le faire supposer son *Commentaire sur Euclide* et ses *Mécaniques*, récemment tirés de l'arabe. Mais d'autre part on est décidément obligé de reconnaître aux Byzantins une activité mathématique tout à fait comparable à celle de l'Occident latin au moyen âge; il importe donc de ne plus les négliger à peu près complètement, comme on le fait d'ordinaire dans l'histoire des Mathématiques.

PAUL TANNERY.

GINO LORIA. — SPEZIELLE ALGEBRAISCHE UND TRANSCENDENTE EBENE KURVEN. THEORIE UND GESCHICHTE. Autorisierte, nach dem italienischen Manuscript bearbeite deutsche Ausgabe von *F. Schütze*. 1 vol. in-8°, XXI-744 pages, avec 17 planches.

Res ardua, vetustis novitatem dare, novis autoritatem, obsoletis nitorem, obscuris lucem, fastidiis gratiam, dubiis fidem, omnibus vero naturam et naturæ suæ omnia.

Ces paroles de Pline le naturaliste, que rappelle M. Gino Loria dans sa préface, s'appliquent admirablement à son œuvre; j'imagine que chacune des ingénieuses antithèses de l'écrivain latin a dû plus d'une fois, pendant son travail, passer devant son esprit. Aussi bien, c'est une histoire naturelle qu'il a composée avec tous

ces êtres qui vivent et se multiplient dans la jungle des cerveaux mathématiques; et, comme un vrai naturaliste, c'est aux *individus* qu'il s'est vraiment intéressé, c'est leurs caractères, leurs propriétés essentielles qu'il nous décrit.

Et quel travail! Il fallait être géomètre et historien comme lui pour oser l'entreprendre, et être doué, pour le mener à bonne fin, d'une admirable persévérance. Que de recherches et de lectures elle a exigées! On serait bien ingrat envers M. Gino Loria, si on ne lui était pas reconnaissant de son œuvre. Quel est le mathématicien qui ne s'est pas demandé où il pourrait trouver une de ces propriétés particulières qu'il a oubliées, un renseignement historique sur une de ces courbes qui lui sert d'exemple, peut-être un nom, et n'a pas reculé devant le nombre de livres ou de journaux qu'il lui faudrait feuilleter pour chercher, peut-être en vain, ce qu'il désire? Pour les professeurs, en particulier, ce livre est une vraie bénédiction; quels trésors d'érudition, de détails toujours instructifs, souvent amusants! Et quelle mine d'exercices! De ces exercices que l'on peut mener jusqu'au bout, et dont les résultats, par la simplicité et l'élégance, feront la joie de ceux qui les donnent et de ceux qui les traitent. Ceux qui aiment à mettre des noms sur les choses seront servis à souhait; ils pourront même choisir, par exemple, entre kukumacide, logocyclique et strophoïde, pour ne citer que trois des noms donnés à une même courbe. Je leur recommande en particulier les quarante-deux noms de fleurs, d'ornements architecturaux ou d'ustensiles vulgaires donnés par F.-W. Newmann à autant de courbes du troisième degré. Cette nomenclature m'a fait regretter qu'un illustre géomètre n'ait pas envoyé à l'auteur, qui sans doute l'aurait accueillie avec joie, la collection de vingt-quatre équations qu'il avait, dit-on, formées jadis à l'usage de ses jeunes élèves, pour représenter les lettres de l'alphabet. Il disait que la lettre O ne lui avait donné aucune peine.

Naturellement, M. Gino Loria n'a guère parlé de ces *coniques* qui, à elles seules, rempliraient de leurs propriétés un volume encore plus gros que celui qu'il nous donne. Il s'est contenté de quelques mots sur leur histoire ancienne. Il a été, en outre, très sobre de généralités. Je l'ai déjà dit, c'est surtout les *individus* qu'il avait en vue et il a laissé de côté ces courbes qui, bien

qu'elles portent un nom propre, comme la hessienne, la steinérienne ou la cayleyenne, regardent les théories générales des courbes (ou des formes) algébriques. Il ne pouvait pas ne pas réunir quelques propositions fondamentales qui s'appliquent à tous les individus d'une même espèce; mais, dans cet ordre d'idées, il s'est restreint autant qu'il a pu. C'est, le plus souvent, la méthode analytique qu'il suit; non pas qu'il s'interdise, ici ou là, quelque démonstration géométrique qui mérite d'être conservée pour sa brièveté et son élégance, mais il a évidemment voulu que l'étude de son livre coûtât le moins d'effort possible au lecteur, qui se figurerait volontiers, tant cette étude est facile, tant les démonstrations sont simples et naturelles, que toutes ces propriétés étaient aisées à découvrir.

Chaque courbe est étudiée à fond : ses propriétés, qu'elles soient de nature élémentaire ou qu'elles regardent la géométrie infinitésimale, sont rappelées, et, le plus souvent, démontrées avec des détails très suffisants. L'histoire de la courbe est racontée et l'auteur donne les références bibliographiques relatives à chacune des propriétés. Aucune particularité intéressante n'est omise. A côté de chaque courbe principale on trouve celles auxquelles elle a, en quelque sorte, donné naissance, les généralisations dont elle a été l'objet. Toutes ces courbes se trouvent ainsi groupées d'une façon aussi naturelle que possible, malgré ce qu'il y a de nécessairement arbitraire dans une classification de cette sorte.

Naturellement, la grande division en courbes algébriques et courbes transcendantes domine tout l'ouvrage. Pour les subdivisions, l'auteur va d'ordinaire du simple au complexe. Ainsi les Sections I, II, III, IV sont consacrées aux courbes algébriques d'ordre déterminé, la Section V à des courbes d'ordre quelconque, la Section VI aux courbes transcendantes, et la dernière Section à des procédés généraux qui permettent de déduire une courbe d'autres courbes. Pour les différents Chapitres d'une même Section, M. Gino Loria suit, en gros, l'ordre historique, mais sans se laisser enchaîner par cet ordre, auquel il n'a pas voulu sacrifier l'ordre des idées, ni les rapprochements qui tiennent à la nature des choses, et forcent de mettre l'une à côté de l'autre des propriétés dont les découvertes ont été séparées par des intervalles de temps considérables. Encore une fois, c'est l'*histoire*

naturelle des courbes, plus que l'histoire proprement dite, qu'il a voulu écrire.

Je me bornerai à reproduire les titres des différents Chapitres. Cette nomenclature, si sèche qu'elle soit, donnera au lecteur quelque idée de la richesse des renseignements qu'il trouvera dans le livre de M. Gino Loria. Quant aux belles propriétés qu'il énumère, il y en a tant qu'il est vraiment difficile de choisir. Sans doute, beaucoup de ces propriétés sont connues du lecteur mathématicien, mais, quel qu'il soit, je serais bien étonné s'il n'en rencontrait pas un bon nombre dont il ne se doutait pas, et qui lui plairont.

I. Lieux plans et solides (1-13). — 1. La droite. — 2. Le cercle. — 3. Les coniques.

II. Courbes du troisième ordre (14-93). — 1. Généralités. Classification. — 2. Courbes rationnelles du troisième ordre. — 3. Courbes circulaires du troisième ordre. — 4 La cissoïde de Dioclès. — 5. Généralisations de la cissoïde. — 6. La parabole de Descartes. — 7. Le folium de Descartes. — 8. La focale de Quételet, la logocyclique de Booth ou strophoïde droite. — 9. Généralisations de la strophoïde. — 10. La conchoïde de Pluse. — 11. Courbes rationnelles du troisième ordre, qui touchent la droite de l'infini. Courbe de Rolle. — 12. Versière, visière et pseudo-versière. — 13. Les trisectrices de Maclaurin, de Catalan et de Longchamps. — 14. La duplicatrice cubique et la feuille parabolique.

III. Courbes du quatrième ordre (94-218). — 1. Généralités. Classification. — 2. Courbes rationnelles du quatrième ordre, en général. — 3. Courbes elliptiques et bicirculaires du quatrième ordre en général. — 4. Les lignes spiriques de Perseus. — 5. La conchoïde de Nikomède. — 6. Généralisation de la conchoïde de Nikomède; conchoïde de cercle. — 7. Les courbes du quatrième ordre avec trois points de rebroussement. — 8. Quelques podaires du quatrième ordre de l'hypocycloïde à trois rebroussements. — 9. Les ovales de Descartes. — 10. Quelques courbes polyzomales symétriques du quatrième ordre. — 11. Courbes rationnelles du quatrième ordre avec nœud de contact. — 12. Les conchales. — 13. La courbe de Cassini. — 14. Courbes du quatrième ordre avec trois points doubles inflexionels. — 15. La *muschellinie* et la trisécante. — 16. De quelques courbes du quatrième ordre déduites d'une conique.

IV. Courbes algébriques particulières d'ordre supérieur au quatrième (219-250). — 1. Courbes déduites d'une conique. — 2. Astroïdes et scarabées (courbes étoilées et courbes du cafard). — 3. La courbe de Watt. — 4. La néphroïde et l'atriphtaloïde; autres courbes du sixième et du huitième

ordres. — 5. Le *trifolium pratense* et la cornoïde. — 6. Une courbe du neuvième ordre et une courbe du vingt-cinquième ordre.

V. Courbes algébriques spéciales d'ordre quelconque (250-405) — 1. Introduction. — 2. Les paraboles d'ordre quelconque. — 3. Les hyperboles d'ordre quelconque. — 4. Les courbes perlées. — 5. Les courbes de Lamé et les courbes triangulaires symétriques. — 6. Les courbes polyzomales. — 7. Les courbes de Darboux et les courbes équilatères de P. Serret. — 8. Les rhodonées (courbes en roses) de G. Grande. — 9. Les feuilles géométriques. — 10. Les ovales; les courbes triangulaires et les courbes orbiformes. — 11. Les multiplicatrices et les médiatrices. — 12. Les sectrices. — 13. Les courbes à centre ou à axes de symétrie. — 14. Courbes autopolaires, courbes anallagmatiques, courbes de direction. — 15. Géométrie du polynome. — 16. Généralités sur la recherche des courbes algébriques dont la rectification dépend d'une fonction prescrite à l'avance. — 17. Courbes algébriques rectifiables au moyen d'arcs d'ellipse. Courbes de Serret. — 18. Courbes algébriques rectifiables au moyen d'arcs de lemniscate. Les sinus-spirales. — 19. Les courbes de Lissajous.

VI. Courbes transcendantes (406-591). — 1. Introduction. — 2. Quadratrices. — 3. Spirale d'Archimède. — 4. Spirales de degré supérieur. — 5. Autres spirales algébriques. — 6. Spirale logarithmique et courbes qui en dérivent. — 7. Klothoïde. — 8. Cycloïdes. — 9. Epicycloïdes, hypocycloïdes, développantes de cercle. — 10. Pseudo-cycloïdes. — 11. Courbes de Delaunay et de C. Sturm (roulettes de l'ellipse). — 12. Courbes syntrépentes et isotrépentes. — 13. Courbes de Debeaune. — 14. Courbes de Ribaucour. — 15. Spirales de Norwich ou de Sturm et courbes d'Euler. — 16. Courbes trigonométriques et hypertrigonométriques. — 17. La courbe logarithmique, la courbe hypergéométrique et la courbe de Wallis. — 18. Les courbes extraordinaires. — 19. La courbe W de Klein et de Lie. — 20. Les lignes de Mercator et de Sumner. — 21. Les tractrices. — 22. Les chaînettes. — 23. L'élastique plane (Muldenkurve), la courbe paracentrique isochrone et la courbe méridienne du corps de moindre résistance. — 24. L'herpolodie, en particulier la spirale de Poinsot. — 25. Autres courbes physico-mathématiques.

VII. Courbes déduites (592-713). — 1. La méthode du changement des coordonnées. — 2. Les courbes de poursuite. — 3. Développées et développantes. — 4. Généralisation des développées et des développantes. — 5. Les courbes parallèles. — 6. Les radiales. — 7. Les focales. — 8. Les podaires, anti-podaires, les podoïdes. — 9. Les courbes isoptiques et orthoptiques. — 10. Les courbes différentielles et intégrales; modes analogues de dérivation. — 11. Les contre-courbes. — 12. Les courbes déduites d'un système de courbes.

L'Ouvrage de M. Gino Loria se termine par deux Notes et un

résumé historique très substantiel de l'histoire des courbes, au point de vue chronologique, point de vue que l'auteur, ainsi qu'on l'a dit plus haut, avait été quelquefois obligé de sacrifier dans le courant de son livre. D'ailleurs les renseignements de cette nature étaient forcément dispersés dans les divers Chapitres, et une vue d'ensemble était indispensable. A la suite de ce résumé, l'auteur indique une suite de propriétés des courbes qu'il appelle panalgébriques, c'est-à-dire des courbes qui sont définies par une équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$, où F est un polynome en x, y, y'.

C'est pour un livre tel que celui de M. Gino Loria que de bonnes Tables sont le plus nécessaires. Quand on l'a lu, on veut pouvoir le consulter. Outre la Table ordinaire, par Chapitres et Paragraphes, qui est fort détaillée et qui remplit une douzaine de pages, l'auteur a dressé un *Namen-Register* et un *Sach-Register*, enfin une Table de concordance entre les figures des planches et les pages, qui rendent les recherches extrêmement faciles.

Il convient, en terminant, de signaler les remercîments très chaleureux qu'adresse M. Gino Loria à notre collaborateur, M. Brocard, pour les nombreux renseignements que celui-ci lui a fait parvenir. J. T.

MULLER (H.) et HUPE (A.). — Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Ausgabe B : für reale Anstalten und Reformschulen. Zweiter Theil : die Oberstufe. (*Lehraufgabe der Classen Ober-secunda und Prima*). Abteilung II : Synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte. Darstellende Geometrie. Zweite Auflage. 1 vol. in-8, VIII-178 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

La lecture des livres d'enseignement en usage dans les écoles des pays étrangers est chose instructive et intéressante : c'est un petit voyage dans ces pays, une visite dans leurs établissements d'instruction, qui, sans doute, est très incomplète, mais qui est économique et dérange peu. Si le lecteur a quelque imagination, il peut, quitte à se tromper quelquefois, se figurer les maîtres et

les élèves d'après ces livres; au reste, il ne se trompera sans doute pas plus que ces voyageurs qui, pour avoir passé quelques mois dans un pays, se croient capables de pénétrer l'âme d'un peuple et d'en faire la psychologie.

Quoi qu'il en soit, puisque « la meilleure formation des professeurs de l'enseignement secondaire » est à l'ordre du jour et qu'il convient de montrer qu'on se préoccupe de cette question, je me permets, après bien d'autres, de signaler l'utilité, pour ces professeurs et ceux qui veulent le devenir, de lire les livres classiques publiés à l'étranger et de réfléchir sur les différences qu'ils présentent avec les nôtres, soit dans la façon de présenter les choses, soit dans le choix même des sujets qu'on y développe ou qu'on y sacrifie. Il est bon de choquer de temps en temps les habitudes qu'on a, et de se rendre compte des raisons mêmes qu'on a de garder quelques-unes de ces habitudes. Il serait donc souhaitable de voir se constituer dans les Bibliothèques de nos Lycées et des établissements où se préparent les futurs professeurs une Section consacrée aux Livres classiques étrangers. Si même ces livres étaient maniés par quelques-uns des élèves, il n'y aurait sans doute pas d'inconvénient à ce que ceux-ci se familiarisassent avec le vocabulaire scientifique d'une ou de plusieurs langues étrangères, dans des livres où la connaissance du sujet suffirait très souvent à les éclairer sur le sens des mots.

Dans une bibliothèque de cette nature, figurerait certainement la collection publiée par M. Heinrich Müller pour l'enseignement des Mathématiques dans les gymnases et les écoles réelles. Le Volume que j'ai sous les yeux est destiné aux élèves des hautes classes de ces établissements et contient une exposition des principales propriétés des coniques, des éléments de Géométrie analytique et de la Géométrie descriptive. Tout cela tient en 175 pages. C'est dire que l'auteur a dû se borner et condenser son exposition, qui m'a toutefois toujours paru très claire et suffisante. Dans nos habitudes, la Géométrie descriptive, qui ne contient guère qu'une cinquantaine de pages, paraît un peu sacrifiée. Nos candidats au baccalauréat, qui n'ont jamais entendu parler de Géométrie analytique, sont censés en savoir bien davantage. On pourrait d'ailleurs leur souhaiter de ne pas ignorer ce qui se trouve dans le livre de M. Müller. Les soixante-dix pages consacrées à la Géométrie

analytique se rapportent à la ligne droite, au cercle, aux propriétés des coniques étudiées sur leurs équations réduites, à la discussion de l'équation générale du second degré. Elles suffisent à donner aux élèves l'idée des méthodes essentielles, à les habituer au maniement d'un instrument très commode et très puissant, à leur fournir d'excellents exercices de calcul. Pour les tangentes, l'auteur se passe de la notion de dérivée; cela, sans doute, est très facile, mais ne me paraît pas avantageux. A propos de l'aire de l'hyperbole, il est question de logarithmes népériens, de la fonction et de la série exponentielles. A des élèves qui sont susceptibles d'avoir acquis ces notions, il ne peut être difficile de faire comprendre ce que c'est qu'une dérivée; je crois même que, au lieu de leur enseigner des procédés particuliers pour trouver l'aire de l'hyperbole et de la parabole, il est plus court de leur expliquer de suite la méthode générale, résultant de la recherche d'une fonction primitive. J'observe, en passant, que si l'on avait le courage d'employer la même méthode pour les volumes, on pourrait supprimer de l'enseignement de la Géométrie élémentaire une dizaine de leçons sur la mesure du prisme oblique, de la pyramide, de la sphère, etc., et les remplacer par des explications qui demanderaient bien un quart d'heure. Ce n'est pas que les méthodes dites *élémentaires* ne soient fort belles et fort intéressantes; mais plus nous irons, plus la nécessité de gagner du temps dans l'enseignement des éléments, de faire pénétrer dans cet enseignement plus d'idées et d'idées plus générales, deviendra impérieuse. On peut d'ailleurs dire à ceux qui se préoccupent beaucoup du point de vue esthétique que la généralité et la puissance d'une méthode ne sont pas pour l'enlaidir. Les Grecs avaient, pour s'éclairer, de fort belles lampes, que l'on admire dans les musées. L'éclairage électrique n'en est pas moins avantageux. Ceci, bien entendu, n'est nullement une critique à l'adresse de M. H. Müller; dans son pays, comme ailleurs, il y a des habitudes et des programmes auxquels il faut bien se plier.

Pour en revenir à son livre, et pour finir par le commencement, je dois dire quelques mots de la première partie, l'exposition au point de vue de la géométrie synthétique des principales propriétés des coniques. Les trois courbes y sont définies comme l'intersection d'un cône de révolution par un plan, puis par la propriété

d'un foyer et de la directrice correspondante, déduite au moyen de la construction de Dandelin. L'auteur étudie d'abord la parabole, puis l'ellipse et l'hyperbole. Pour ces deux dernières courbes, l'existence du second foyer est déduite de la symétrie de la courbe par rapport au second axe, symétrie qui s'établit assez aisément. L'étude est poussée assez loin, et comprend les propriétés des diamètres, des pôles et des polaires.

De nombreux exercices, destinés surtout à familiariser le lecteur avec les propositions qu'il vient d'apprendre, sont indiqués ici et là.

A la fin du Livre, on trouve des indications biographiques très sommaires sur les mathématiciens dont les noms ont été cités dans le courant de l'Ouvrage.

J'imagine que, parmi les arguments que font valoir les gens qui veulent à tout prix que tout le monde apprenne le grec et le latin, celui-ci est un des meilleurs : il est impossible d'étudier les Mathématiques sans avoir appris le grec, puisqu'on se sert continuellement des lettres grecques dans les Traités de Mathématiques. Cet argument, en tout cas, a exactement la même valeur que celui, bien souvent répété, qui concerne les médecins et les pharmaciens, les noms grecs des maladies, les noms latins des médicaments, inscrits sur les bocaux que l'on sait. Sans agiter autrement ces graves questions, M. Müller apporte une réponse suffisante, pour ce qui concerne les Mathématiques, en plaçant tout bonnement, à la fin de son livre, un alphabet grec, avec le nom des lettres qui y figurent, en majuscules et en minuscules.

J. T.

HUMBERT (G.). — Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique. Tome I. Calcul différentiel. Principes du Calcul intégral. Applications géométriques. 1 vol. in-8°; XVI-483 pages.

Une exposition toujours claire, une modération dans le choix des sujets qui n'exclut pas l'élévation des idées, une grande élégance dans les démonstrations, une parfaite rigueur là où elle est

nécessaire, parce qu'on touche aux principes ou à des choses essentielles, mais qui se concilie avec la largeur habituelle des explications, ce sont des qualités qu'on ne s'étonnera pas de trouver dans le Livre de M. Humbert. Il a été écrit pour un public d'élite, qui, en moyenne, apprend plutôt l'Analyse pour s'en servir et pour l'appliquer que pour elle-même, mais qui est déjà formé aux Mathématiques, qui peut comprendre vite et s'intéresser aux choses, et dont il convient d'éveiller de temps en temps la curiosité : ce Livre est admirablement adapté au milieu pour lequel il a été composé.

L'ordre qu'a suivi l'auteur est celui même des programmes actuels de l'École Polytechnique, et cet ordre est fort raisonnable, étant donnés les programmes d'entrée. Il pourrait sans doute être un peu amélioré, si l'on modifiait ces derniers, et c'est un point sur lequel je me permettrai de revenir tout à l'heure.

Le premier Volume comprend trois parties : le calcul différentiel, les principes du calcul intégral, les applications géométriques.

La première Partie s'ouvre par une Introduction, où les principes relatifs aux limites, à la notion de la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble, aux propriétés essentielles des fonctions continues, sont exposés d'une façon claire, simple et rigoureuse. Après avoir exposé les notions fondamentales relatives aux infiniment petits, l'auteur introduit avec grand soin la notation différentielle. Les différentielles y sont présentées comme des accroissements infiniment petits des variables ou des fonctions, de manière à ne laisser subsister aucune obscurité, et à mettre le lecteur dans son tort, s'il se trompe après avoir lu les explications qui sont données.

Je demande toutefois la permission de poser ici une question qui m'a souvent traversé l'esprit. Y a-t-il utilité à introduire les différentielles comme des infiniment petits? Le plus souvent, dans les démonstrations, ce caractère qu'on leur prête n'intervient pas, et il sera toujours temps de le leur conférer si on le désire, absolument comme à d'autres variables. Il me paraît qu'on pourrait regarder les différentielles premières de variables indépendantes x, y, z comme de nouvelles variables indépendantes dx, dy, dz adjointes aux premières, et la différentielle

d'une fonction $f(x, y, z)$ comme la forme, linéaire par rapport à ces nouvelles variables,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

L'intérêt qu'il y a à considérer cette forme linéaire ressort immédiatement de ce qu'elle se change en une forme toute pareille, lorsqu'on y remplace x, y, z par des fonctions d'autres variables et dx, dy, dz par les différentielles de ces fonctions. La différentielle première apparaît ainsi comme une fonction des variables x, y, z, dx, dy, dz : si l'on forme, d'après la même règle, la différentielle de cette fonction, en adjoignant aux variables dx, dy, dz les nouvellesvariables d^2x, d^2y, d^2z, on obtient une fonction des variables x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, qui est un polynome par rapport aux variables autres que x, y, z et dont il est bien aisé de constater le caractère d'invariance analogue à celui de la forme $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$, et ainsi de suite. Les expressions successives que l'on forme ainsi sont, si l'on veut, les différentielles successives de la fonction f quand on ne spécifie pas les variables indépendantes. Quand on y remplace les différentielles d^2x, d^2y, d^2z, d^3x, ..., par zéro, on obtient les formes homogènes du second, du troisième, ... degré en dx, dy, dz auxquelles on donne habituellement les noms de différentielles seconde, troisième, de la fonction f des *variables indépendantes* x, y, z. Les propriétés les plus utiles des différentielles, celles, en particulier, qui servent dans le changement de variables, ressortent aisément de ce point de vue, et il suffit de penser à la formule de Taylor, dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, pour apercevoir la signification de ces différentielles quand on regarde dx, dy, dz comme des accroissements infiniment petits donnés aux variables x, y, z.

Je m'excuse de cette digression et je reviens au Livre de M. Humbert.

Après avoir établi les propriétés essentielles des déterminants fonctionnels, l'Auteur consacre un Chapitre à la Géométrie infinitésimale, pour donner de nombreux et intéressants exemples d'infiniment petits de divers ordres, et de la façon dont un géo-

mètre habile peut les manier. Signalons, en particulier, le théorème bien connu de Chasles sur les arcs de conique. Si prévenu que l'on soit en faveur des méthodes analytiques, il faut bien avouer qu'il serait fâcheux de laisser ignorer aux étudiants des démonstrations aussi ingénieuses, de ne pas leur donner au moins quelque habitude de ces méthodes géométriques, qui ne sont pas sans puissance, et qui, dans bien des cas, permettent de retrouver immédiatement et sans calcul des résultats que la mémoire peut laisser échapper. Il n'y a que des avantages à s'arrêter, comme a fait M. Humbert, un instant sur ces méthodes, au seuil du Cours.

Le changement de variables est traité simplement par l'emploi des différentielles totales. De bons exemples permettent de familiariser le lecteur avec la marche à suivre, ou, comme l'équation des cordes vibrantes, de se rendre compte de l'utilité du changement de variables. Signalons la notion des *transformations de contact* que cette théorie permet d'introduire d'une façon fort naturelle : l'auteur ne craint pas de citer la transformation de Sophus Lie qui ramène la géométrie des systèmes de sphères à la géométrie des systèmes de droites, et dont il montrera plus tard qu'elle fait correspondre les lignes asymptotiques d'une surface aux lignes de courbure d'une autre surface.

Je ne m'arrête ni sur la formation des équations différentielles, ordinaires ou aux dérivées partielles, ni sur la théorie des séries à termes réels ou imaginaires, constants ou variables, quoiqu'il convienne de signaler le soin tout particulier avec lequel l'Auteur a présenté les notions relatives à l'uniformité de la convergence. La théorie des séries de puissances permet d'introduire les fonctions analytiques les plus élémentaires et ce point de vue est immédiatement rapproché du point de vue de Cauchy. C'est naturellement aux fonctions e^z, $\log z$, z^m que l'auteur s'attache surtout. Il me paraîtrait légitime d'aller un peu plus loin qu'il ne fait et d'introduire dès ce moment, pour bien fixer les idées du lecteur, la notion de coupure, afin de pouvoir définir les fonctions $\log z$, z^m et même $\operatorname{arc\,sin} z$, $\operatorname{arc\,tang} z$ comme des fonctions uniformes dans le plan coupé ; ce sont là des notions que M. Humbert a réservées pour la seconde partie de son Ouvrage. Il me semble aussi que les remarques sur la continuité, placées à la fin du Chapitre sur la définition des fonctions d'une variable imaginaire, auraient

pu être placées plus tôt, d'autant que la notion de continuité intervient dans la définition de la fonction logarithmique. A vrai dire, cette notion avait déjà été introduite à propos des séries de puissances, et l'on peut soutenir très raisonnablement qu'il est préférable de ne dégager les idées générales qu'après les avoir fait saisir sur des exemples particuliers.

C'était jadis l'habitude de ne traiter des intégrales indéfinies ou définies qu'après avoir épuisé les applications du Calcul différentiel. Sans parler des raisons de fond qu'il y a à ne pas rejeter si loin la notion d'intégrale, raisons qui convainquent certains mathématiciens jusqu'à leur faire soutenir que la notion d'intégrale doit précéder celle de dérivée, il y a des raisons pratiques très fortes pour ne pas conserver l'ordre ancien, et ces raisons ont prévalu depuis longtemps à l'École Polytechnique, comme le montre déjà le cours d'Hermite. Il est trop clair qu'il convient d'habituer de bonne heure les étudiants à la pratique de l'intégration, que cette pratique leur est extrêmement utile pour l'étude des autres cours que celui de mathématiques pures et qu'il est fâcheux que dans la plupart des établissements d'ordre secondaire ou supérieur, le Cours de physique, par exemple, suppose des connaissances mathématiques que l'on n'acquerra que l'année prochaine. Allons plus loin : il serait certainement désirable, quand on traite des applications géométriques du Calcul différentiel, de ne pas se borner à la formation d'équations différentielles, dont on ne saura rien tirer avant longtemps : or, rien n'empêcherait, après qu'on a traité de la recherche des fonctions primitives, d'indiquer, sans faire une théorie des équations différentielles, et en laissant là les *théorèmes d'existence* dont on n'a que faire pour cet objet, d'indiquer, dis-je, les quelques recettes que l'on possède pour intégrer certains types simples d'équations différentielles, et, là encore, de chercher à familiariser de bonne heure les étudiants avec des méthodes et des procédés de calcul, dont ceux qui appliqueront les mathématiques auront continuellement besoin, tandis qu'ils n'utiliseront certainement pas les milliers de propriétés des coniques qu'ils ont apprises dans la classe de mathématiques spéciales. Puisque l'on ne peut empêcher les élèves de rester longtemps dans cette classe, puisqu'il est surabondamment prouvé qu'on ne la débarrassera

pas de l'extraordinaire végétation qui l'encombre, à moins de défoncer le terrain, d'arracher les plantes parasites et de les remplacer par une tout autre culture, puisque enfin, ni la recherche des fonctions primitives, ni l'intégration de ces types d'équations différentielles dont je parlais tout à l'heure ne présente aucune difficulté de principes, que, pour se rendre maître de ces sortes de questions, il suffit d'avoir un peu de mémoire et d'avoir traité un grand nombre d'exemples, je crois qu'il y aurait tout avantage à exiger cet ordre de connaissances à l'entrée de nos grandes Écoles. On a, avec raison, fait récemment un pas dans cette voie ; il faudra se décider à aller plus loin. Il faut trouver du temps, et l'on ne peut en trouver que dans une meilleure utilisation de celui dont nous disposons.

Il suffit de relire, dans le Livre de M. G. Humbert, les Chapitres relatifs à l'intégration des fonctions rationnelles et des fonctions qu'on ramène à être rationnelles, à l'intégration des quelques types de fonctions transcendantes que l'on sait traiter, à la réduction des intégrales indéfinies, ..., pour voir combien tous ces sujets sont aisés lorsqu'ils sont bien présentés. Pour en revenir à ce Livre, il convient de signaler dans ces Chapitres, les indications données par l'auteur sur les courbes unicursales et, d'autre part, sur la réduction des intégrales abéliennes de genre un. L'Auteur y montre comment, lorsque deux courbes se correspondent point par point, toute intégrale abélienne appartenant à l'une peut se transformer en une intégrale appartenant à l'autre, et comment, en particulier, toute intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre un est réductible à une intégrale abélienne relative à une cubique, ou, si l'on veut, à une intégrale elliptique.

La notion de l'intégrale définie d'une fonction continue, dans un intervalle donné, est présentée d'une façon simple et rigoureuse, en utilisant d'abord un mode particulier et très naturel de subdivision de cet intervalle, puis en montrant que tout autre mode de subdivision conduit au même résultat. Au point de vue pratique l'Auteur insiste avec raison sur la façon dont il convient d'appliquer la formule

$$\int_a^b f(x)\,d_2 = F(b) - F(a).$$

en désignant par $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$, lorsque cette fonction $F(x)$ est susceptible de plusieurs déterminations. Il y a là une difficulté qui arrête les étudiants, lorsqu'ils ne sont point avertis ; j'en ai rencontré plusieurs qui connaissaient la condition de Riemann pour qu'une fonction discontinue soit intégrable dans un intervalle (a, b) et qui étaient incapables de trouver la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Il est à peine utile de dire que M. Humbert signale de la même façon les précautions à prendre lorsque l'on fait un changement de variable, ou lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie dans les limites d'intégration, etc.

On ne peut guère exposer la théorie du contact sans se rappeler la façon magistrale dont elle a été traitée par M. Jordan dans son *Cours d'Analyse;* M. Humbert a tenu à signaler lui-même le parti qu'il avait tiré de l'enseignement de son illustre maître. On remarquera toutefois que, malgré d'inévitables ressemblances, l'exposition de M. Humbert a un caractère plus géométrique que celle de M. Jordan, au moins dans le *Cours* imprimé de ce dernier.

Si simple et si élégante que soit la façon dont est présentée l'évaluation de ces infiniment petits que l'on a à considérer dans l'étude des courbes gauches, je ne puis m'empêcher de regretter l'absence des formules qui donnent le développement en série, procédant suivant les puissances de l'arc, des coordonnées d'un point de la courbe, et qui conduisent sans aucun effort à toutes les évaluations de ce genre.

Les propositions relatives à la courbure des surfaces sont déduites de la façon la plus naturelle de l'étude de la courbure d'une section normale, dont le plan passe par l'axe des z d'une surface tangente à l'origine au plan des xy, puis de la formule

$$K = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

qui donne l'expression de la courbure d'une ligne quelconque tracée sur une surface dont les points sont déterminés au moyen de deux paramètres u, v. Signalons, dans ce Chapitre, l'applica-

tion du théorème de Joachimstahl à la détermination des surfaces qui ont des lignes de courbure circulaires, la démonstration du théorème de Lie, dont il a déjà été question, sur les surfaces telles que les lignes de courbure de l'une correspondent aux lignes asymptotiques de l'autre, enfin un Paragraphe sur la développée d'une surface S, où l'Auteur montre comment les arêtes de rebroussement des surfaces développables formées par les normales à S le long des lignes de courbure sont des lignes géodésiques de cette développée, et tire de cette proposition diverses conséquences intéressantes.

Le dernier Chapitre est consacré à la représentation des surfaces les unes sur les autres. J. T.

MÉLANGES.

LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE;

PAR P.-G. LA CHESNAIS.

La représentation proportionnelle est surtout une question politique; elle tend toutefois à se poser en des termes tels que l'on peut énoncer exactement le problème arithmétique qu'elle soulève. En effet, les systèmes récents ne supposent plus des listes purement *nominatives* de candidats, mais des listes de partis. Il s'agit dès lors de compter les voix recueillies par chaque parti dans une circonscription assez étendue, et d'en déduire le plus équitablement possible la répartition des sièges de cette circonscription entre les divers partis : ceci est bien une pure question de calcul proportionnel, et l'expression de « représentation proportionnelle » prend ici tout son sens, qu'elle n'avait pas lorsqu'il s'agissait de systèmes purement nominatifs.

Mais la solution ne peut être mathématiquement exacte, par la raison que le nombre des sièges à attribuer à chaque parti doit

nécessairement être un nombre entier. Il en résulte que plusieurs systèmes ont été proposés, et même adoptés, notamment en Suisse et en Belgique.

La solution la plus originale et la plus systématique a été adoptée en Belgique, après une longue propagande et une étude approfondie de la question. M. V. d'Hondt, professeur à l'Université de Gand, l'a formulée : elle consiste à diviser le nombre des voix obtenues par chaque parti successivement par 1, 2, 3,..., et à prendre les quotients par ordre de grandeur décroissante, jusqu'à concurrence du nombre des représentants à élire.

Prenons un exemple. Dans une circonscription où il y a 8 députés à élire, et trois listes en présence, le parti A recueille 15000 voix, le parti B, 6000, le parti C, 3000. On formera le Tableau suivant :

	A.	B.	C.
	15000.	6000.	3000.
Division par 1.....	15000	6000	3000
» 2.....	7500	3000	1500
» 3.....	5000	2000	»
» 4.....	3750	1500	»
» 5.....	3000	»	»
» 6.....	2500	»	»

où les 8 plus forts quotients sont séparés des suivants par un trait. Le parti A aura droit à 5 députés, le parti B à 2, le parti C à 3. Le nombre 3000, dernier quotient utile, est appelé par la loi belge le *diviseur électoral.*

Cet exemple est celui d'un cas où une solution exacte existe. En effet, en appliquant la méthode élémentaire, on trouve que le nombre total des votes est $15000 + 6000 + 3000 = 24000$. Divisé par 8, nombre des députés à élire, ce total donne 3000, que j'appellerai le *quotient électoral.* Autant de fois un parti réunit 3000 voix, autant il doit avoir de députés. Donc le parti A aura 5 députés, le parti B, 2, et le parti C, 1. Dans ce cas parfait, le diviseur électoral de la loi belge coïncide avec le quotient électoral, et les résultats sont les mêmes selon M. d'Hondt et selon la méthode élémentaire.

Mais prenons un autre exemple. Supposons que la même circonscription, dans une élection suivante, a droit à un représentant de

plus. Cette fois le parti A a un peu baissé : il n'a plus que 14730 voix, tandis que le parti B atteint 7362, et le parti C 4908. Quel parti obtiendra le neuvième siège? Voici le Tableau :

	A. 14730.	B. 7362.	C. 4908.
Division par 1.....	14730	7362	4908
» 2.....	7365	3681	2454
» 3.....	4910	2454	»
» 4.....	3682	»	»
» 5.....	2946	»	»
» 6.....	2455	»	»
» 7.....	2104	»	»

Ainsi le parti A, qui a perdu 270 voix, gagne un siège, tandis que les partis B et C, qui ont gagné, l'un 1362 voix, et l'autre 1908, conservent seulement les sièges qu'ils avaient.

Voyons maintenant ce qu'aurait donné la méthode élémentaire. Le quotient électoral est ici $\frac{14730 + 7362 + 4908}{9} = 3000$, comme dans le premier exemple, et l'on a ensuite :

$$14730 = 3000 \times 4 + 2730,$$
$$7362 = 3000 \times 2 + 1362,$$
$$4908 = 3000 \times 1 + 1908.$$

Il faut donc attribuer d'abord 4 sièges au parti A, 2 au parti B, 1 au parti C. Mais il reste deux sièges à pourvoir. Le système d'Hondt les attribue tous les deux au parti A. En bonne justice, le parti A a droit à 4 sièges $+ \frac{2730}{3000}$ de siège, le parti B à 2 sièges $+ \frac{1362}{3000}$, le parti C à 1 siège $+ \frac{1908}{3000}$, et par suite on approchera le plus de la représentation exactement proportionnelle en attribuant les deux derniers sièges, l'un au parti A, l'autre au parti C, c'est-à-dire aux plus forts restes, dans l'ordre de leur grandeur.

On voit donc que le système belge favorise abusivement les partis les plus forts : c'est même pour cette raison qu'il a été adopté; cela présente peut-être des avantages au point de vue

politique, mais on ne peut guère alors l'appeler proportionnel. Il est d'autant plus inexact :

1° Que la différence est plus grande entre les partis les plus forts et les autres ;

2° Que le nombre des listes en présence est plus grand ;

3° Que le nombre total des sièges à pourvoir est plus petit.

Une autre anomalie de ce système est celle-ci : Supposons, dans l'exemple précédent, que les partis B et C, se rendant compte du défaut du système, aient fait alliance, et présenté une liste commune. Il n'y a plus que deux listes, la liste A avec ses 14730 voix, la liste B-C avec $7362 + 4908 = 12270$ voix. Le système belge ne donne plus que 5 sièges à la liste A, et 4 à la liste B-C. Le nombre des sièges d'une liste ne dépend donc pas uniquement du rapport des votes qu'elle obtient au nombre des votes exprimés, mais aussi de la manière dont les autres votes se répartissent entre les autres listes.

Cette méthode de calcul n'est cependant pas arbitraire. La difficulté étant la répartition des derniers sièges entre les restes, M. d'Hondt a voulu supprimer cette difficulté par un artifice. Il s'est proposé le problème suivant : trouver un nombre tel, que si l'on divise les nombres de voix obtenues par les différentes listes par ce nombre, la somme des quotients par défaut soit égale au nombre des sièges à pourvoir. Et il a résolu ce problème au moyen de son diviseur électoral, si simple à trouver. Le diviseur électoral est toujours inférieur au quotient électoral, sauf dans le cas parfait où il lui est égal.

Mais il a ainsi résolu un problème qui n'est pas celui de la représentation proportionnelle. La méthode des plus grands restes demeure la méthode rationnelle.

Il est singulier que les restes paraissent gêner les législateurs. En Suisse, par exemple, où la représentation proportionnelle existe dans plusieurs cantons, on a attribué les sièges restant à pourvoir après que l'on a pris les quotients par défaut des chiffres électoraux par le quotient électoral, tantôt aux partis les plus nombreux, tantôt aux plus grands restes. Dans d'autres cantons, on a abaissé arbitrairement le quotient électoral, par une disposition du genre de celle de M. d'Hondt, mais moins ingénieuse, en

divisant le total des votes valables par le nombre des sièges à pourvoir plus un.

Un argument théorique a été invoqué contre le système que j'ai appelé le système rationnel. M. Mirman estime qu'il est trop favorable aux partis les plus faibles. Si par exemple, pour 24000 voix, il y a 8 sièges à répartir entre deux partis qui réunissent respectivement 22499 et 1501 voix, il y aura un siège pour ces 1501 voix, et 7 pour l'autre parti. Et comme 1501 est contenu 14 fois dans 22499, il devrait y avoir 14 sièges contre 1 et non pas 7 contre 1. C'est incontestable, mais il n'y en a que 8 à répartir. M. Mirman raisonne comme si 1501 était le quotient électoral, alors que le quotient électoral est 3000. Il est évident qu'ici le plus faible parti est avantagé, parce qu'il a un reste utile, et le plus fort parti est désavantagé, parce qu'il a un reste inutile; mais l'avantage et le désavantage seraient exactement les mêmes, en sens inverse, si les nombres avaient été 22501 et 1499, du moins en valeur absolue.

Il est clair, toutefois, que l'avantage et le désavantage ne restent pas les mêmes, dans les deux cas, si on les prend relativement, c'est-à-dire dans leur rapport avec les nombres de voix obtenus respectivement par chaque parti. C'est ce qui a conduit Ch. de Comberousse, cité par M. Mirman, à traiter le problème suivant :

« Un arrondissement composé de quatre cantons doit fournir 215 soldats. Les populations des quatre cantons sont respectivement de : 32119, 40827, 23910, 19813 habitants. On demande de répartir le contingent à fournir d'après la population, aussi exactement que possible.

» Il faut partager 215 en parties proportionnelles aux nombres d'habitants donnés. On trouve ainsi :

Pour le	1er	canton	59,1
»	2e	»	75,2
»	3e	»	44,0
»	4e	»	36,5

» La répartition ne pouvant avoir lieu qu'en nombres entiers, on demandera respectivement aux quatre cantons 59, 75, 44, 36 hommes, en tout 214. Il reste donc *un* conscrit à demander à l'un des quatre cantons. Il semblerait tout d'abord que c'est le quatrième canton qui doit le fournir, parce que c'est pour lui que

la fraction décimale négligée est la plus considérable. Mais on ne tiendrait pas compte ainsi du nombre des habitants. Il faut chercher l'augmentation absolue de charge que subit le résultat trouvé quand on prend pour chaque canton un soldat de plus et la comparer au nombre d'habitants du canton. Le canton pour lequel on trouvera ainsi le plus petit quotient devra fournir un soldat de plus.

» Les résultats 60, 76, 45, 37, correspondent aux augmentations absolues

$$0,9, \quad 0,8, \quad 1, \quad 0,5,$$

et l'on a

$$\frac{0,9}{32119} = 0,000023, \qquad \frac{0,8}{40827} = 0,000019,$$

$$\frac{1}{23910} = 0,000041, \qquad \frac{0,5}{19813} = 0,000025.$$

» La plus petite augmentation relative correspond au second canton. La répartition la plus équitable consistera donc à demander 59 hommes au premier canton, 76 au deuxième (75 + 1), 44 au troisième et 36 au quatrième. »

Reprenons ce raisonnement sous une forme un peu différente, en l'appliquant à la répartition de 9 sièges entre les partis A, B, C. Les trois nombres à trouver, s'il existait une solution exacte, satisferaient aux égalités

$$\frac{x}{14730} = \frac{y}{7362} = \frac{z}{4908} = \frac{9}{27000} = 0,000333,$$

mais les nombres x, y, z devant être entiers, ces fractions ne seront pas rigoureusement égales. La fraction $\frac{x}{14730}$ peut être appelée la valeur représentative de chaque électeur du parti A, et il est clair que la valeur représentative des électeurs des divers partis devrait être la même, avec une solution rigoureuse. Si l'on prend pour x, y, z, les valeurs 4, 2 et 1, les valeurs représentatives seront respectivement, pour les trois partis,

$$0,0002715, \quad 0,0002716, \quad 0,000203.$$

Si l'on prend les valeurs 5, 3, 2, les valeurs représentatives

deviennent

$$0,000339, \quad 0,000407498,. \quad 0,000407493$$

et l'on peut être tenté d'attribuer les deux sièges restants aux partis A et C, afin d'égaliser les valeurs représentatives le plus possible.

Mais, si l'on prend $x = 6$, la valeur représentative devient, pour le parti A,

$$0,0004073,$$

c'est-à-dire qu'elle est encore plus faible que celle que donnerait pour le parti C la solution $z = 2$, et par suite on est conduit à prendre $x = 6$, $y = 2$, $z = 1$.

On est ainsi conduit au système belge, car les valeurs représentatives ne sont pas autre chose que les inverses des quotients formés d'après la loi belge. On voit que le système belge repose sur une idée théorique, qui n'est pas la proportionnalité, mais une conséquence de la proportionnalité, à savoir l'égalité des valeurs représentatives de tous les électeurs : c'est pourquoi le système rationnel et le système belge coïncident dans le cas parfait. On voit aussi pourquoi le problème du contingent est correctement résolu par Ch. de Comberousse, parce qu'il s'agit de répartir une charge et par conséquent d'égaliser son incidence sur les individus des quatre cantons, tandis que la méthode rationnelle convient seule lorsqu'il s'agit de représentation, et que la proportionnalité est le but essentiel.

On comprend aussi pourquoi les résultats sont divergents suivant les deux systèmes. Dans la fraction $\frac{z}{4908}$, une variation du dénominateur change plus la valeur de la fraction qu'une variation égale dans le dénominateur de la fraction $\frac{x}{14730}$, dont le dénominateur est plus grand. Un déplacement de voix égal ne produirait donc pas des effets égaux sur les valeurs représentatives des divers partis, tandis qu'il modifie de quantités égales les rapports des forces des partis au total des forces électorales, et c'est bien ceci qui importe dans une question de *représentation* proportionnelle.

Voici d'ailleurs les résultats donnés par les deux systèmes aux

élections générales belges de 1900 :

	Résultats globaux.		Totaux des calculs par circonscriptions.	
	Syst. belge.	Syst. rationnel.	Syst. belge.	Syst. rationnel.
Catholiques.....	76	74	85	76
Libéraux.....	35	35	31	36
Radicaux.....	2	3	2	3
Socialistes.....	36	35	33	33
Dém.-Chrétiens.	3	4	1	3
Indépendants...	»	1	»	1

Ces résultats sont d'autant plus intéressants que le sens des erreurs est bien déterminé par l'erreur mathématique du système. L'erreur la plus forte est au profit du parti le plus nombreux, et au détriment surtout des petits partis. En outre, les libéraux perdent 4 sièges, parce qu'ils sont dispersés partout, et n'ont nulle part un nombre de voix très grand. Les socialistes perdent moins, parce que, s'ils ne comptent guère dans certaines circonscriptions, par contre ils sont le parti le plus fort dans quelques autres.

Le système rationnel par circonscription ne donne pas non plus des résultats exacts : il approche seulement davantage de l'exactitude. La raison en est d'abord qu'une somme d'approximations peut donner une erreur totale assez sensible, malgré les compensations d'erreur qui se produisent généralement. Mais la raison principale est l'inégalité du quotient électoral dans les différentes circonscriptions.

La méthode de représentation proportionnelle mathématiquement la plus exacte consisterait à ne pas fixer *a priori* le nombre des députés de chaque circonscription, mais à le déterminer indirectement en adoptant un quotient électoral arbitraire : en France, en adoptant un quotient de 14000 voix, le nombre actuel des députés serait à peu près maintenu. Autant de fois un parti réunirait dans un département 14000 voix, autant de sièges lui seraient attribués; toute fraction supérieure à la moitié du quotient donnerait droit à un siège de plus. Un des grands inconvénients du système belge est de rendre impossible l'établissement d'un quotient électoral uniforme.

CORRESPONDANCE.

(Extrait d'une lettre de M. H. Poincaré.)

Dans l'Article que j'ai consacré dans le *Bulletin* aux travaux de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie, j'ai fait ressortir l'importance de cette Géométrie nouvelle qu'il appelle *non-archimédienne*. J'aurais dû ajouter que l'idée première appartient à M. Veronese, et que M. Hilbert n'a fait que lui donner une forme d'une remarquable élégance et en mieux montrer la véritable portée....

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BAUSCHINGER (J.). — *Tafeln zur theoretischen Astronomie*. Gr. in-4°, IV-148 p. avec 2 pl. lith. Leipzig, Engelmann. Relié, 12 m.

DEDEKIND (R.). — *Ueber die Permutation des Körpers aller algebraischen Zahlen*. — D. HILBERT, *Ueber das Dirichlet'sche Princip*. In-4°, 17 et 27 p. Berlin, Weidmann. 4 m.

GIBSON (G.-A.). — *Elementary treatise on the calculus*. Illustr. from Geometry, Mechanics and Physics. In-8°, 480 p. London, Macmillan. 7 sh. 6 d.

KONEN (H.). — *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$. Gr. in-8°, V-192 p. avec 2 fig. Leipzig, Hirzel. 4 m.

NEWCOMB (S.). — *The Stars; study of the unwerse*. In-8°, 346 p. London, Murray. 6 sh.

PREUX (L.). — *La Physique des nombres. Arithmétique expérimentale*. Petit in-8°, 220 p. avec fig. Paris, Laisney. 1 fr. 50 c.

VERHANDLUNGEN *der vom* 25. IX *bis* 6. X 1900 *in Paris abgehaltenen* 15. *allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung*. Red.

von H. G. van de Sande Bakhuyzen. 1re Partie, avec 41 planches lith. et cartes. Gr. in-4°, 298 p. Berlin, G. Reimer. 6 m.

Capelli (A.). — *Lezioni sulla teoria delle forme algebraiche.* In-8°. Napoli, Pellerano. 10 l.

Delastelle (F.). — *Traité élémentaire de Cryptographie.* In-8°, 164 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Encyklopädie *der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* II. Bd. Analysis, 2 Thl. red. von H. Burkhardt 1. Heft. Gr. in-8°, 175 p. Leipzig, Teubner. 5 m. 20 pf.

Enriques (F.).— *Lezioni di Geometria descrittiva*, pubblicate per cura di U. Concina. Gr. in-8°. Bologna, Zanichelli. 12 l.

Frobenius (G.). — *Ueber auf lösbare Gruppen.* IV. V. Gr. in-8°, 21 p. Berlin, Reimer. 1 m.

Hammer (E.). — *Sechsstellige Tafel der Werthe* $\log_{10} \frac{1-x}{1-x}$, für jeden Werth des Arguments $\log x$, von 3,0 — 10 bis 9,99000 — 10. In-8, IV-73 p. Leipzig, Teubner. Cart. 3 m. 60 pf.

Jahrbuch *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann. Herausgeg. von E. Lampe u. G. Wallenberg, 30. Bd. Jahrg. 1899. 3. Heft. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 12 m.

Lobatchevski. — *Nouveaux principes de la Géométrie avec une théorie complète des parallèles.* Trad. du russe par J. Mallieux. Gr. in-8°, 132 p. et 9 planches. Bruxelles, Hayez. 3 fr.

Ball (Sir R.-L.). — *Great Astronomers.* New edit. In-8, 384 p. avec fig. London, Isbister. 5 sh.

Borel (E.). — *Leçons sur les séries à termes positifs.* In-8°, VI-95 p. Paris. Gauthier-Villars. 3 fr. 50 c.

Korn (A.). — *Abhandlungen zur Potentialtheorie.* 5. Heft : *Ueber einen Satz von Zaremba u. die Methode des arithmet. Mittels im Raume.* Gr. in-8°, XVI-66 p. Berlin, Dümmler. 2 m. (Complet en un volume, 6 m.).

Mittheilungen *der mathematischen Gesellschaft in Hamburg.* 4. Bd. 2. Heft. Red. von Repsold. Bolte u. Busche. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

1re Partie —

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STOLZ (O.) und GMEINER (J.-A.). — THEORETISCHE ARITHMETIK. II. Abtheilung: DIE LEHREN VON DEN REELLEN UND VON DEN COMPLEXEN ZAHLEN. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte V-VIII X, XI des I. und I, II, V des II. Theiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. 1 vol. in-8°; XI-402 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Nous avons déjà dit dans le *Bulletin* (¹), à propos de la première Partie du Livre de MM. Stolz et Gmeiner, l'intérêt que présente leur travail. C'est une réédition de l'*Allgemeine Arithmetik* de M. Stolz; comme l'Ouvrage primitif, elle s'adresse surtout à ceux qui veulent regarder au fond des choses et qui ont le goût d'une extrême rigueur. Sur plusieurs points importants, l'exposition a été complétée et rendue plus parfaite. Ceux qui se plaisent à philosopher aiment habituellement à savoir comment les idées se sont formées et comment elles ont évolué : le lecteur qui, d'après la nature même du Livre, s'attend à y trouver d'intéressants renseignements historiques et bibliographiques, ne sera pas trompé.

La première Partie traitait des nombres rationnels; la seconde est consacrée aux extensions successives de l'idée de nombre : nombres réels quelconques et nombres complexes; elle s'ouvre par l'étude des *systèmes continus à une dimension de grandeurs absolues ou relatives,* étude qui est présentée en elle-même, indépendamment de la théorie des nombres irrationnels. Les grandeurs (d'une espèce ou d'un système bien déterminé) dont il est question doivent satisfaire aux cinq conditions suivantes :

I. Deux grandeurs du système considéré sont égales ou inégales; dans ce dernier cas, l'une est plus petite que l'autre; il n'y a pas de grandeur plus petite que toutes les autres.

II. L'addition de deux grandeurs du système considéré, dont la somme doit être une grandeur du même système, jouit des mêmes propriétés que l'addition des nombres.

(¹) Tome XXV, 1901, p. 35.

III. Si l'on a $A > B$, il y a une grandeur X, telle que l'on ait $B + X = A$.

IV. Chaque grandeur A peut être divisée en autant de grandeurs égales que l'on voudra.

V. Si $A > B$, il y a un nombre naturel p tel que l'on ait $pB > A$.

Ces cinq conditions se subdivisent en quinze autres, dont les six premières sont destinées à préciser les notions d'égalité et d'inégalité, dont la septième stipule qu'entre deux grandeurs inégales A, B ($A < B$) se trouve une grandeur M telle que l'on ait $A < M < B$; dont les cinq suivantes précisent les propriétés de l'addition, et la combinaison des notions d'addition, d'égalité et d'inégalité, dont les trois dernières enfin reproduisent les conditions IV, V, VI. Ces quinze conditions sont rangées dans un ordre tel que chacune soit indépendante de celles qui la précèdent.

Si, maintenant, on considère un système de grandeurs, satisfaisant à ces conditions, on peut, d'une infinité de façons, y pratiquer une coupure, c'est-à-dire les ranger dans deux classes telles que chaque grandeur du système figure dans une classe et seulement dans une, chaque grandeur de la première classe étant plus petite que chaque grandeur de la seconde. En vertu de la septième condition, il est impossible qu'il y ait à la fois dans la première classe une grandeur plus grande que toutes celles de cette classe et dans la seconde classe une grandeur plus petite que toutes celles de cette seconde classe. Il n'y a donc que trois suppositions possibles, on plutôt deux, car les deux dernières des suppositions que je vais énumérer peuvent être regardées comme n'en faisant qu'une. Ou bien il y a une lacune (*Lücke*), c'est-à-dire que la première classe ne comporte pas de grandeur qui soit plus grande que toutes les autres de cette classe, et que la seconde classe ne comporte pas de grandeur qui soit plus petite que toutes les autres de cette même classe. Ou bien la première classe comporte une grandeur plus grande que toutes les autres; ou bien la seconde classe comporte une grandeur plus petite que toutes les autres. Si, quelle que soit la coupure, il n'y a jamais de lacune, le système est dit *continu à une dimension*. Pour cette définition, on n'a à faire intervenir ni la condition relative à la divisibilité en parties égales, ni la condition connue sous le nom d'*axiome*

d'Archimède; les auteurs montrent que ces conditions sont nécessairement vérifiées pour un système continu, au sens qu'on vient de dire.

L'intérêt qu'il y a à préciser ainsi la notion de grandeur, antérieurement à la notion de nombre irrationnel, n'est pas contestable et s'éclaire en quelque sorte par la façon détaillée et rigoureuse dont les auteurs développent ensuite la théorie des proportions, au sens d'Euclide.

Quoique la notion de nombre réel quelconque puisse être présentée indépendamment de l'idée plus ou moins vague que nous avons du continu géométrique, il semble naturel de regarder cette dernière notion comme antérieure à celle du nombre réel, de regarder la notion du nombre réel comme construite en vue de cette notion vague de la continuité, et par conséquent, dans une exposition logique, de préciser d'abord cette notion, puis celle du nombre. Toutefois, il convient d'observer que la précision même du concept de grandeur auquel parviennent MM. Stolz et Gmeiner exclut toute réalité concrète : c'est une pure pensée ; il n'y a pas, en dehors de la pensée, de segments de droite satisfaisant aux conditions que leur imposent les auteurs : ces segments-là sont tout aussi abstraits que les nombres. Dès lors la position de ceux qui, tout en admettant que la notion de nombre réel quelconque ait été construite à la lueur un peu trouble de l'idée de continuité, veulent, dès que cette notion de nombre a été éclaircie, lui accorder la priorité, et s'en servir pour définir la continuité des grandeurs, reste parfaitement légitime. En particulier, il semble bien évident que la définition précédente de la continuité revient au postulat classique de MM. Dedekind et Cantor, sur l'existence d'une grandeur correspondant à chaque nombre réel.

Le lecteur pourra d'ailleurs s'amuser à distinguer, parmi les postulats qu'énumèrent les auteurs, ceux qui sont nécessaires et suffisants pour que, lorsqu'on a choisi une unité dans le système, à chaque grandeur du système corresponde *un* nombre réel (la mesure de cette grandeur ou son rapport à l'unité), de ceux qui sont introduits afin qu'on puisse affirmer qu'à chaque nombre réel correspond une grandeur du système considéré. Quoi qu'il en soit, il n'était pas sans intérêt de montrer comment la notion

de coupure pouvait être transportée dans la théorie des grandeurs, indépendamment de la notion de nombre irrationnel.

On pouvait s'attendre, après cette théorie des grandeurs, à ce que les auteurs adoptassent, pour éclaircir la notion de nombre irrationnel, le point de vue de M. Dedekind qui est si voisin de celui où ils s'étaient placés. Ils se sont, au contraire, placés au point de vue de M. Méray : ils ont été sans doute séduits par la simplicité avec laquelle se présentent, de ce point de vue, la théorie des opérations à faire sur ces nombres. Cette simplicité, qui n'est pas contestable, tient peut-être moins au fond des choses qu'aux habitudes d'esprit de celui qui aborde cette théorie; il est déjà habitué à la notion de suite, de limite, ... Les relations qu'il voit écrites, avec un sens nouveau, ont une forme qui lui est familière, tandis que, d'ordinaire, les notions de coupure, ou d'ensemble, sont pour lui relativement nouvelles et semblent lui demander plus d'efforts. Tout cela peut-être est fort contingent. Mais, en tout cas, le lecteur ne perd rien au mode d'exposition adopté par les auteurs : d'une part, il n'aura assurément aucune peine à suivre cette exposition; d'autre part, s'il a bien compris les Chapitres précédents, il lui sera facile de refaire pour son propre compte la théorie de M. Dedekind : chacun sait que c'est là la meilleure manière, et la plus profitable d'apprendre une théorie; au reste, il y aura gagné d'avoir regardé les choses de deux points de vue différents, et chacun sait encore que de cette façon on les connaît mieux.

Ces notions acquises, les auteurs développent les définitions et les propriétés fondamentales des puissances et des racines, des fonctions a^x et $\log x$. Ils étudient ensuite la théorie des séries et des produits infinis, dans le cas où les termes sont réels et s'arrêtent comme il convient sur les séries qui représentent e^x, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$: notons, en passant, le soin avec lequel ils traitent les questions qui se rapportent au calcul numérique, en particulier au calcul des logarithmes.

La théorie des nombres complexes ordinaires est présentée dans sa généralité, en sorte qu'elle n'est qu'un cas particulier de la théorie générale des nombres complexes, développée d'ailleurs par les auteurs de manière à montrer que les nombres complexes ordinaires sont les seuls pour lesquels se conservent toutes les

lois formelles des opérations fondamentales sur les nombres réels, et que les quaternions d'Hamilton sont les seuls nombres complexes pour lesquels se conservent toutes ces lois, sauf celle de la commutativité pour la multiplication et celles qui en dépendent. Le lecteur a ainsi la satisfaction d'arriver au bout d'une question. Les renseignements sur le calcul des quaternions, quoiqu'ils soient présentés sous une forme purement analytique, nécessitée par ce qui précédait, sont d'ailleurs suffisants pour que le lecteur puisse pratiquer ce calcul et en connaisse les principaux termes techniques; il n'aura, s'il le veut, aucune peine à se rendre compte du rôle que ce calcul peut jouer en Géométrie, surtout après avoir lu le Chapitre suivant, où les auteurs insistent sur la représentation géométrique des nombres complexes ordinaires, et sur le parti qu'on peut en tirer en Géométrie plane.

MM. Stolz et Gmeiner développent ensuite, pour les nombres complexes ordinaires, les définitions des opérations et des fonctions qu'ils ont antérieurement étudiées pour les nombres réels et terminent leur Livre par l'étude des séries de puissances, et en particulier de celles de ces séries qu'ils avaient déjà rencontrées, et qui peuvent servir à définir les fonctions élémentaires.

Chaque Chapitre est suivi d'intéressants exercices. On voit que cette *Theoretische Arithmetik*, dont les lignes qui précèdent suffiront, je l'espère, à faire comprendre le plan et l'esprit, est, sous un titre modeste, une introduction à la théorie des fonctions, qui *introduit* vraiment le lecteur dans cette théorie. J. T.

VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de la). — Cours d'Analyse infinitésimale. Tome I. In-8°; xiv-372 pages. Louvain, Uystpruyst-Dieudonné. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Quoique les bons livres sur la matière ne manquent pas, personne ne regrettera la publication de ce nouveau cours d'analyse; l'effort qu'a fait l'auteur pour fonder exclusivement l'enseignement de l'analyse sur des notions parfaitement rigoureuses est très digne d'attention, d'autant que c'est vraiment un livre élé-

mentaire qu'il a voulu écrire, et qu'il a écrit : un livre qui s'adresse non seulement à ceux qui veulent être des professionnels de mathématiques, mais à ceux qui commencent l'étude de l'analyse, et qui ne la poursuivront qu'en vue des applications pratiques : ceux-ci sans doute auront à sauter quelques pages; ils en sont prévenus par le changement du caractère typographique; mais, même pour eux, M. de la Vallée-Poussin n'a jamais voulu sacrifier la rigueur : le soin qu'il a mis à ce que cette rigueur ne fût pas rébarbative, à présenter les choses sous leur forme la plus élémentaire, est vraiment méritoire. Comment ne pas dire que ce soin se retrouve dans les parties les plus savantes du livre et que l'auteur est parvenu à présenter d'une façon simple certaines démonstrations difficiles, celle par exemple qui concerne la séparation du plan en deux régions par une courbe fermée, sans point double, définie par deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

où $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions continues?

On pourrait craindre qu'un livre qui s'adresse ainsi à deux catégories distinctes de lecteurs ne fût pas homogène, et que, vraiment, en passant du gros texte au petit texte, des propositions courantes de l'analyse, de celles que l'on aura constamment à appliquer, à ces subtilités où se complaisent les purs mathématiciens, le lecteur ne se sentît dépaysé; il n'en est rien. D'une part, la lecture peut très bien se continuer en se bornant au gros texte; d'autre part les démonstrations qui sont plus difficiles à saisir, par cela même qu'elles sont plus générales, plus abstraites et qu'elles font appel à un moindre nombre de suppositions, sont si bien mises à leur place que le lecteur en pressent l'utilité et les désire en quelque sorte. J'imagine que, s'il saute par-dessus, il sera cependant satisfait de les savoir là, et se promettra d'y revenir plus tard, s'il en a le loisir. Plus d'un, sans doute, ne tiendra pas cette promesse, qui, cependant, s'il a bien compris le reste du livre, non seulement sera capable d'appliquer correctement les méthodes, mais encore connaîtra une exposition vraiment scientifique des éléments de l'analyse. Qu'une telle acquisition exige quelque effort, même quand l'exposition est aussi claire que dans le livre de M. de la Vallée-Poussin, qu'il ne faille pas l'imposer à

tous ceux qui n'ont en vue qu'un but pratique, c'est ce que l'on ne contestera pas; il ne faudrait pas non plus contester le bénéfice qu'elle apporte à la formation de l'esprit, et cette sorte de sécurité qu'elle donne aux esprits qu'elle a contribué à former.

Parmi les sujets qu'a développés l'auteur et qui ne se trouvent pas d'habitude dans les livres aussi élémentaires que le sien, je signalerai d'abord les paragraphes consacrés aux intégrales par excès ou par défaut (Darboux), aux ensembles, aux diverses formes de la condition d'intégrabilité. Les ensembles dont il est question sont des ensembles de nombres ou, si l'on veut, de points sur une droite. L'auteur introduit de la même façon que M. Jordan les notions d'ensembles *complémentaires*, de points *frontières* d'un ensemble et de son complémentaire, de points *intérieurs* ou *extérieurs* à un ensemble; la longueur extérieure et la longueur intérieure d'un ensemble contenu dans l'intervalle ou le segment (a, b) sont définies comme étant les intégrales par excès et par défaut, au sens de M. Darboux

$$\overset{\mathrm{E}}{\int_a^b} e(x)\,dx, \qquad \overset{\mathrm{D}}{\int_a^b} e(x)\,dx,$$

où $e(x)$ désigne une fonction de x égale à 1 pour tout point x de l'ensemble, à 0 pour tout point qui ne lui appartient pas. Cette définition, qui est d'ailleurs commode par sa forme simple, ne diffère qu'en apparence de celle de M. Jordan; celle-ci revient à supposer, dans l'intégrale par excès, $e(x) = 1$, non seulement pour les points de l'ensemble, mais encore pour les points frontières, et dans l'intégrale par défaut $e(x) = 1$ pour tout point qui appartient à l'ensemble et qui n'en est pas un point frontière; mais, ainsi que M. Lebesgue a bien voulu me le faire remarquer, la défition de M. de la Vallée-Poussin, conduit, dans tous les cas, aux mêmes nombres que celle de M. Jordan. La longueur ou l'étendue extérieure sont les mêmes pour l'un et l'autre; les ensembles mesurables, pour lesquels la longueur extérieure de l'ensemble frontière est nulle, sont naturellement aussi les mêmes. Les différences entre cette définition et celle que M. Borel, d'une part, a adoptée pour les ensembles mesurables, et d'autre part, celles que M. Lebesgue a données dans sa thèse *Intégrale, longueur,*

aire (¹) des *mesures* extérieure et intérieure d'un ensemble sont d'une nature beaucoup plus profonde.

Pour avoir la longueur extérieure, par exemple, au sens de M. de la Vallée-Poussin, on doit partager l'intervalle qui contient l'ensemble en un nombre *limité* de petits intervalles partiels, faire la somme de ceux de ces intervalles partiels qui contiennent des points de l'ensemble, et chercher la borne inférieure de l'ensemble A de toutes les sommes ainsi obtenues; pour avoir la mesure extérieure au sens de M. Lebesgue, il faut encore enfermer tous les points de l'ensemble dans des intervalles partiels en nombre limité ou *illimité*, faire la somme de tous ces intervalles et chercher la borne inférieure de l'ensemble B de toutes les sommes ainsi obtenues. Il est clair que l'ensemble A est contenu dans l'ensemble B; mais les deux ensembles A et B ne sont pas identiques (²).

S'il s'agit par exemple de l'ensemble des points à abscisses rationnelles qui appartiennent à l'intervalle (0, 1), la longueur extérieure sera 1 pour M. de la Vallée-Poussin, et la longueur intérieure 0; pour M. Lebesgue, la mesure extérieure du même ensemble est nulle, comme sa mesure intérieure; en sorte que cet ensemble est mesurable pour lui (sa mesure est nulle) et qu'il ne l'est pas pour M. de la Vallée Poussin.

Le point de vue auquel s'était placé M. Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (³), pour définir les ensembles mesurables, en partant de l'ensemble formé par tous les points d'un intervalle, ensemble pour lequel la mesure est, par définition, égale à la longueur de l'intervalle, et en s'élevant de proche en proche à la mesure d'un ensemble formé d'une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre, d'un ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables sans point commun, d'un ensemble différence entre deux ensembles mesurables, *dont le premier contient le second,* n'est pas moins naturel. Il ne coïncide ni avec le point de vue de M. Jordan, ni avec celui de M. Lebesgue, qui, cependant, s'y rattache direc-

---

(¹) Milan, Rebeschini, 1902. Voir *Bulletin*, t. XXVII₁, p. 58.

(²) C'est encore à M. Lebesgue que je dois ces explications.

(³) Gauthier-Villars, 1898.

tement. D'une part, il y a, d'après M. Borel, des ensembles qui sont mesurables pour lui et qui ne le sont pas pour M. Jordan, et *inversement;* d'autre part, M. Lebesgue a montré qu'il y avait des ensembles mesurables d'après sa définition, et qui ne l'étaient pas au sens de M. Borel. Enfin les ensembles qui sont mesurables pour M. Jordan, ceux qui le sont pour M. Borel, le sont aussi pour M. Lebesgue.

Quoi qu'il en soit de ces notions abstraites, la considération de la longueur extérieure et de la longueur intérieure permet à M. de la Vallée-Poussin de présenter sous diverses formes intéressantes la condition pour qu'une fonction soit intégrable, au sens de Riemann.

Je dois signaler aussi, dans le même ordre d'idées, le paragraphe qui a pour titre : *Définitions analytiques les plus générales des courbes continues fermées, rectifiables, quarrables; fonctions à variation bornée. Intégrales curvilignes.* Les propriétés des courbes fermées ou non (mais sans point multiple), définies par des équations de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

sont fondées sur la décomposition du plan en petits carrés, et la considération de l'ensemble de ces petits carrés que traverse la courbe, ou une portion de la courbe, carrés qu'on suppose couverts de hachures, ainsi que les carrés vides qu'ils entourent. Pour ce qui est, en particulier, d'une courbe fermée, on parvient ainsi à la recouvrir d'un anneau formé de petits carrés, limité par deux polygones sans points multiples, qui restent très voisins de la courbe; cet anneau permet de définir nettement la région du plan extérieure ou intérieure à l'anneau, puis, finalement, la région extérieure et la région intérieure à la courbe. On arrive ainsi, par une voie assez facile, aux propositions fondamentales que l'on doit à M. Jordan.

Les notions d'arc de courbe, d'intégrale curviligne, sont ensuite présentées dans leur généralité.

Ce premier volume est consacré à peu près exclusivement aux variables réelles. Il n'est guère question des variables complexes qu'à la fin du Volume, à propos des séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable, où leur considération, loin de

compliquer la théorie, éclaire au contraire le sujet. Mais elles ont été écartées de toutes les questions de Géométrie. « C'est, dit l'auteur, le sens de la réalité seul qui intéresse les ingénieurs. »

Cette petite phrase, qui a l'air d'un truïsme, se trouve être, sans que l'auteur y ait songé, une critique très vive de l'enseignement qui est donné, non pas aux élèves de nos grandes écoles techniques, mais bien à ceux qui s'y préparent. Si, en fait, on ne tient guère compte, dans notre pays, de la vérité banale qu'énonce M. de la Vallée-Poussin, personne, en principe, n'oserait la contester. D'ailleurs, si intéressants que soient en eux-mêmes ces Chapitres de la Géométrie où l'on fait intervenir les éléments imaginaires, ou ces Chapitres d'Algèbre dans lesquels on emploie le langage de la Géométrie, quelle que soit leur importance pour l'étude des intégrales elliptiques et abéliennes, ils n'en sont pas moins essentiellement distincts de la théorie des fonctions, ou, au moins, des éléments de cette théorie et il est assurément légitime de les laisser de côté, dans un livre comme celui de M. de la Vallée-Poussin. Quelques personnes estimeront qu'il aurait bien pu aussi laisser de côté la mesure des ensembles et les questions analogues, dont les ingénieurs ne se préoccuperont pas, sans doute, d'ici longtemps, en tant qu'ingénieurs. Je le veux bien, mais l'auteur pourrait répondre qu'il n'est pas sorti de son sujet, qui était l'exposition des principes de l'analyse; en quoi je pense qu'il aurait raison, et ceux mêmes qui ne seraient pas de cet avis seront obligés de reconnaître qu'il n'en est pas beaucoup sorti, ni longtemps.

Au reste, je ne serais pas étonné, si les notions de ce genre, qui ont semblé tout d'abord difficiles, perdaient peu à peu leur obscurité apparente : il arrive que les étudiants, pour qui tout est nouveau, trouvent certains raisonnements moins difficiles que ne font leurs anciens, et même leurs maîtres, qui sont rebelles aux nouveautés, en raison de leurs habitudes acquises, qui se plaisent surtout au développement de leurs propres idées, qui se réjouissent de les voir germer et fleurir dans leurs élèves. D'une génération à une autre, l'évidence mathématique n'est pas la même.

J. T.

WHITAKER (E.-T.). — A Course of modern Analysis, an introduction to the general theory of infinite series and of analytic functions; with an account of the principal transcendantal functions. 1 vol. in-8°. xvi-378 pages. Cambridge, University Press; 1902.

Le Livre de M. Whitaker comprend deux Parties bien distinctes; la première contient les éléments de la théorie générale des fonctions d'une variable complexe; l'autre contient l'étude d'un certain nombre de fonctions transcendantes, faite à la lumière de cette théorie générale. C'est un plan fort bien conçu.

Le lecteur finit par se fatiguer des généralités; il est bien aise de se reposer pour ainsi dire dans un paysage plus restreint, peuplé d'êtres intéressants qu'il étudie à loisir; dans cette étude, il ne peut manquer d'admirer la puissance des idées générales qu'il a d'abord acquises; il les comprend mieux et elles se fixent dans son esprit. Les connaissances qu'il acquiert ainsi lui seront d'ailleurs indispensables s'il veut pénétrer plus avant dans le monde des mathématiques. La lecture d'un livre comme celui de M. Whitaker lui aura été singulièrement profitable, surtout s'il s'astreint à traiter les nombreux exemples et exercices dont l'auteur a enrichi son livre. Ces exemples sont tirés, pour la plupart, ou de Mémoires originaux, ou des questions posées aux examens de Cambridge, de Trinity College, etc. Souvent l'auteur indique la solution en quelques mots.

Le Livre s'ouvre par les notions indispensables sur les séries, les produits infinis, etc. Signalons l'introduction des déterminants infinis.

L'auteur aborde ensuite la théorie des fonctions analytiques.

L'intégrale

$$\int_A^B f(z)\,dz$$

prise le long d'une courbe qui joint le point A au point B est définie, comme limite d'une somme, en supposant seulement la continuité de la fonction $f(z)$ du point z. L'existence de cette limite est démontrée d'une façon très simple. Le théorème de Cauchy, en supposant l'existence de la dérivée, est ensuite établi

d'une façon analogue à celle que l'on doit à M. Goursat; il me paraît regrettable que l'auteur n'ait pas cru devoir ajouter quelques mots, de manière à faire ressortir, ainsi que l'a fait M. Goursat, le fait si important que, dans cette démonstration, la supposition que le rapport

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

tend uniformément vers $f'(z)$ n'intervient pas, et que, au contraire, la démonstration même prouve que le rapport tend uniformément vers $f(z)$ dans une aire limitée par un contour, pourvu que la dérivée existe. Cette remarque était assurément de celles qui justifient la priorité accordée par l'auteur au point de vue de Cauchy, point de vue que l'autorité de Weierstrass et la belle ordonnance de sa doctrine avaient un peu rejeté dans l'ombre.

La variété des tendances philosophiques est toujours amusante à observer. Dans une Note, qui n'a que quelques lignes et qui n'a aucune importance dans son Livre, M. Whitaker veut prémunir son lecteur contre l'idée que toutes les fonctions sont développables en série de Taylor. Si la température, en un point de la terre, était développable en série de Taylor, suivant les puissances du temps, il suffirait, dit-il, de connaître la température pendant un jour, pour pouvoir la prédire à n'importe quelle époque.

Cette conclusion est suivie d'un point d'exclamation, tant l'auteur est sûr que son absurdité sautera aux yeux du lecteur. Combien n'a-t-on pas rencontré de gens qui voyaient dans le caractère analytique des solutions des équations différentielles la démonstration mathématique du déterminisme, démonstration d'autant plus admirable qu'elle fermait la bouche à ceux qui n'entendent point les Mathématiques.

« Les exemples qu'on prend pour prouver d'autres choses si l'on voulait prouver les exemples, on prendrait les autres choses pour en être les exemples; car comme on croit toujours que la difficulté est à ce qu'on veut prouver, on trouve les exemples plus clairs et aidant à le montrer. Ainsi, quand on veut montrer une chose générale, il faut en donner la règle particulière d'un cas; mais si l'on veut montrer un cas particulier, il faudra commencer par la règle générale... » Et encore le scepticisme de Pascal ne va pas assez

loin; la méthode qu'il dévoile peut servir à prouver le pour et le contre, que les fonctions ne sont pas développables en série de Taylor, et que l'Univers est entièrement déterminé.

A la vérité, il est très certain que nous sommes incapables de connaître complètement un seul phénomène, la température en un point pendant un jour, par exemple, et bien vraisemblable qu'il n'y a pas un seul phénomène qui soit susceptible d'être entièrement défini. Si l'on ne sait pas au juste ce que c'est que la température, il est prématuré de se demander si elle est développable en série de Taylor, et s'il est possible de la prévoir au bout d'un temps quelconque. Au point de vue strictement scientifique, le problème du déterminisme ne se pose même pas.

Après avoir tiré du théorème de Cauchy les séries de Taylor et de Laurent, l'auteur s'arrête un instant sur la notion de convergence uniforme, pour montrer le rôle que joue cette notion dans le maniement des séries, sur l'application du théorème de Cauchy à la détermination des intégrales définies et sur divers modes de développement en séries. Signalons, dans le Chapitre relatif à ce dernier sujet, outre la formule générale que l'on doit à M. Darboux, la formule d'Euler-Maclaurin, celles de M. Burmann et de M. Teixeira, et la formule de Lagrange, qui apparaît comme un cas particulier de ces dernières.

Un important Chapitre est consacré à la série de Fourier. L'auteur y reprend une démonstration, dont le principe est dû à Cauchy, fondée sur le caractère analytique de la fonction de ζ

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{e^{2\pi\zeta} - 1} \int_0^z e^{\zeta(z-t)} f(t)\, dt;$$

il expose aussi l'analyse de Dirichlet et les propriétés fondamentales des séries trigonométriques.

Un court Chapitre sur les expressions asymptotiques termine la première Partie.

La seconde Partie est, comme on l'a dit plus haut, consacrée à l'étude de fonctions particulières : C'est tout d'abord la fonction Γ, puis les fonctions de Legendre, les fonctions hypergéométriques, les fonctions de Bessel. Signalons à propos des fonctions hypergéométriques celles que l'auteur désigne sous le nom de *générales*

et qui vérifient l'équation différentielle, due à M. Papperitz,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$$

où l'on a posé

$$A = \frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c},$$

$$B = \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)^2}$$

en désignant par a, b, c, α, β, γ, α', β', γ' des constantes qui vérifient la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 1.$$

Cette équation reste invariante quand on y fait, sur la variable x et les points de ramification a, b, c, la même transformation homographique : elle est vérifiée par une intégrale de la forme

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\int_C \varphi(t)\,dt$$

où

$$\varphi(t) = (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(x-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

et où C est un contour fermé du plan des t, tel que $\varphi(t)$ reprenne la même valeur au point d'arrivée qu'au point initial, ou un arc de courbe tel qu'à l'origine et à l'extrémité, la fonction

$$\varphi(t)\frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{x-t}$$

ait des valeurs égales.

M. Whitaker traite ensuite des solutions des équations

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} - \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + V = 0,$$

et finit par les fonctions elliptiques, auxquelles il consacre trois

Chapitres. Il prend pour point de départ la fonction $\wp$ de Weierstrass, définie par la série à double entrée qui met en évidence son caractère doublement périodique; c'est d'ailleurs au moyen d'une série de la même nature que, dans le Chapitre suivant, il définira la fonction $\operatorname{sn} z$; il passe en revue les propriétés fondamentales des fonctions $\wp z$, $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ et établit, dans le dernier Chapitre, les propriétés générales des fonctions elliptiques.

J. T.

Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et Communications publiés par *E. Duporcq*. 1 vol in-8°, 455 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

Les Congrès scientifiques permettent aux savants de se connaître; il est entendu que c'est là leur principal objet. Que chacun désire connaître les traits, la voix, les gestes, la façon d'être de ceux dont il a étudié les travaux, admiré les découvertes, cela est fort naturel, et l'on est reconnaissant à ceux qui sont venus, simplement de ce qu'ils se sont laissés voir, entendre, serrer les mains. Désormais, un mémoire qu'on lira éveillera une physionomie, un son de voix; un peu de sympathie humaine se mêlera à l'étude, qui n'y perdra rien.

M. Duporcq, qui, avant et pendant le Congrès, s'était dépensé sans compter, a pris encore soin d'en publier les procès-verbaux, les conférences et les communications; grâce à lui, l'importance scientifique du second Congrès international des Mathématiciens apparaît clairement. En lisant le beau volume à la publication duquel M. Duporcq a consacré tous ses soins, ceux qui ont assisté à ce Congrès sentiront se raviver leurs souvenirs, étudieront à loisir les communications qui les avaient intéressés, ou celles qu'ils n'avaient pu entendre; ceux mêmes qui n'avaient pu assister au Congrès pourront profiter de ce qui s'y est dit et se promettront sans doute de s'arranger pour ne pas manquer la prochaine réunion.

On trouvera, après la liste des membres, un compte rendu sommaire de l'histoire du Congrès et les procès-verbaux des séances, les Conférences de MM. Cantor, Volterra, Hilbert, Poincaré, Mittag-Leffler : M. Cantor, dont la bonne humeur est robuste et la science impeccable, a retracé dans un tableau amusant et instructif l'histoire des historiens de la Mathématique : il n'a oublié dans ce tableau que le plus grand de ces historiens. M. Volterra, dans un langage très élégant, a raconté la vie et caractérisé l'œuvre de Brioschi, de Betti et de Casorati. Il a apporté à ces trois éminents géomètres le tribut de reconnaissance de l'École italienne, qu'il représentait si brillamment au Congrès. M. Hilbert a agité et classé les problèmes futurs des mathématiques. Son important travail ne peut avoir qu'une heureuse influence sur l'étude de ces problèmes, à la solution desquels on peut compter que M. Hilbert contribuera, et il faut savoir gré à M. Laugel de nous en avoir donné une version française. M. Poincaré a parlé du rôle, de la logique et de l'intuition en mathématique; nul, assurément, ne connaissait mieux le double sujet et n'était capable d'en parler avec plus de finesse et de profondeur. M. Mittag-Leffler est, sans doute, l'un des géomètres qui ont le mieux pénétré la pensée de Weierstrass et il a été, pendant de longues années, le collègue et l'ami de Sonia Kowalevski; il était désigné pour parler de l'un et de l'autre et les faire revivre; les pages de la correspondance de Weierstrass qu'il a lues sont singulièrement vivantes, et tout le monde s'est réjoui de la lecture de ces lettres intimes, puisque quelques morts seulement y sont un peu maltraités.

Les nombreuses Communications que contient le Compte rendu témoignent de l'importance du Congrès : malgré l'intérêt qu'elles présentent, elles sont, le plus souvent, trop courtes pour être analysées en détail : l'énoncé de leurs titres suffira pour que tous les mathématiciens veuillent posséder le volume qui les contient :

Section I. — *Arithmétique et Algèbre*

Léon Autonne. — Sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quaternaire régulier.

Harris Hancock. — Remarques sur les systèmes modulaires de Kronecker.

Helge von Kock. — Sur la distribution des nombres premiers.

Raoul Perrin. — Sur le covariant résolvant de la forme binaire du cinquième ordre.

L.-E. Dickson. — Les systèmes connus de groupes simples et leur inter-isomorphisme.

Artemas Martin. — Une méthode pour calculer le logarithme vulgaire d'un nombre sans faire usage d'aucun logarithme.

Alexandro Padoa. — Un nouveau système de postulats irréductibles pour l'Algèbre.

Artemas Martin. — Une méthode rigoureuse pour trouver des nombres bicarrés dont la somme sera un nombre bicarré.

Section II. — *Analyse.*

Tikhomandritzky. — Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieurs variables.

Mittag-Leffler. — Sur une extension de la série de Taylor.

E. Borel. — Remarques relatives à la Communication de M. Mittag-Leffler.

E. Jahnke. — Nouveaux systèmes orthogonaux pour les dérivés des fonctions Θ de deux arguments.

Jules Drach. — Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Section III. — *Géométrie.*

E. O. Lovett. — Sur les transformations de contact entre les lignes droites et les sphères.

F. J. Vaes. — Sur les corps réguliers et semi-réguliers.

Alexander Macfarlane. — Application de l'analyse spatiale aux coordonnées curvilignes.

Federico Amodeo. — Coup d'œil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.

Irving Stringham. — Transformations orthogonales dans l'espace elliptique ou hyperbolique.

V. Jamet. — Sur le théorème de M. Salmon, concernant les cubiques planes.

A. Padoa. — Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne.

SECTION IV. — *Mécanique.*

Jean Boccardi. — Remarques sur le calcul des perturbations spéciales des petites planètes.

J. Hadamard. — Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.

V. Volterra. — Sur les équations aux dérivées partielles.

SECTION V. — *Bibliographie et Histoire.*

R. Fujisawa. — Note sur les Mathématiques dans l'ancienne École japonaise.

Angel Gallardo. — Les Mathématiques et la Biologie.

SECTION VI. — *Enseignement et Méthodes.*

Zoel G. de Galdeano. — Note sur la critique mathématique.

Alfredo Capelli. — L'hyper-arithmétique et la direction combinatoire de l'arithmétique ordinaire.

Ed. Maillet. — Sur l'utilité de la publication de certains renseignements bibliographiques en Mathématiques.

Ch. Méray. — Sur la langue internationale auxiliaire de M. le Dr Zamenhof, connue sous le nom d'*Esperanto.*

G. Veronese. — Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement.

J. T.

FREYCINET (C. DE). — DE L'EXPÉRIENCE EN GÉOMÉTRIE. 1 vol. in-8°; XIX-178 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Pendant que les uns s'efforcent de scruter les axiomes de la Géométrie, d'en fixer l'indépendance ou l'*interdépendance*, et s'appliquent à ne raisonner que sur des symboles abstraits, pour ne permettre à aucune intuition spatiale de pénétrer subrepticement dans leurs raisonnements, que d'autres poursuivent avec patience l'étrange construction de quelqu'une de ces Géométries où l'on a laissé tomber l'un ou l'autre des axiomes de la Géométrie ordinaire, et s'efforcent de lui conférer une sorte de légitimité à l'existence logique, non seulement par la cohérence même des déductions, mais par une correspondance entre l'espace imaginaire où ils se meuvent, *sicut chimæra bombynans in vacuo,* et cet espace auquel nous avons l'habitude d'attribuer quelque réalité, M. de Freycinet, dans un livre qui n'intéressera pas moins les philosophes que les mathématiciens, et dont le style élégant, distingué et modéré charmera les uns et les autres, se plaît à rappeler l'origine expérimentale des concepts géométriques. Ce n'est pas que l'éminent penseur condamne les recherches auxquelles je viens de faire allusion; pour le faire, il respecte trop la Science et la liberté des savants, mais ces géométries, qui portent toutes le nom d'un grand mathématicien, affublé d'une négation par devant, ne sont pas pour lui de la géométrie, tout court : en quoi, il est facile de se ranger à son avis.

Que l'expérience, ou l'intuition, aient une large part dans la formation des concepts fondamentaux de la Géométrie, c'est sans doute ce que l'on ne contestera pas à M. de Freycinet. Peut-être conviendrait-il de distinguer l'une de l'autre, et d'accorder aussi que l'intuition, si même elle est impossible sans aucune expérience, contient un élément *a priori*, une prédisposition de notre esprit, logiquement antérieure à notre expérience. Ce n'est pas ici le lieu d'agiter (sans la résoudre) la question de savoir si cette prédisposition, chez chacun de nous, peut provenir d'une longue suite d'expériences ancestrales, déposées dans les individus, lentement accumulées dans la race : nous naissons tels quels, avec des

puissances et des tendances que notre expérience, à nous (si nous avons quelque individualité), n'a pas formées et qui ne se révéleront à nous-mêmes que par notre propre expérience. Sans doute, nous rencontrerons, dans le monde extérieur, des objets qui éveillent en nous les idées de ligne droite, de point ou de plan; et, si nous étions enfermés en nous-mêmes, ces idées n'auraient pu naître en nous; mais combien ces concepts, dans leur pureté géométrique, sont éloignés des objets réels, à propos desquels ils se sont éveillés! Cette pureté même ne leur permet aucune réalité, en dehors de notre pensée; nous n'arrivons à les construire qu'en faisant abstraction des conditions de la réalité extérieure. Quand je réduis, par la pensée, le point matériel à n'être plus qu'un point géométrique, je lui refuse par cela même la possibilité d'éveiller en moi une sensation.

Si les expériences sur lesquelles se fondent les concepts de la Géométrie sont innombrables, il faut reconnaître aussi que la grossièreté de ces expériences s'oppose à l'absolue précision de ces concepts; on ne s'est jamais avisé d'installer des expériences de précision, qui se rapportent, ni aux concepts fondamentaux de la Géométrie, ni à leurs conséquences lointaines; je ne répondrais pas, s'il tombait entre les mains d'un médecin aliéniste, du sort d'un physicien qui poursuivrait des mesures délicates pour reconnaître si le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est bien égal à la somme des carrés des autres côtés; et si ce physicien venait nous annoncer que la différence entre les résultats de l'observation et du calcul est supérieure aux erreurs possibles d'expérience, on le regarderait avec un sourire attristé et l'on ne s'aviserait pas de voir, dans la différence annoncée, l'influence maligne de cette contingence, qu'il faut pourtant bien admettre dans les lois que nous tirons de l'expérience. Au contraire, on est bien aise de savoir que MM. Sanford et Ray, ayant effectué dans des vases fermés des opérations chimiques, ont trouvé qu'aucune différence de poids plus grande que $\frac{1}{2\,500\,000}$ n'est produite par la double décomposition réalisée [1]. Je crois bien que depuis 1897, époque à laquelle remontent les expériences de MM. Sanford et Ray, on a continué à faire des expériences dans le même sens. En

[1] J. Perrin, *Traité de Chimie physique*.

supposant, comme je le souhaite bien vivement, qu'elles donnent toujours le même résultat, combien, dans l'hypothèse évolutionniste, faudra-t-il de générations de physiciens, pour que ceux-ci en viennent à attribuer au principe de la conservation de la masse la même évidence qu'aux théorèmes de la Géométrie? Malgré tout, il est difficile de se débarrasser des formules de Kant, ou même de Leibnitz, et tout en reconnaissant la part de l'expérience, de ne pas avouer que nous sommes, nous-mêmes, pour beaucoup dans notre science, qui n'est pas une simple somme de faits expérimentaux.

Si le livre de M. de Freycinet ramène notre pensée vers des problèmes philosophiques qu'il sera toujours utile de méditer, puisqu'on n'arrivera sans doute jamais à les résoudre, il ne donne pas moins à réfléchir sur la façon dont il convient d'enseigner la Géométrie. Bien que l'auteur ne semble nullement s'être proposé de traiter ce sujet, je crois qu'on pourrait tirer grand parti de ses ingénieuses observations.

Pour ce qui concerne l'enseignement à donner à des commençants, la conclusion à tirer de cette critique à laquelle ont été soumis les axiomes et les postulats de la Géométrie semble évidente. D'une part, il est impossible de fonder un enseignement purement logique de la Géométrie sur un très petit nombre d'axiomes bien clairs, immédiatement saisis dans leur forme abstraite; d'autre part, on risquerait d'affoler les enfants en leur débitant une liste complète (ou prétendue telle) de ces axiomes, et l'on y parviendrait sûrement en discutant devant eux l'indépendance ou l'interdépendance de ces axiomes. Si tout cela est certain, la recherche d'une grande rigueur logique dans un premier enseignement des éléments de la Géométrie apparaît comme inutile; et il se pourrait bien que cette inutilité fût vaguement sentie par les écoliers, qui se demandent de quoi on leur parle et où on les mène, et qui trouvent les énoncés beaucoup plus clairs que les démonstrations. Il ne serait peut-être pas difficile à des maîtres exercés, qui savent observer ceux qui leur sont confiés, après avoir habitué leurs élèves à la connaissance des formes géométriques, de démêler celles des propositions du début de la Géométrie qu'on peut, sans inconvénient, regarder comme intuitives; je n'aurais aucune peine, pour ma part, à accorder à M. de Freycinet

qu'on peut ranger parmi celles-là l'équidistance de deux parallèles, et je crois même qu'un enfant, habitué à manier la règle et l'équerre, accorderait assez volontiers à son maître l'égalité des angles correspondants. De cette façon, on amènerait les élèves à comprendre la nature des problèmes géométriques, à rapporter les uns à l'art du dessin, les autres à l'objet primitif de la Géométrie, à la mesure des aires et des volumes. Peut-être faudrait-il reprendre quelque chose de la méthode de ces hindous, qui se contentaient, pour une démonstration, du mot *vois* placé au-dessous d'une figure. Il ne serait pas impossible de montrer que, à procéder ainsi, on ne va pas bien loin, de faire voir par quelques exemples amusants, que l'intuition peut tromper, d'éveiller, à l'heure convenable, des inquiétudes, de faire désirer aux élèves une première revision des principes, et la fixation d'une liste, non pas encore des axiomes, mais de propositions fondamentales, dont le sens serait bien compris, dont les énoncés seraient sus par cœur, sur lesquelles, seules, désormais, il serait permis de s'appuyer pour aller plus loin. Rattacher ces propositions aux axiomes est l'œuvre d'esprits plus formés, déjà aiguisés par l'habitude du raisonnement mathématique; quant à la critique des axiomes, son intérêt est considérable, sans doute, mais elle ne regarde que ceux qui aiment la Science pour elle-même, et je crois bien que la passion pour la Géométrie ne s'éveille pas chez les jeunes esprits, à la lecture des premières pages des meilleurs Traités.

Je demande pardon au lecteur de l'avoir moins entretenu du livre de M. de Freycinet que des réflexions que sa lecture m'a suggérées; aussi bien ce livre se recommande-t-il assez par le nom de son auteur, et les qualités de l'exposition risquent-elles de désespérer ceux qui s'efforceraient de la résumer. Et puis, le but de pareils livres n'est-il pas de faire réfléchir ceux qui les lisent?

J. T.

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE DES SURFACES.

PAR M. P. STAECKEL, à Kiel.

On sait que la Géométrie différentielle des surfaces se rattache à la théorie des formes différentielles binaires :

$$\begin{aligned}
A &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,\\
B &= dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = -\mathcal{L}\,du^2 - 2\mathcal{M}\,du\,dv - \mathcal{N}\,dv^2,\\
\Gamma &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2.
\end{aligned}$$

Posons

$$\frac{1}{R_1 R_2} = K, \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H$$

et nous aurons la relation fondamentale

$$KA + HB + \Gamma = 0,$$

qui entraîne les équations

$$\mathfrak{E} = H\mathcal{L} - K\mathcal{E}, \qquad \mathfrak{F} = H\mathcal{M} - K\mathcal{F}, \qquad \mathfrak{G} = H\mathcal{N} - K\mathcal{G}.$$

C'est en démontrant ces trois équations par des calculs assez longs qu'on est parvenu à la relation entre A, B et Γ. Voilà une démonstration directe et simple.

En combinant les formules d'Olinde Rodrigues

$$d_1 x + R_1\, d_1 X = 0, \qquad d_2 x + R_2\, d_2 X = 0,$$

avec les équations

$$dx = d_1 x + d_2 x, \qquad dX = d_1 X + d_2 X,$$

on obtient les identités

$$dx + R_2\, dX = \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) d_1 x,$$

$$dx + R_1\, dX = \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) d_2 x.$$

Il est clair qu'on peut remplacer x et X par y et Y, z et Z.

Appliquons les identités que nous venons de déduire à l'équation

$$d_1 x\, d_2 x + d_1 y\, d_2 y + d_1 z\, d_2 z = 0$$

qui s'ensuit de l'orthogonalité des lignes de courbure. Nous aurons

$$\begin{aligned}(dx + R_2\, dX)(dx + R_1\, dX) + (dy + R_2\, dY)(dy + R_1\, dY)\\ + (dz + R_2\, dZ)(dz + R_1\, dZ) = 0,\end{aligned}$$

équation qui, divisée par $R_1 R_2$, prendra la forme

$$KA + HB + \Gamma = 0.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

MITTHEILUNGEN *der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe*, begründet von O. Böklen, herausgeg. von A. Schmidt, A. Haas u. E. Wölffing. 2. Serie, 4. Bd. 3. Hefte. Gr. in-8°, 32 p. Stuttgart, Metzler. 3 m.

SCHEFFERS (G.). — *Anwendung der Differential- u. Integral-Rechnung auf Geometrie.* 2. Bd. *Einführung in die Theorie der Flächen.* Gr. in-8°, x-518 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 13 m.; relié, 14 m.

VOGLER (CH.-A.). — *Johann-Heinrich Lambert u. die praktische Geometrie.* (Festrede.) Gr. in-8°. 21 p. Berlin, Parey. 1 m.

APPELL (P.). — *Cours de Mécanique, à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures.* In-8°, 275 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CZUBER (E). — WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND IHRE ANWENDUNG AUF FEHLERAUSGLEICHUNG, STATISTIK UND LEBENSVERSICHERUNG (t. IX de la *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften*, mit Einschluss ihrer Anwendungen). 1 vol. in-8°, XV-592 pages. Leipzig, Teubner; 1902-1903.

Nous avons eu l'occasion de parler ici récemment de la traduction qu'a faite M. le capitaine Schuermans des *Probabilités et moyennes géométriques* de M. Czuber, et de l'intérêt qu'offrait cette traduction. Si la grosseur du présent Traité ne devait effrayer ni le traducteur, ni l'éditeur, et si l'on ne tenait compte que du service rendu à des gens qui, malheureusement, ne peuvent pas être bien nombreux, c'est du présent Traité qu'il faudrait souhaiter la traduction, précisément parce que, en raison même du sujet, des discussions subtiles que comportent bien des questions, des excursions nécessaires dans d'autres domaines que celui des mathématiques, la lecture n'en peut être aisée pour ceux qui ne possèdent pas à fond la langue dans laquelle il est écrit. Quant à l'intérêt du sujet, il est considérable. Le calcul des probabilités, quand on le borne à des questions de jeu, est fort propre à amuser les esprits curieux et à exercer leur finesse; il pose d'ailleurs de très intéressants problèmes mathématiques, dont la solution est indispensable à ceux qui veulent aller plus loin. Il en est de même de ces *probabilités géométriques*, auxquelles d'ailleurs M. Czuber a laissé, dans le présent Livre, une place importante, et les petits problèmes de calcul intégral auxquels elles conduisent sont d'excellents exercices, sans parler de cette habileté qu'il faut déployer pour traduire en langage purement mathématique les énoncés qui concernent la probabilité. Les études de cette nature sont excellentes, mais valent moins par elles-mêmes que par la vigueur et la finesse qu'elles donnent à l'esprit, et par l'ouverture qu'elles offrent pour aborder des problèmes d'une tout autre portée.

C'est à ces problèmes, à la théorie des erreurs d'observation, à la

discussion des données de la statistique, des recherches sur la mortalité, à la théorie des assurances sur la vie, des rentes viagères, etc., qu'est consacrée la plus grande partie du Livre de M. Czuber. On sent d'ailleurs que l'étude et le développement de ces sujets a été pour l'auteur une œuvre de prédilection : la clarté de l'exposition, le luxe d'informations et de renseignements bibliographiques, la discussion précise des faits et des méthodes, poussée jusqu'aux applications numériques ou graphiques, tout dénote l'œuvre d'un savant qui a consacré une bonne partie de sa vie à ces matières difficiles, et qui a su contribuer lui-même à leur élaboration. Il est inutile de recommander cette œuvre aux actuaires des différents pays : c'est pour eux qu'elle semble écrite.

Voici comment se divise en gros le Livre de M. Czuber.

La première Partie (p. 1-205) contient les éléments de la théorie du calcul des probabilités : détermination directe et indirecte de la probabilité; application à quelques questions de jeu; probabilités géométriques; théorèmes de Bernoulli et de Poisson; probabilité des causes; théorèmes de Bayes; espérance mathématique, espérance morale.

La deuxième Partie (p. 206-301) concerne la théorie des erreurs d'observation : loi des erreurs, mesure de la précision; observations directes d'égale ou d'inégale précision; méthode des moindres carrés, etc.

La troisième Partie (p. 302-423) se rapporte à la statistique mathématique : conception de la probabilité dans la statistique; stabilité des rapports, dispersion (Lexis); mortalité, etc.

La quatrième Partie, enfin (p. 424-568) traite des assurances sur la vie : assurances en cas de vie, en cas de mort (rentes ou capital), assurances sur plusieurs têtes, primes, réserves, etc.

Enfin l'Ouvrage se termine par diverses tables numériques; c'est d'abord la table des valeurs de cette fonction

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt,$$

qui joue un rôle si essentiel dans les principales applications du calcul des probabilités; les valeurs de γ vont de centièmes en centièmes de 0 à 4, et de dixièmes en dixièmes de 4 à 4,8; les valeurs de $\Phi(\gamma)$ sont données avec sept décimales jusqu'à $\gamma = 3,45$ et

avec dix décimales pour les valeurs suivantes. Les autres tables sont des tables de mortalité, ou d'invalidité, anglaises ou allemandes.

KŒNIGSBERGER (L.). — HERMANN VON HELMHOLTZ. Erster Band; mit drei Bildnissen. 1 vol. in-8°, XV-375 pages. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1902.

La vie de quelques savants tient tout entière dans leurs œuvres. C'est là qu'il faut aller les chercher, et suivre l'évolution de leur pensée; le reste importe peu et il semble qu'eux-mêmes aient été de cet avis, abîmés qu'ils étaient dans la méditation de ces problèmes, dont la solution était le but unique et comme la raison de leur vie. On se rappelle la réponse de Lagrange à d'Alembert qui lui reprochait de n'avoir pas été averti de son mariage : « Si je ne vous en ai point fait part, c'est qu'il m'a paru que la chose était si indifférente d'elle-même qu'elle ne valait point la peine de vous en entretenir ». De ces savants-là cependant, nous sommes bien aises de savoir quelque petite chose, ne fût-ce que leur indifférence envers leur femme; c'est pure curiosité de notre part, et si nous avons plaisir à contempler leurs traits dans quelque belle gravure, c'est sans doute que nous sommes encore enfoncés dans le culte idolatrique des images : nous ne les honorons point comme ils veulent être honorés.

Mais quand il s'agit d'un homme qui semble n'avoir été indifférent à rien, ni à la philosophie, ni à l'art, ni aux lettres, ni à aucune science, qui, partout, a été un maître, qui a modifié la façon de penser de ses contemporains, et créé un mouvement d'idées qui lui survivra longtemps, on désire le connaître tout entier, non seulement dans ses œuvres écrites, mais dans ses actes et sa vie intime : on veut savoir ce qu'il a fait et ce qu'il a aimé : c'est un de ces rares exemplaires où la famille humaine peut se contempler et s'admirer; il n'en faut rien laisser perdre.

On saura donc gré à M. Kœnigsberger de nous donner une biographie de *Hermann von Helmholtz,* dont il a été longtemps l'ami.

Le premier Volume vient de paraître : le luxe même de l'édition convient au personnage; les portraits dont elle est ornée, qui

nous montrent Helmholtz dans sa jeunesse et sa maturité, réjouiront tous ceux qui se plaisent à voir le noble reflet de la pensée sur un visage humain. On saura gré aussi à la famille de l'illustre savant d'avoir confié à M. Kœnigsberger les précieux documents qu'il a pu utiliser : les lettres de Helmholtz, de ses parents, de ses amis animent le récit de cette vie qu'ont illustrée tant de découvertes scientifiques.

M. Kœnigsberger, après avoir donné d'intéressants détails sur le père et la mère de Helmholtz, nous raconte sa jeunesse et le suit dans toute sa carrière, élève à Berlin de l'Institut médico-chirurgical Frédéric-Guillaume (1838-1842), chirurgien aux hussards de la garde et au régiment des gardes du corps (1843-1848), *Lehrer* à la *Kunstakademie* de Berlin (1848-1849), professeur de physiologie à Kœnigsberg (1849-1855), professeur d'anatomie et de physiologie à Bonn (1855-1858), professeur de physiologie à Heidelberg (1858-1871); c'est à cette date que s'arrête ce premier Volume; quant à la longue liste des travaux accomplis pendant cette période, dans des domaines si variés, si éloignés les uns des autres, elle émerveille le lecteur par le souvenir des découvertes qu'elle évoque.

MÉLANGES.

RECHERCHE ANALYTIQUE SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES;

PAR M. J. DOLBNIA.

1. Admettons que l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (1)$$

peut être réduite en intégrale elliptique au moyen de la substi-

tution

$$(2) \qquad \varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3),$$

où $\varphi(x)$ est un polynome de degré i,

$$(3) \qquad R(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_j)\ldots(x - x_n).$$

Pour déterminer le facteur numérique λ nous admettons dans les équations (1) et (2) $x = \infty$ et trouvons

$$\lambda = \left(\frac{2}{n-2}\right)^2.$$

L'équation (1) nous montre que pour $x = \infty$ nous aurons un développement de x avec la partie principale $(u)^{-\frac{2}{n-2}}$; de l'équation (2) nous aurons un développement de x avec la partie principale $(u)^{-\frac{2}{i}}$; donc

$$i = n - 2.$$

L'équation (1) nous montre également qu'à chaque point de ramification $(x - x_j) = 0$, x est une fonction holomorphe de l'argument u, et la partie principale de développement de $(x - x_j)$ sera $(u - \omega_j)^2$. De l'équation (2) nous aurons

$$\varphi(x_j) + (x - x_j)\varphi'(x_j) + \frac{1}{2}(x - x_j)^2\varphi''(x_j) + \ldots$$
$$= \lambda\left[p(\omega_j) + (u - \omega_j)p'(\omega_j) + \frac{1}{2}(u - \omega_j)^2 p''(\omega_j) + \ldots\right].$$

En posant

$$p'(\omega_j) = 0,$$

nous avons seulement deux cas distincts. Le premier cas, quand $x = x_j$, est un point de ramification, c'est-à-dire une racine de l'équation (3), et le second cas, quand $x = x_j$ est une racine de l'équation

$$(4) \qquad \varphi'(x) = 0.$$

Dans les deux cas ω_j est une demi-période de l'intégrale elliptique u; donc

$$p(\omega_j) = e_j, \qquad \varphi(x_j) = \lambda e_j,$$

e_j étant une racine de l'équation

$$4z^2 - g_2 z - g_3 = 0.$$

Ainsi les racines de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda e_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3,$$

satisfont ou à l'équation (3), ou à l'équation (4); donc

$$(5) \qquad \varphi(x) - \lambda e_j = (x - x'_j)(x - x'_j)\ldots(\xi - x'_j)^2(x + \xi'_j)^2\ldots;$$

où

$$x'_j, \quad x''_j, \quad x'''_j$$

sont les racines de l'équation (3);

$$\xi'_j, \quad \xi''_j, \quad \xi'''_j, \quad \ldots$$

sont celles de l'équation (4).

Comme les équations

$$\varphi(x) - \lambda e_1 = 0, \qquad \varphi(x) - \lambda e_2 = 0, \qquad \varphi(x) - \lambda e_3 = 0$$

ne peuvent pas avoir des racines communes, le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2][\varphi(x) - \lambda e_3]$$

diffère du produit

$$[\varphi'(x)]^2 R(x)$$

par un facteur numérique qui peut être toujours aisément trouvé. Le théorème démontré ci-dessus peut servir pour trouver toutes les intégrales hyperelliptiques réduisant aux elliptiques par des substitutions entières. Le calcul est très simple, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple. — Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d)}} = u;$$

il s'agit de choisir

$$\alpha, \quad \beta, \quad a, \quad b, \quad c, \quad d,$$

de manière que l'intégrale u puisse se réduire à une intégrale

elliptique au moyen d'une substitution entière

$$\varphi(x) = x^5 + kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + q = \lambda p(u, g_2, g_3)\, p'(u, g_2, g_3).$$

En désignant les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4,$$

nous avons les deux combinaisons possibles :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 (x - \alpha), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - \xi_3)^2 (x - \xi_4)^2 (x - \beta), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \varphi(x) - \lambda e_1 = (x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2 (x - \alpha), \\ \varphi(x) - \lambda e_2 = (x - \xi_3)^2 (x - \beta)(x - x_1)(x - x_2), \\ \varphi(x) - \lambda e_3 = (x - \xi_4)^2 (x - x_3)(x - x_4)(x - x_5), \end{cases}$$

où

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5$$

sont les racines du polynome

$$(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d).$$

De la combinaison (I) nous concluons que le produit

$$[\varphi(x) - \lambda e_1][\varphi(x) - \lambda e_2] = \varphi^2(x) + \lambda e_3 \varphi(x) + \lambda^2 e_1 e_2$$

est divisible par

$$\varphi'^2(x) = 5^2 (x^4 + 3ax^2 + 2bx + c)^2.$$

Cette condition nous donne

(1) $b = 0,$ (4) $\lambda^2 e_1 e_2 = \frac{1}{9} d^2 + 4a_5,$

(2) $c = a^2,$ (5) $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + 4a.$

(3) $\lambda e_3 = -\frac{2}{3} d.$

Des équations

$$\lambda e_3 = -\lambda(c_1 + e_2) = -\frac{2}{3} d. \qquad \lambda^2 e_1 c_2 = \frac{1}{9} d^2 + 4a^5$$

nous trouvons

$$\lambda e_1 = \frac{1}{3} d - 2a^2\sqrt{-a}, \qquad \lambda e_2 = \frac{1}{3} d - 2a^2\sqrt{-a};$$

par conséquent

$$(6) \qquad \frac{\lambda^3}{4} g_3 = -\left(\frac{2}{27} d^3 + \frac{8}{3} a^6 d\right),$$

$$(7) \qquad \frac{\lambda^2}{4} g_2 = \frac{1}{3} d^2 - 4a^4.$$

L'intégrale réductible sera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4a^2x^6 - 5ax^5 - 5a^2x - d}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \left(5^4 a^3 - \frac{5^4}{2^2.3} d^2\right) z - \left(\frac{5^6}{6^3} d^3 - \frac{5^6}{6} a^3 d\right)}}.$$

Cette intégrale a une grande analogie avec l'intégrale très connue de M. Hermite (¹).

Citons encore un exemple

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4a^2x^7 - 7ax^6 - 14a^2x^5 - 7a^3x - f}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^2 - 6^4\left(a^7 - \frac{1}{2^2.3^2} f^2\right) z + \frac{7^6}{2.3}\left(a^7 f - \frac{1}{2^2.3^2} f^3\right)}}.$$

Les intégrales réductibles de cette catégorie, facile à former, sont en nombre infini.

2. La théorie que nous venons d'exposer peut être appliquée avec le plus de succès aux intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{R(x)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{R(x)}}.$$

L'intégrale

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}} = u,$$

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 218; Königsberger, *Journal de Borchardt*, t. 85, p. 276; Goursat, *Bull. de la Soc. math.*, t. XIII.

sous certaines conditions, peut être réduite en une intégrale elliptique au moyen de la substitution

$$(7) \qquad \varphi(x) = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

Examinons d'abord le cas le plus simple, quand $\varphi(x)$ est une fonction entière. L'équation (6) nous démontre que pour $x = \infty$ nous avons un développement de x avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{3}{n-3}};$$

n est le degré du polynome $R(x)$; quant à l'équation (7), cette dernière donne pour $x = \infty$ un développement avec la partie principale

$$(u)^{-\frac{3}{i}};$$

i est le degré du polynome $\varphi(x)$; par conséquent

$$i = n - 3.$$

Le polynome $R(x)$ peut renfermer des facteurs linéaires $(x - x_i)$ et des facteurs carrés $(x - x_j)^2$. Au voisinage du point $x - x_i = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_i)$ avec la partie principale

$$(u - \omega_i)^{\frac{3}{2}}.$$

L'équation (7) donne

$$\varphi(x_i) + (x - x_i)\varphi'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)\varphi''(x_i) + \ldots$$
$$= \lambda\left[p'(\omega_i) + (u - \omega_i)p''(\omega_i) + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2 p'''(\omega_i) + \ldots\right].$$

Il est évident que nous devons avoir

$$\varphi(x_i) = \lambda p'(\omega_i), \qquad \varphi'(x_i) = 0, \qquad \varphi''(x_i) \neq 0,$$
$$p''(\omega_i) = 0, \qquad p'''(\omega_i) = 0, \qquad p^{\text{IV}}(\omega_i) \neq 0.$$

D'où il suit que

$$p(\omega_i) = 0, \qquad p'(\omega_i) = \pm\sqrt{-g_3}, \qquad \varphi(x_i) = \pm\lambda\sqrt{-g_3}.$$

L'équation (6) nous montre que pour $x - x_j = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale $(u - \omega_j)^3$:

quant à l'équation (7), cette dernière nous donne :

$$\varphi(x_j) + (x - x_j)\varphi'(x_j) + \frac{1}{2}(x - x_j)^2\varphi''(x_j) + \ldots$$
$$= \lambda\left[p'(\omega_j) + (u - \omega_j)p''(\omega_j) + \frac{1}{2}(u - \omega_j)^2 p'''(\omega_j)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.2.3}(u - \omega_j)^3 p^{\text{IV}}(\omega_j) + \ldots\right];$$

donc

$$\varphi(x_j) = \lambda p'(\omega_j), \qquad \varphi'(x_j) \neq 0,$$
$$p''(\omega_j) = 0, \qquad p'''(\omega_j) = 0, \qquad p^{\text{IV}}(\omega_j) \neq 0,$$
$$p'(\omega_j) = \pm\sqrt{-g_3}, \qquad \varphi(x_j) = \pm\lambda\sqrt{-g_3}.$$

Ainsi toutes les racines du polynome $R(x)$ satisfont à l'équation

$$\varphi^2(x) + \lambda^2 g_3 = 0. \tag{8}$$

En n'admettant que le cas où l'équation (8) *n'a que des racines simples et doubles, posons*

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\alpha)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2\ldots(x - \xi_\beta)^2.$$

Nous avons

$$\alpha + 2\beta = n,$$

et de l'équation (8) nous obtiendrons

$$2\alpha + \beta = 2n - 6;$$

donc

$$\alpha = n - 4, \qquad \beta = 2.$$

Par conséquent, la forme de l'équation (8) est complètement déterminée; ainsi que la forme de l'intégrale réductible. Nous avons en effet

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - x_1)\ldots(x - x_\alpha)(x - \xi_1)^2\ldots(x - \xi_\beta)^2}},$$
$$\varphi^2(x) + \lambda^2 g_3 = (x - x_1)^2\ldots(x - x_\alpha)^2(x - \xi_1)\ldots(x - \xi_\beta),$$
$$\varphi'(x) = A(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-4}),$$
$$\alpha = n - 4, \qquad \beta = 2,$$

A étant un facteur numérique.

Exemple. — Soit $n = 8$; alors

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 2.$$

Étant donnée une intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^4+4ax^3+6bx^2+4cx+d)(x^2+2kx+l)^2}} = u.$$

Il s'agit de trouver les conditions de réductibilité de cette intégrale au moyen d'une substitution entière

$$\varphi(x) = \lambda p'(u, 0, g_3).$$

Il est évident qu'ici

$$\varphi(x) = x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10cx^2 + 5dx + e;$$

$$(x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10cx^2 + 5dx + e)^2 + \lambda^2 g_3$$
$$= (x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d)^2(x^2 + 2kx + l).$$

De cette identité nous aurons :

(1)	$k = a,$	(4)	$d = 4b^2 - 2a^2b = a^4,$
(2)	$l = 86 - 7a^2,$	(5)	$e = 11a^5 - 30a^3b + 20ab^2,$
(3)	$c = 3ab - 2a^3,$	(6)	$\lambda^2 g_3 = -2^7(a^2 - b)^5.$

En ce qui concerne le facteur numérique λ, il peut être trouvé au moyen des équations (6) et (7) dans lesquelles il faut admettre $x = \infty$; ainsi nous trouverons

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n-3}\right)^3;$$

par conséquent

$$g_3 = -\frac{2^9\,5^6}{3^6}(a^2 - b)^5.$$

L'intégrale réductible sera

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{[x^4+4ax^3+6bx^2+4(3ab-2a^3)x+4b^2-2a^2b-a^4][x^2+2ax+8b-7a^2]^2}}$$
$$= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{2^9.5^6}{3^6}(a^2-b)^5}}.$$

La réduction s'effectuera au moyen de la substitution

$$x^5 + 5ax^4 + 10bx^3 + 10(3ab - 2a^3)x^2$$
$$+ 5(4b^2 - 2a^2b - a^4)x + 11a^5 - 30a^3b + 20ab^2 = \frac{3^3}{2.5^3}p'(u, 0, g_3).$$

3. Les plus simples cas de réduction des intégrales

$$(9)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{R(x)}} = u$$

s'effectuent au moyen de la substitution

$$(10)\qquad \varphi(x) = \lambda p^2(u, g_2, 0),$$

où $\varphi(x)$ est un polynome. Il est facile de s'expliquer que, si le degré du polynome $R(x)$ est n, le degré du polynome $R(x)$ sera $(n-4)$. La fonction entière $R(x)$ peut avoir des facteurs de la forme $(x-x_i)$, ou $(x-x_j)^3$, ou enfin $(x-x_k)^2$. L'équation (9) nous montre qu'au voisinage du point $x-x_i=0$ nous aurons le développement de $(x-x_i)$ avec la partie principale $(u-\omega_i)^3$. L'équation (10) nous donne

$$\varphi(x_i)+(x-x_i)\varphi'(x_i)+\frac{1}{2}(x-x_i)^2\varphi''(x_i)+\frac{1}{1.2.3}(x-x_i)^3\varphi'''(x_i)+\ldots$$
$$=\lambda\left[p(\omega_i)+(u-\omega_i)p'(\omega_i)+\frac{1}{2}(u-\omega_i)^2p''(\omega_i)+\ldots\right]^2.$$

D'où il suit que

$$\varphi(x_i)=0,\qquad \varphi'(x_i)=0,\qquad \varphi''(x_i)=0,\qquad \varphi'''(x_i)\neq 0;$$
$$p(\omega_i)=0,\qquad p'(\omega_i)=0,\qquad p''(\omega_i)\neq 0.$$

Donc $x=x_i$ est une racine de l'équation

$$\varphi(x)=0.$$

et $\varphi(x)$ doit avoir la forme

$$\varphi(x)=(x-x_i)^3\varphi_1(x);\qquad \varphi_1(x_i)\neq 0.$$

Au voisinage du point de ramification $x=x_j$ nous aurons un développement de $(x-x_j)$ avec la partie principale $(u-\omega_j)^4$.

De l'équation (10) nous déduisons

$$\varphi(x_j)+(x-x_j)\varphi'(x_j)+\frac{1}{2}(x-x_j)^2\varphi''(x_j)+\ldots$$
$$=\lambda\left[p(\omega_j)+(u-\omega_j)p'(\omega_j)+\frac{1}{2}(u-\omega_j)^2p''(\omega_j)+\ldots\right]^2;$$

ce qui nous montre que $x=x_j$ satisfait aux conditions

$$\varphi(x_j)=0,\qquad \varphi'(x_j)\neq 0.$$

donc x_j est une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

et $\varphi(x)$ doit admettre la forme suivante

$$\varphi(x) = (x - x_j)\varphi_2(x); \qquad \varphi_2(x_j) \neq 0.$$

Au voisinage du point de ramification $x = x_k$ nous aurons

$$p(\omega_k) \neq 0, \qquad \varphi(x_k) = \lambda p^2(\omega_k), \qquad \varphi'(x_k) \neq 0, \qquad p'(\omega_k) = 0;$$

donc

$$\varphi(x_k) = \frac{1}{4}\lambda g_2.$$

Si

$$R(x) = (x^\alpha + \ldots)(x^\beta + \ldots)^3(x^\gamma + \ldots)^2,$$

la forme la plus simple du polynome $\varphi(x)$ sera

$$\varphi(x) = (x^\alpha + \ldots)^3(x^\beta + \ldots).$$

Par conséquent

$$\alpha + 3\beta + 2\gamma = n,$$
$$3\alpha + \beta = n - 4.$$

Exemple. — Soit $n = 8$; un cas seul y est possible

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2.$$

Étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3(x^2+2cx+d)^2}} = u.$$

nous avons

$$\varphi(x) = (x-a)^3(x-b) = \lambda p^2(u), \qquad \lambda = \left(\frac{4}{n-4}\right)^2 = 1.$$

En différentiant cette égalité, élevant le résultat obtenu au quatrième degré, nous obtiendrons

$$\left(x - \frac{a+3b}{4}\right)^2(x^2+2cx+d) = (x-a)^3(x-b) + \frac{1}{4}g_2.$$

Ce qui nous donne

$$(1)\quad c = \frac{b-5a}{4}, \qquad (3)\quad g_3 = -\frac{3^3}{4^3}(a^2-b)^4.$$

$$(2)\quad d = \frac{27a^2-15ab+3b^2}{16},$$

Par conséquent

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)^3\left[x^2+\frac{b-5a}{2}x+\frac{27a^2-14ab+3b^2}{16}\right]^2}}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-\frac{3^3}{4^3}(a^2-b)^4}}.$$

Citons encore deux exemples

$$(\mathrm{I})\quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+a)(x^3+3ax^2+3a^2x+b)^3}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-\frac{3^4}{2^4}(a^3-b)^2}}.$$

La réduction s'effectue à l'aide de la substitution

$$\varphi(x) = (x+a)^3(x^3+3ax^2+3a^2x+b) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 p^2(u, g_2, 0).$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2+2ax+b)[x^4+4ax^3+(3a^2+b)x^2+(6ab-2a^3)x+(a^4-3a^2b+3b^2)]}} \\ \displaystyle= \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3-\frac{3^4}{2^2}(a^3-b)^2}}. \end{cases}$$

La réduction s'effectue à l'aide de la substitution

$$\varphi(x) = (x^2-2ax+b)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 p^2(u, g_2, 0).$$

4. Les intégrales de la forme

$$(11)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt[6]{R(x)}} = u$$

peuvent être réduites aux intégrales elliptiques au moyen de la substitution

$$(12)\qquad \varphi(x) = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

Si $\varphi(x)$ est un polynome, son degré doit être $(n-6)$. Il est aisé de se convaincre que $R(x)$ ne peut contenir des facteurs linéaires aux degrés premier et cinquième. En effet, si $R(x)$ contient le facteur $(x-x_i)$, conformément à l'équation (11), nous aurons un développement de $(x-x_i)$ avec la partie principale $(u-\omega_i)^{\frac{6}{5}}$.

L'équation (12) nous donne

$$(13)\quad \begin{aligned} &\varphi(x_i)+(x-x_i)\varphi'(x_i)+\ldots+\frac{(x-x_i)^5}{1.2.3.4.5}\varphi^{\text{v}}(x_i)+\ldots \\ &=\lambda\left[p(\omega_i)+(u-\omega_i)p'(\omega_i)+\frac{1}{2}(u-\omega_i)^2p''(\omega_i)+\frac{1}{1.2.3}(u-\omega_i)^3p'''(\omega_i)+\ldots\right]^3. \end{aligned}$$

Pour que ledit développement, avec la partie principale $(u-\omega)^{\frac{6}{5}}$, puisse avoir lieu, il faut que nous ayons simultanément

$$p(\omega_i)=0,\qquad p'(\omega_i)=0,\qquad p''(\omega_i)=0,$$

ce qui, évidemment, ne peut avoir lieu. De même nous pourrons nous convaincre que $R(x)$ ne peut contenir des facteurs de la forme $(x-x_i)^5$. Si $R(x)$ contient un facteur de la forme $(x-x_i)^2$, conformément à l'équation (12), au voisinage du point $x-x_i=0$ doit avoir lieu un développement de $(x-x_i)$ avec la partie principale $(u-\omega_i)^{\frac{3}{2}}$. L'équation (13) nous montre que, pour que ce cas puisse avoir lieu, il faut avoir

$$\varphi(x_i)=0,\qquad \varphi'(x_i)=0,\qquad \varphi''(x_i)\neq 0,$$
$$p(\omega_i)=0,\qquad p'(\omega_i)\neq 0.$$

Par conséquent, il faut qu'à chaque facteur de la fonction $R(x)$ de la forme $(x-x_i)^2$ corresponde un facteur $(x-x_i)^2$ de la fonction $\varphi(x)$. Admettons maintenant que $R(x)$ contienne le facteur $(x-x_j)^4$. L'équation (11) nous montre qu'au point de ramification $x-x_j=0$ nous aurons un développement de $(x-x_j)$ avec la partie principale $(u-\omega_j)^3$. Donc il en suit

$$\varphi(x_j)=0,\qquad \varphi'(x_j)\neq 0,\qquad p(\omega_j)=0,\qquad p'(\omega_j)\neq 0.$$

Admettons enfin que $R(x)$ contienne un facteur $(x-x_k)^3$. Au voisinage du point de ramification $x-x_k=0$ nous avons un développement de $(x-x_k)$ avec la partie principale $(u-\omega_k)^2$;

donc

$$\varphi(x_k) = \lambda p^3(\omega_k), \qquad p'(\omega_k) = 0;$$

donc

$$\varphi(x_k) - \frac{1}{4}\lambda g_3 = 0,$$

par conséquent le polynome $\varphi(x) - \frac{1}{4}\lambda g_3$ doit être divisible par tous les facteurs $(x - x_k)$. En désignant par α le nombre des facteurs doubles du polynome $R(x)$, par β le nombre des facteurs triples et par γ le nombre des facteurs quatruples, nous obtiendrons

$$R(x) = (x^\alpha - \ldots)^2 (x^\beta + \ldots)^3 (x^\gamma - \ldots)^4.$$

La forme la plus simple de $\varphi(x)$ sera

$$\varphi(x) = (x^\alpha - \ldots)^2 (x^\gamma - \ldots).$$

Les nombres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

satisfont aux équations

$$2\alpha + 4\beta + 3\gamma = n, \qquad 2\alpha + \beta = n - 6.$$

Exemple. — Soit $n = 9$. Nous avons

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1, \qquad \lambda = \left(\frac{6}{n-6}\right)^6 = 2^6.$$

Nous aurons l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)(x-c)^3}} = u.$$

Admettons

$$(x-a)^2(x-b) = \lambda p^3(u, 0, g_3).$$

De cette équation nous obtiendrons

$$\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)^2 (x-c) = \left[(x-a)^2(x-b) - \frac{1}{4}g_3\lambda\right].$$

D'où il suit que

$$(1) \quad c = \frac{4a-b}{3}, \qquad (2) \quad g_3 = -\frac{1}{4}(a-b)^3.$$

Nous avons

$$\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+a)^2(x+b)^3\left(x+\frac{4a-b}{3}\right)^3}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3+\frac{1}{4}(a-b)^3}}.$$

5. Passons maintenant à l'étude des conditions de réductibilité des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques, au moyen des substitutions fractionnaires et rationnelles. Étudions l'intégrale

$$(14) \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+x^4+bx^3+cx^2+dx+e}} = u.$$

Admettons que la réduction puisse se faire au moyen de la substitution suivante :

$$(15) \qquad \varphi(x) = \frac{f_\alpha(x)}{f_\beta(x)} = \lambda\, p(u, g_2, g_3),$$

où α, β sont les degrés du polynome $f_\alpha(x)$, $f_\beta(x)$. En admettant dans l'équation (14) $x=\infty$, nous verrons que x se développe en une série avec la partie principale u^{-2}. L'équation (15) nous montre que la partie principale du même développement sera $(u)^{-\frac{2}{\alpha-\beta}}$; donc

$$\alpha-\beta=1.$$

Il suit de l'équation (14) qu'au voisinage du point $x=0$ nous avons un développement de x avec la partie principale $u^{\frac{1}{2}}$. L'équation (15) nous donne

$$\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\varphi''(0)+\ldots=\lambda[p(\omega_0)+(u-\omega_0)p'(\omega_0)+\ldots].$$

d'où il suit que

$$(16) \qquad \varphi'(0)=0, \qquad \varphi''(0)\neq 0.$$

En indiquant les racines de l'équation

$$(17) \qquad f_\beta(x)=0$$

par

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_j,\quad \ldots,\quad x_\beta,$$

nous verrons que, pour $x = x_j$, nous avons nécessairement $u = 0$ et qu'au voisinage du point $x - x_j = 0$ nous aurons un développement de $(x - x_j)$ avec la partie principale u^2. Il en résulte que toutes les racines simples de l'équation (17) sont des points de ramification. Les racines doubles de l'équation (17) ne sont que des points ordinaires. L'équation (17) ne peut pas contenir de racines de plus haute multiplicité. Nous n'étudierons que le cas où l'équation (17) ne contient pas de racines multiples. Dans ce cas, la fonction $f_\beta(x)$ est un diviseur du polynome

$$(x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e).$$

Il faut donc étudier tous les cas qui s'y rapportent.

Premier cas. — Étant donnée une intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+cx+d)}} = u,$$

il s'agit de trouver les conditions de réductibilité de cette intégrale à une intégrale elliptique au moyen de la substitution

$$\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + a} = \lambda(pu - e_1).$$

On voit que $\lambda = 4$. Vu l'équation (16) nous aurons

$$a\alpha - \beta = 0, \qquad \beta = a\alpha;$$

par conséquent

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2 - \alpha x + a\alpha}{x + a} &= 4(pu - e_1),\\ \frac{x^2 - [\alpha - 4(e_1 - e_2)]x - [a\alpha - 4(e_1 - e_2)]}{x + a} &= 4(pu - e_2),\\ \frac{x^2 - [\alpha + 4(e_1 - e_3)]x + [a\alpha - 4(e_1 - e_3)]}{x + a} &= 4(pu - e_3). \end{aligned}\right.$$

Puisque, en outre du point $x + a = 0$, il existe encore quatre points de ramification, déterminés par l'équation

$$(19)\qquad x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

le numérateur d'une des formules (18) doit être un carré parfait; tandis que le produit des deux autres doit être égal au poly-

nome (19). Si

$$\left\{x^2+[\alpha+4(e_1-e_2)]x+[a\alpha+4a(e_1-e_2)]\right\}$$
$$\times\left\{x^2+[\alpha+4(e_1-e_3)]x+[a\alpha+4a(e_1-e_3)]\right\}=x^4+bx^2+cx+d,$$

nous savons que

$$x^2+\alpha x+a\alpha$$

est un carré parfait; donc

$$\alpha=4a.$$

En outre nous trouverons

$$(1)\qquad e_1=-\frac{2}{3}a,\qquad\qquad (4)\quad c=2ab,$$

$$(2)\quad -g_3=\frac{8}{27}a^3-\frac{1}{6}ab,\qquad (5)\quad d=a^2b.$$

$$(3)\qquad g_2=\frac{4}{3}a^2-\frac{1}{4}b,$$

L'intégrale réductible sera

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x^4+bx^2+2bx-a^2b)}}$$
$$=\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-\left(\frac{4}{3}a^2-\frac{b}{4}\right)z+\left(\frac{8}{27}a^3+\frac{ab}{6}\right)}}.$$

La réduction s'effectuera par la substitution

$$\frac{(x+2a)^2}{x+a}=4\left(pu-\frac{2}{3}a\right).$$

Deuxième cas. — Étant donnée l'intégrale

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-4a)(x^3-3ax+b)}}=u,\qquad a\neq 0.$$

Il faut trouver les conditions de sa réductibilité à une intégrale elliptique au moyen de la substitution suivante :

$$(20)\qquad \varphi(x)=\frac{x^3-\alpha x^2+\beta x-\gamma}{x^2+4a}=\lambda p(u,g_2,g_3).$$

Il est évident que $\lambda = 4$. De l'équation (16) on déduit que

$$\beta = 0.$$

Par conséquent nous aurons

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \gamma - 4ae_1}{x^2 + 4a} &= 4(pu - e_1),\\ \frac{x^3 + (\alpha - 4e_2)x^2 + \gamma - 4ae_2}{x^2 + 4a} &= 4(pu - e_2),\\ \frac{x^3 + (\alpha - 4e_3)x^2 + \gamma - 4ae_3}{x^2 + 4a} &= 4(pu - e_3). \end{aligned}\right.$$

En posant

$$p(\omega_i) = e_i, \qquad p'(\omega_i) = 0,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} &\varphi(\xi_i) + (x - \xi_i)\varphi'(\xi_i) + \frac{1}{2}(x - \xi_i)\varphi''(\xi_i) + \ldots\\ &\quad = \lambda\left[e_i + \frac{1}{2}(u - \omega_i)^2 p''(\omega_i) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\varphi(\xi_i) = 4e_i.$$

Si nous avons $\varphi'(\xi_i) \neq 0$, le point $x = \xi_i$ est un point de ramification. Si au contraire $\varphi'(\xi_i) = 0$, le point $x = \xi_i$ est une racine de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

ou

$$(22)\qquad x^3 + 12ax - 8a\alpha - 2\gamma = 0.$$

En désignant les racines de l'équation (22) par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3,$$

et les racines de l'équation

$$x^3 + 3ax + b = 0$$

par

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3,$$

nous aurons évidemment

$$\begin{aligned} x^3 + (\alpha - 4e_1)x^2 + \gamma - 4ae_1 &= (x - \xi_1)^2(x - x_1),\\ x^3 + (\alpha - 4e_2)x^2 + \gamma - 4ae_2 &= (x - \xi_2)^2(x - x_2),\\ x^3 + (\alpha - 4e_3)x^2 + \gamma - 4ae_3 &= (x - \xi_3)^2(x - x_3). \end{aligned}$$

De ces équations nous obtiendrons facilement

$$2\xi_1 + \alpha - 4e_1 = -x_1,$$
$$2\xi_3 + \alpha - 4e_2 = -x_2,$$
$$2\xi_3 + \alpha - 4e_3 = -x_3.$$

D'où il suit que

$$\alpha = 0, \qquad \xi_1 = \frac{8}{3}e_1, \qquad \xi_2 = \frac{8}{3}e_2. \qquad \xi_3 = \frac{8}{3}e_3;$$

$$x_1 = -\frac{4}{3}e_1, \qquad x_2 = -\frac{4}{3}e_2, \qquad x_3 = -\frac{4}{3}e_3.$$

Par conséquent

$$\gamma = 4b, \qquad g_2 = -\frac{27}{4}a, \qquad g_3 = \frac{27}{16}b;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^3+3ax+b)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + \frac{27}{4}az - \frac{27}{16}b}}.$$

La réduction s'effectuera au moyen de la substitution

$$\frac{x^3+4b}{x^2+4a} = 4p(u, g_2, g_3) \quad (^1).$$

L'étude des cas de réduction des intégrales abéliennes dépendant des radicaux du troisième, quatrième et sixième degré est réservée pour une autre fois.

CORRESPONDANCE.

(Extrait d'une lettre de M. Mathias Lerch à M. Darboux.)

Je viens de lire l'article de M. H. Lebesgue, paru dans le récent numéro du *Bulletin des Sciences mathématiques*. En rapprochant le théorème qui y est énoncé d'un théorème fort

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 219; Königsberger, *Journal de Borchardt*, t. 85, p. 287.

connu de Weierstrass, d'après lequel, toute série des polynomes uniformément convergente, dans un domaine à deux dimensions, a pour somme une fonction synectique, il m'a paru intéressant de revenir de plus près sur la formule de Seidel (*Journal de Crelle*, t. 73)

$$(1) \qquad x - iy = 2\int_0^\infty \lim_{n=\infty} \frac{z^{n-1}\xi}{z^n - \xi^n}\, d\xi,$$

où $z = x + iy$.

Il n'y a aucun doute que l'intégrale qui figure au second membre ne pourra jamais être développée en une série des polynomes en z. Mais au lieu de cette intégrale je vais considérer l'expression

$$(2) \qquad \Phi_n(z) = 2\int_0^\infty \frac{z^{n-1}\xi}{z^n - \xi^n}\, d\xi.$$

Elle n'a aucun sens, si la quantité z^n est réelle et négative; pour éviter toute complication, je me borne à supposer $y > 0$ et à prendre

$$z = x + iy = re^{\Theta\pi i}, \qquad (0 < \Theta < 1),$$

où Θ est une quantité irrationnelle. On vérifie aisément que l'intégrale (2) est donnée par la formule

$$(3) \qquad \Phi_n(z) = A_n z + B_n z,$$

où

$$A_n = \frac{2\pi}{n \sin\frac{2\pi}{n}}\, e^{-\frac{2m\pi i}{n}},$$

$$B_n = -\frac{2\pi}{n \sin\frac{2\pi}{n}} + 2\int_0^\infty \frac{\eta\, d\eta}{1 + \eta^n},$$

m désignant la fonction numérique

$$(4) \qquad m = E\left(\frac{n\Theta + 1}{2}\right).$$

Cela étant, il est clair que

$$\lim_{n=\infty} B_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} A_n = e^{-2\Theta\pi i}.$$

de sorte qu'il vient

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \Phi_n(z) = z e^{-2\Theta\pi i} = r e^{-\Theta\pi i} = x - iy;$$

mais la convergence n'est pas uniforme.

Écrivons en effet cette limite sous la forme

$$(5)' \qquad \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z) + \ldots = x - iy;$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \Phi_1(z), \qquad \varphi_\nu(z) = \Phi_\nu(z) - \Phi_{\nu-1}(z).$$

Les $\varphi_\nu(z)$ sont en effet des polynomes en z, car on a

$$\varphi_\nu(z) = c_\nu z,$$

où la constante c_ν est donnée par l'expression

$$(6) \qquad c_\nu = (A_\nu - A_{\nu-1}) + i(B_\nu - B_{\nu-1});$$

Mais cette expression fait voir que la série (5)' n'entre point dans la catégorie de celles dont on traite la convergence uniforme ; car en changeant aussi peu qu'on le veut l'angle de la variable z, une infinité des termes de la série changeront de forme en changeant les valeurs de leurs coefficients qui, en effet, sont des fonctions discontinues de Θ.

On se trouve en présence d'un développement qui a quelque analogie avec le développement en fraction décimale

$$x = a_0 - \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} - \ldots;$$

en modifiant les chiffres suffisamment éloignés $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, on effectue une variation de la somme x, donnée d'avance. Chaque chiffre est une constante tant que x varie dans un certain intervalle; mais la totalité des chiffres $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$ varie nécessairement avec x.

Je termine avec la vérification de la formule (3). La substitution $\xi = z\eta$ donne d'abord

$$2\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}\xi\, d\xi}{z^{2\alpha} - \xi^{2\alpha}} = 2z\int_0^\infty \frac{\eta\, d\eta}{1 - \eta^{2\alpha}},$$

le chemin pour la deuxième intégrale étant le vecteur indéfiniment prolongé du point $\frac{1}{z}$. La fonction sous le signe somme a des pôles $\tau_1 = e^{-\frac{\lambda\pi i}{n}}$ ($\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1$) qui se trouvent entre le chemin de l'intégration et la partie positive de l'axe réel, si l'on a

$$m = \mathrm{E}\left(\frac{n\Theta + 1}{2}\right).$$

Le résidu au pôle τ_1 ayant pour valeur $-\frac{\tau_1^2}{n}$, nous aurons, en faisant usage du théorème de Cauchy,

$$\int \frac{\tau_1\, d\tau_1}{1+\tau_1^n} = -\frac{2\pi i}{n}\sum_{\lambda} e^{-\frac{2\lambda\pi i}{n}} - \int_0^\infty \frac{\tau_1\, d\tau_1}{1+\tau_1^n}$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, \ldots 2m-1),$$

d'où la formule (3) se tire immédiatement.

Fribourg, le 11 avril 1903.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HENSEL (K.), A. O., Professor an der Universität Berlin, et LANDSBERG (G.), A. O., Professor an der Universität Heidelberg. — THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN EINER VARIABELN UND IHRE ANWENDUNG AUF ALGEBRAISCHE KURVEN UND ABELSCHE INTEGRALE. 1 vol. in-8° de 702 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Ce livre est partagé en six Parties :

I. Les fonctions algébriques attachées à une surface de Riemann, pages 1-115.

II. Les corps de fonctions algébriques, pages 116-203.

III. Les diviseurs algébriques et le théorème de Riemann-Roch, pages 204-364.

IV. Les courbes algébriques, pages 365-482.

V. Les classes de courbes algébriques, pages 483-562.

VI. Relations algébriques entre les intégrales abéliennes, pages 563-693.

Ces six parties sont divisées en trente-sept leçons; une leçon supplémentaire expose le développement historique de la théorie.

Une première Table donne le sommaire de chaque leçon; une autre (*Sachregister*) facilite beaucoup les recherches sur un sujet déterminé.

Avant l'analyse détaillée de ce livre, on y peut signaler une suite d'études sur les fonctions algébriques d'après les idées de Weierstrass ou de Kronecker, l'emploi systématique des diviseurs algébriques d'après Dedekind, des déterminations précises relatives au nombre des constantes dont dépendent certaines fonctions algébriques, des recherches détaillées sur les points singuliers des courbes et les corps algébriques particuliers, la théorie des intégrales abéliennes exposée une première fois d'après les conceptions de Riemann et reprise, avec des développements du plus grand intérêt, en prenant pour point de départ les travaux et l'enseignement de Weierstrass.

L'exposition est faite avec un grand souci de la rigueur, et des indications générales permettent d'apercevoir les ensembles dans ce recueil considérable d'études nécessairement minutieuses.

PREMIÈRE PARTIE.

FONCTIONS ALGÉBRIQUES ATTACHÉES A UNE SURFACE DE RIEMANN.

1. Il convient d'abord de préciser certaines notions sur les fonctions rationnelles de z.

La somme, la différence, le produit, le quotient de deux fonctions rationnelles de z sont encore des fonctions rationnelles de z; à cause de cela on dit, d'après Dedekind, que l'ensemble des fonctions rationnelles de z forme un corps (Körper); on désignera ce corps par la notation K (z).

La propriété caractéristique d'une fonction rationnelle est la suivante : c'est une fonction analytique uniforme qui n'admet, comme points de discontinuité, que des pôles. On le montre, avec rigueur, en expliquant, d'après Weierstrass, la notion d'un élément de fonction, celle du prolongement analytique d'une fonction, et la démonstration s'achève sans qu'on ait fait intervenir l'intégrale de Cauchy.

Ces préliminaires étant rappelés, on passe à la définition d'une fonction algébrique u de z à l'aide d'une équation $f(u, z) = 0$ dont le premier membre est un polynome entier en u et z et il s'agit d'abord d'obtenir, pour une valeur de z voisine de $z = \alpha$, des séries, ordonnées suivant les puissances croissantes de $z - \alpha$, qui représentent les n racines de l'équation $f(u, z) = 0$.

Le cas simple est celui où, pour $z = \alpha$, l'équation en u a toutes ses racines distinctes et finies; dans ce cas on trouve n séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $z - \alpha$ et la convergence de l'une de ces séries se démontre en considérant une fonction majorante.

Dans le cas général, on trouve par la méthode de Puiseux n séries de la forme

$$u = c_0 \zeta^{\varepsilon_0} + c_1 \zeta^{\varepsilon_1} + \ldots$$

où $\zeta = z - \alpha$ et où les exposants ε_0, ε_1, ... vont en croissant,

mais ne sont plus nécessairement ni entiers ni positifs. En réservant d'abord l'étude de la convergence, on montre que l'une quelconque de ces séries satisfait, au moins formellement, à l'équation $F(u, \zeta) = 0$ déduite de la proposée par le changement de variables $z - \alpha = \zeta$; cela signifie que l'on peut prendre un nombre suffisamment grand des premiers termes de la série pour que, la somme de ces termes étant mise à la place de u, la congruence

$$F(u, \zeta) \equiv 0 \pmod{\zeta^M}$$

soit satisfaite, M désignant un nombre positif aussi grand qu'on le veut. Pour étudier ensuite la convergence de l'une de ces séries, on montre qu'après avoir calculé un nombre limité des premiers termes, on retombe sur le cas simple déjà étudié où l'on est conduit à une série entière.

Le résultat de cette première étude des fonctions algébriques est le suivant :

Les n racines de l'équation $f(u, z) = 0$ sont données, pour des valeurs de z voisines de α, par un ou plusieurs développements de la forme

$$U = e_0 + e_1(z - \alpha)^{\frac{r}{a}} + e_1(z - \alpha)^{\frac{r+1}{a}} + e_2^{\frac{r+2}{a}} + \ldots$$

où r et a désignent des nombres entiers et où l'on attribue successivement à $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ ses a déterminations.

2. Il s'agit maintenant de prolonger les n éléments qui représentent les racines le long d'un contour partant d'un pont régulier p_0.

Si l'on suppose que le contour revient à son point de départ et qu'il n'embrasse aucun point critique, chacune des n séries se reproduit sans changement. De là l'intérêt d'un système de coupures qui empêcheront un contour quelconque de tourner autour de l'un des points critiques.

Dans le cas où les points à l'infini ne sont pas des points critiques, on choisit arbitrairement un point régulier p_0 auquel correspondent n éléments distincts $u_1(p_0)$, $u_2(p_0)$, ..., $u_n(p_0)$, on trace une coupure allant de p_0 à chacun des points critiques; on répète ces coupures sur n plans superposés à chacun desquels on fait correspondre l'un des n éléments.

En comparant les valeurs de u sur les bords des n coupures superposées qui correspondent à une ligne joignant p_0 à un point critique quelconque, on reconnaît qu'il est possible de joindre par des fils les bords opposés des n feuillets, de telle façon que, si l'on passe de l'un de ces bords à un autre en suivant les fils, les valeurs rencontrées de u se succèdent d'une manière continue. Enfin, si l'on transforme par inversion ces n feuillets plans, on obtient une surface formée de n feuillets sphériques, se raccordant suivant des lignes de passage; à chacun des points de cette surface est attaché un seul système de valeurs de z et de u vérifiant l'équation $f(u, z) = 0$, de telle façon que, à un déplacement continu sur la surface, correspond, pour z et pour u, une variation continue.

Cette surface, dont la conception est due à Riemann, donne une représentation géométrique qui est, suivant une expression de Hermite, « un instrument de la plus grande puissance pour l'étude des fonctions algébriques ».

On appelle points de ramification les extrémités des lignes de passage et l'on dit qu'un point de ramification est d'ordre $a - 1$, si a feuillets s'y réunissent.

A une valeur donnée de z correspondent n valeurs u_1, $u_2, \ldots, u_n$ ou encore à un point pris sur le plan de la variable z correspondent n points superposés de la surface de Riemann. Le déplacement continu de l'un de ces n points sur la surface est bien défini si l'on fait décrire au point z dans son plan un chemin continu ne passant par aucun point critique; mais si le point z décrit un contour fermé, le chemin décrit par le point mobile sur la surface de Riemann ne revient pas nécessairement sur le feuillet d'où il est parti.

Aux contours fermés que l'on peut faire décrire au point mobile sur le plan de la variable z à partir d'un point déterminé z_0 correspondent des substitutions sur les valeurs u_1, u_2, ..., u_n de u; ces substitutions forment un groupe que l'on appelle groupe de monodromie de l'équation $f(u, z) = 0$ et dont l'importance s'aperçoit dès que l'on a démontré cette proposition : Pour qu'une fonction rationnelle de z et de u soit rationnellement exprimable en fonction de z, il faut et il suffit que cette fonction reste invariable pour toutes les substitutions du groupe de monodromie.

Si l'équation $f(u, z) = 0$ est irréductible, la surface de Riemann est connexe, c'est-à-dire que l'on peut aller par un chemin continu tracé sur la surface d'un point donné à un autre point également donné ; on peut donc, en partant du point z_0 avec une valeur u_0, arriver à un point quelconque z avec une valeur u_i choisie arbitrairement parmi les n valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui correspondent au point z. On dit dans ce cas que l'équation

$$f(u, z) = 0$$

définit une seule fonction analytique u de z.

3. Puisque l'on connaît le développement en série de u dans le voisinage d'un point quelconque de la surface de Riemann, on obtient de suite le développement en série d'une fonction rationnelle de z et de u. Si le point considéré correspondant à $z = \alpha$ est un point de ramification d'ordre $a - 1$ le développement de la fonction rationnelle est une série ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de $(z - \alpha)^{\frac{1}{a}}$ pouvant contenir un nombre fini de termes à exposants négatifs ; suivant que le premier exposant est nul, positif ou négatif, on dit que la fonction est régulière au point considéré, qu'elle admet ce point comme zéro ou comme pôle. Les propriétés caractéristiques d'une fonction rationnelle de z et u sont les suivantes : c'est une fonction analytique uniforme sur toute la surface de Riemann et n'ayant d'autres singularités que des pôles ; on démontre enfin qu'une de ces fonctions ne peut rester finie sur toute la surface, à moins qu'elle ne se réduise à une constante.

DEUXIÈME PARTIE.

CORPS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

4. Soit u une fonction algébrique de z définie par une équation irréductible de degré n, $f(u, z) = 0$, on dit que l'ensemble des fonctions rationnelles de z et u forme un *corps ;* on désignera ce corps par la notation $K(z, u)$.

Soit $U = \varphi(z, u)$ un élément du corps et soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$

les valeurs de u qui correspondent à une valeur donnée de z puis

$$U_1 = \varphi(z, u_1), \qquad U_2 = \varphi(z, u_2), \qquad \ldots, \qquad U_n = \varphi(z, u_n),$$

on dit que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont les valeurs *conjuguées* de U correspondant à la valeur considérée de z.

Le produit $F(U, z) = (U - U_1) \ldots (U - U_n)$ est un polynome entier en U dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de z. On démontre que si $F(U, z)$ n'est pas irréductible, tous les facteurs irréductibles de $F(U, z)$ sont identiques. Dans le cas où U est racine d'une équation irréductible de degré n, tout élément du corps peut s'exprimer rationnellement en fonction de z et de U, les deux corps $K(z, u)$ et $K(z, U)$ sont identiques.

En tenant compte de l'équation $f(u, z) = 0$, on peut mettre tout élément du corps sous la forme d'un polynome entier en u de degré $n - 1$, à coefficients rationnels en z.

On dit que n éléments du corps $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ forment une *base* si tout élément η du corps peut être représenté par une expression de la forme

$$\eta = c_1 \eta^{(1)} + c_2 \eta^{(2)} + \ldots + c_n \eta^{(n)},$$

les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant rationnels en z.

La condition pour que n fonctions du corps $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ forment une base est que, si l'on considère le système

$$\begin{array}{cccc} \eta_1^{(1)}, & \eta_1^{(2)}, & \ldots, & \eta_1^{(n)}, \\ \eta_2^{(1)}, & \eta_2^{(2)}, & \ldots, & \eta_2^{(n)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_n^{(1)}, & \eta_n^{(2)}, & \ldots, & \eta_n^{(n)}, \end{array}$$

où $\eta_i^{(k)}$ désigne celle des n valeurs conjuguées de $\eta^{(k)}$ qui correspondent à la valeur u_i de u, le déterminant de ce système ne soit pas identiquement nul.

Si $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ d'une part et $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(n)}$ d'autre part forment deux *bases*, les ζ s'expriment par des fonctions linéaires et homogènes des η à coefficients rationnels et telles que le déterminant de ces coefficients ne soit pas identiquement nul.

5. Il est utile pour la suite de rappeler les propriétés suivantes des systèmes de n^2 éléments.

La règle pour faire le produit des deux systèmes (c_{ik}), (d_{ik}) peut s'énoncer en abrégé (comme on le fait à propos des déterminants) : on multiplie successivement les lignes du premier facteur par les colonnes du second facteur, ou en précisant : si l'on prend

$$e_{ik} = c_{i1} d_{1k} + c_{i2} d_{2k} + \ldots + c_{in} d_{nk},$$

on a

$$(c_{ik})(d_{ik}) = (e_{ik}).$$

On désigne par (1) un système de n^2 éléments où tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale et où les éléments de cette diagonale sont égaux à l'unité.

Le système réciproque (c'_{ik}) d'un système donné satisfait à la condition (qui peut le définir)

$$(c'_{ik})(c_{ik}) = (1).$$

Le système conjugué d'un système donné s'obtient en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes dans le système donné.

Le système complémentaire d'un système donné est le conjugué du réciproque de ce système.

6. Après ces définitions auxiliaires, on introduit une notion qui interviendra constamment dans la suite de ce livre et sur l'utilité de laquelle les auteurs insisteront bien des fois : c'est la notion de *Diviseurs algébriques*.

Il convient d'abord de rappeler la définition de l'ordre d'une fonction rationnelle de z et de u, $\varphi(z, u)$, en un point de la surface de Riemann qui correspond à l'équation $f(z, u) = 0$.

Si ce point est l'un des points donnés par $z = \alpha$ et si c'est un point de ramification d'ordre $a - 1$, on peut, dans un domaine convenablement choisi de ce point, mettre $\varphi(z, u)$ sous la forme

$$\varphi(z, u) = (z - \alpha)^{\frac{r}{a}} \mathrm{E}(z \mid \alpha),$$

$\mathrm{E}(z \mid \alpha)$ étant une fonction qui reste finie et différente de zéro quand z tend vers α et r un entier positif, nul ou négatif : on dit que $\varphi(z, u)$ a un ordre égal à r au point considéré (s'il s'agit d'un point à l'infini, on remplace dans cette définition $z - \alpha$

par $\frac{1}{z}$). L'ordre de $\varphi(z, u)$ n'est différent de zéro qu'en un nombre limité de points; ce sont ces points qu'il y a surtout intérêt à considérer. On aura donc, dans l'étude d'une fonction algébrique, à considérer particulièrement un nombre fini de points et pour chacun d'eux un nombre positif ou négatif qui donnera l'ordre de la fonction en ce point. On abrégera les explications en introduisant, d'après Dedekind, une notation et un calcul symboliques.

On dira qu'*une fonction du corps* $K(z, u)$ *est divisible par le diviseur*

$$Q = P_1^{\rho_1} P_2^{\rho_2} \ldots P_\mu^{\rho_\mu}$$

si elle est au moins de l'ordre ρ_1 *au point* P_1, ... *de l'ordre* ρ_μ *au point* P_μ, *quelle que soit la façon dont elle se comporte aux autres points de la surface de Riemann.*

Non seulement on étudie la divisibilité des fonctions du corps par les diviseurs, mais on considère ces diviseurs en eux-mêmes et l'on définit un calcul de ces diviseurs, de la manière suivante:

Soient

$$Q = P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_h^{\lambda_h}, \qquad R = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} \ldots P_h^{\mu_h}.$$

le produit QR et le quotient $\frac{Q}{R}$ sont, par définition,

$$QR = P_1^{\lambda_1+\mu_1} \ldots P_h^{\lambda_h+\mu_h}, \qquad \frac{Q}{R} = P_1^{\lambda_1-\mu_1} \ldots P_h^{\lambda_h-\mu_h}.$$

On dit que Q a un ordre égal à $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_h$. Un diviseur est dit entier, quand aucun des exposants qui y figurent n'est négatif; on peut toujours mettre un diviseur sous la forme du quotient de deux diviseurs entiers.

On dit qu'un diviseur Q est divisible par un diviseur R si le quotient $\frac{Q}{R}$ est un diviseur entier. Le plus grand commun diviseur de plusieurs diviseurs algébriques s'obtient en prenant les facteurs communs à ces diviseurs et en affectant chacun d'eux de son plus petit exposant.

A toute fonction η du corps correspond un diviseur bien déterminé, dont le numérateur fait connaître les zéros et le dénominateur, les infinis de η.

Deux fonctions du corps auxquelles correspondent le même

diviseur, c'est-à-dire qui admettent les mêmes zéros et les mêmes pôles avec les mêmes ordres de multiplicité, ne diffèrent que par un facteur constant. Ceci conduit à introduire dans le diviseur associé à une fonction algébrique un facteur constant e égal au premier coefficient du développement en série de la fonction en un point P_0 de la surface de Riemann choisi une fois pour toutes. Alors la fonction algébrique est complètement déterminée par son diviseur et l'on écrit symboliquement

$$\eta = e P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_\mu^{\lambda_\mu}.$$

Pour une fonction η du corps, le nombre des zéros est égal au nombre des pôles, si l'on tient compte des ordres de multiplicité; ainsi le diviseur de η est d'ordre nul, mais il ne suffit pas que l'ordre d'un diviseur soit nul pour que ce diviseur définisse une fonction du corps $K(z, u)$.

Soit x une fonction du corps et α une constante quelconque; le nombre des racines de l'équation $x - \alpha = 0$ est égal au nombre des infinis de x; il est donc le même quel que soit α. Ce nombre constant s'appelle le degré de la fonction x du corps; on le représentera par n_x.

7. On donne, d'après Dedekind, le nom de *module* à l'ensemble des fonctions définies par l'égalité

$$\eta = c_1 \eta^{(1)} + c_2 \eta^{(2)} + \ldots + c_n \eta^{(n)},$$

où $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ sont des fonctions du corps $K(z, u)$ et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des fonctions entières et rationnelles de z; on dit que $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)}$ forment un système de base (*Basis systeme*) ou, en abrégé, forment une base pour le module considéré.

Deux systèmes de base sont appelés *équivalents* s'ils définissent le même module; dans ce cas, les fonctions de l'un sont données par des expressions linéaires et homogènes des fonctions de l'autre, les coefficients étant des polynomes entiers en z dont le déterminant se réduit à une constante différente de zéro.

On remplace un système de base $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$ par un système équivalent : 1° si l'on échange deux fonctions $\eta^{(1)}$ et $\eta^{(2)}$; 2° si l'on multiplie par une constante une fonction, $\eta^{(1)}$ par exemple; 3° si l'on remplace une fonction $\eta^{(i)}$ par $\eta^{(i)} - c\eta^{(k)}$,

v étant un polynome entier en z. En composant ces trois transformations élémentaires, on peut obtenir toute transformation d'un système de base en un système équivalent.

Si l'on veut étudier les fonctions d'un module pour des valeurs de z voisines de α, il est indispensable, comme la suite de ce livre le montrera bien, de définir avec précision la plus haute puissance de $z - \alpha$ qui divise une fonction η du corps. Si l'on suppose que à $z = \alpha$ correspondent, sur la surface de Riemann, des points dont les ordres de ramification sont $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$, ..., et si μ est le plus petit multiple commun de a, b, c, ..., on aura pour les n fonctions conjuguées $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des développements de la forme

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= a_1(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_1(z-\alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \ldots,\\
\eta_2 &= a_2(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_2(z-\alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_n &= a_n(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}} + b_n(z-\alpha)^{\frac{r+1}{\mu}} + \ldots,
\end{aligned}$$

l'un au moins des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant différent de zéro : on dira que $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$ est la plus haute puissance de $(z-\alpha)$, telle que $\dfrac{\eta}{(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}}$ reste fini quand z tend vers α, ou, en abrégé, que η admet le *facteur* (*Teiler*) $(z-\alpha)^{\frac{r}{\mu}}$.

D'après cela, si les fonctions $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(n)}$, formant une base, admettent respectivement les *facteurs*

$$(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}},\quad (z-\alpha)^{\frac{r_2}{\mu}},\quad \ldots,\quad (z-\alpha)^{\frac{r_n}{\mu}},$$

le déterminant $|\eta_i^{(k)}|$, dont les colonnes successives sont formées des valeurs conjuguées de ces n fonctions, aura comme premier terme

$$|a_{ik}|(z-\alpha)^{\frac{r_1}{\mu}+\frac{r_2}{\mu}+\ldots+\frac{r_n}{\mu}},$$

a_{ik} étant le coefficient de $(z-\alpha)^{\frac{r_k}{\mu}}$ dans $\eta_i^{(k)}$; si le déterminant $|a_{ik}|$ est différent de zéro, c'est-à-dire si le *facteur* du déterminant est le produit de ses *facteurs* de colonne, on dit que le système η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_n$ est *normal*.

Dans ce cas, le *facteur* de la fonction

$$\eta_i = v_1 \eta_i^{(1)} + v_2 \eta_i^{(2)} + \ldots + v_n \eta_i^{(n)}$$

est égal exactement à celui des facteurs des produits $v_i \eta_i^{(i)}$ qui est de degré le moins élevé; la détermination exacte de ce *facteur* sera très utile quand il s'agira de trouver le nombre des constantes dont dépendent certaines fonctions algébriques. De là l'importance de cette proposition : Tout système de base est équivalent à un système qui est normal pour $z = \alpha$.

8. On arrive à des propriétés essentielles d'un système de n^2 éléments (η_i^k), déduit d'une base, en considérant les diviseurs de déterminants (*Determinantenteiler*) et les diviseurs élémentaires (*Elementarteiler*) de ce système. Ils se définissent de la façon suivante : Soit $(z - \alpha)^{d_h}$ la plus haute puissance de $z - \alpha$ qui se trouve en facteur dans tous les déterminants d'ordre h déduits du système (η_i^k) les n puissances

$$(z - \alpha)^{d_1}, \quad (z - \alpha)^{d_2}, \quad \ldots, \quad (z - \alpha)^{d_n},$$

sont les diviseurs de déterminants du système $(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \ldots, \eta_i^{(n)})$.

Les diviseurs élémentaires $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de Weierstrass sont rattachés aux diviseurs de déterminants par les relations

$$e_1 = (z - \alpha)^{d_1}, \qquad e_1 e_2 = (z - \alpha)^{d_2}, \qquad e_1 e_2 \ldots e_n = (z - \alpha)^{d_n}.$$

Si le système est normal et si les fonctions $\eta_1^{(1)}, \eta_1^{(2)}, \ldots, \eta_{1n}$ sont rangées dans un ordre tel que les degrés de leurs *facteurs*

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n,$$

forment une suite croissante, les diviseurs élémentaires sont

$$e_1 = (z - \alpha)^{\rho_1}, \qquad e_2 = (z - \alpha)^{\rho_2}, \qquad e_n = (z - \alpha)^{\rho_n}.$$

Des systèmes de base équivalents ont mêmes diviseurs de déterminants et, par suite, mêmes diviseurs élémentaires

On fait une application de l'étude précédente des modules à la détermination des ordres de ramification d'une surface de Riemann correspondant à une équation donnée et l'on traite avec détails le cas des équations binomes, puis les cas où la surface de Riemann a deux, trois ou quatre feuillets.

TROISIÈME PARTIE.

LES DIVISEURS ALGÉBRIQUES ET LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH.

9. Les auteurs indiquent, comme le problème fondamental pour toute la théorie des fonctions algébriques, la question suivante :

Trouver toutes les fonctions du corps $K(z, u)$ qui, en h points donnés $P_1, P_2, \ldots, P_h$ de la surface de Riemann, $\mathfrak{R}$, aient au moins les ordres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ et soient régulières en tous les autres points de la surface ; ou, en abrégé, trouver toutes les fonctions du corps $K(z, u)$ qui sont multiples du diviseur algébrique

$$Q = P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} \ldots P_h^{\lambda_h}.$$

On cherche d'abord les fonctions du corps qui, aux h points donnés, ont des ordres au moins égaux à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sont régulières en tous les autres points à distance finie, mais ne sont assujetties à aucune condition pour les n points à l'infini (ces derniers étant supposés points ordinaires de la surface). Ces fonctions forment, d'après la terminologie de Dedekind, un *idéal;* on désignera cet idéal par la notation $I(Q)$.

On démontre qu'on peut toujours trouver une base

$$(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

telle que le module correspondant

$$\zeta = c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \ldots + c_n \zeta_n$$

soit identique à l'idéal $I(Q)$; on dit alors que $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ forment un système fondamental pour l'idéal $I(Q)$. Si une fonction de l'idéal $I(Q)$ est exactement de l'ordre λ_i en chacun des h points P_i, on dit qu'elle appartient au diviseur algébrique Q; on peut toujours trouver dans un idéal quelconque $I(Q)$ une fonction appartenant au diviseur Q.

On peut aisément calculer le déterminant $|\eta_i^k|$ correspondant à un système fondamental $(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \ldots, \eta_i^{(n)})$ de l'idéal $I(Q)$, déterminant que l'on désigne par $D(Q)$. Comme le carré de ce déterminant est une fonction rationnelle de z, il suffit de savoir trouver avec quel exposant un facteur quelconque $z - \alpha$ entre

dans D(Q). Dans le voisinage de l'un des points P qui correspondent à $z = \alpha$, on trouve comme *facteur* de D(Q)

$$(z-\alpha)^{\lambda+\frac{a-1}{2}},$$

λ étant l'exposant correspondant à ce point P dans le diviseur Q (c'est-à-dire $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ ou bien zéro) et $a - 1$ l'ordre de ramification de ce point P de la surface de Riemann, ce qu'on peut exprimer de la façon suivante :

$$D(Q) = \prod_P (z-\alpha)^{\lambda+\frac{a-1}{2}}.$$

On en déduit l'égalité remarquable

$$[D(Q)]^2 = D_1^2(z) \times D_2(z),$$

où $D_1(z)$ et $D_2(z)$ désignent les fonctions rationnelles

$$D_1(z) = \prod_{P_i} (z-\alpha)^{\lambda_i}, \qquad D_2(z) = \prod_{P_a} (z-\alpha)^{a-1},$$

de sorte que le premier produit dépend seulement du diviseur Q et le second dépend seulement des points de ramification de la surface de Riemann $\mathfrak{R}$.

On appellera diviseur de ramification (*Verzweigungsteiler*) de la surface $\mathfrak{R}$, le diviseur algébrique

$$Z = \prod P_a^{a-1},$$

le produit étant étendu à tous les points de ramification (supposés tous à distance finie).

Un cas très particulier mais important est celui où le diviseur Q se réduit à l'unité, c'est-à-dire où l'idéal se compose de fonctions qui ne possèdent aucun pôle à distance finie, mais peuvent d'ailleurs avoir un ordre quelconque en chacun des n points à l'infini; ces fonctions sont les fonctions algébriques entières.

Toutes les fonctions algébriques entières ξ du corps $K(z, u)$, et elles seulement, peuvent être mises sous la forme

$$\xi = v_1 \xi^{(1)} + v_2 \xi^{(2)} + \ldots + v_n \xi^{(n)}$$

où $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des fonctions rationnelles de z et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

un système fondamental qui se détermine par des opérations rationnelles.

10. Après cette étude auxiliaire, on peut trouver les fonctions du corps $K(z, u)$ qui sont des multiples de Q. Il suffit de prendre dans l'idéal $I(Q)$ les fonctions qui satisfont à la condition nouvelle de rester finies aux points de l'infini.

Soit $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ un système fondamental que l'on peut supposer normal pour $z = \alpha$; on se place dans le cas où il n'y a pas de point de ramification à l'infini; alors, pour $z = \infty$, les *facteurs* de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ sont des puissances de $\frac{1}{z}$ qui ont pour exposants des nombres entiers,

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n,$$

et l'on a pu ranger les n fonctions dans un ordre tel que ces exposants forment une suite décroissante. Si les s premiers seulement sont positifs ou nuls et tous les autres négatifs, les s premières fonctions sont des multiples de Q et les $n - s$ dernières ne sont pas des multiples de Q.

Ces notations fixées, en s'appuyant sur les propriétés d'un système fondamental, on démontre que tous les multiples du diviseur Q, et eux seulement, sont donnés par la formule

$$\zeta = v_1 \zeta^{(1)} + v_2 \zeta^{(2)} + \ldots + v_s \zeta^{(s)},$$

dans laquelle $v_1, \ldots, v_s$ sont des polynomes entiers en z de degrés $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

Le second membre de la formule est une fonction linéaire et homogène des fonctions

$$\zeta^{(1)}, \quad z\zeta^{(1)}, \quad \ldots, \quad z^{r_i}\zeta^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

dont le nombre est

$$N = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \ldots + (r_s + 1).$$

Le problème énoncé comme problème fondamental se trouve ainsi résolu et toutes les opérations que l'on a eu à effectuer sont rationnelles.

11. La question des transformations birationnelles est posée de la façon suivante : Déterminer deux fonctions x et y du corps $K(z, u)$

telles que z et u soient rationnellement exprimables en x et y et, par suite, que les deux corps $K(z, u)$, $K(x, y)$ soient identiques.

On montre en détail que, si x est une fonction arbitraire du corps $K(z, u)$, on peut déterminer les constantes a et b de façon que, si l'on pose $y = az + bu$, le corps $K(x, y)$ soit identique au corps $K(z, u)$.

Soit $\mathcal{R}_x$ la surface de Riemann, quand on choisit x comme variable indépendante; par analogie, on désigne par $\mathcal{R}_z$ la surface de Riemann considérée quand z était la variable indépendante. Les deux surfaces $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_z$ se correspondent point par point d'une manière univoque; à tout circuit tracé sur $\mathcal{R}_z$ correspond un circuit tracé sur $\mathcal{R}_x$; on en conclut que $\mathcal{R}_x$ est connexe comme $\mathcal{R}_z$ et que l'équation qui relie y à x est irréductible. Le nombre N des fonctions du corps, qui sont des multiples d'un diviseur algébrique et sont linéairement indépendantes, ne change pas quand on change de variable indépendante.

12. Les diviseurs algébriques, dont l'emploi va devenir de plus en plus fréquent et paraîtra aussi de plus en plus utile, sont l'objet d'une étude plus détaillée. On les distribue en classes de la façon suivante :

On range d'abord dans une même classe (classe principale, ou classe unité) les diviseurs associés aux fonctions du corps $K(z, u)$. Puis on regarde comme équivalents deux diviseurs dont le rapport est une fonction du corps, et l'on range dans une même classe tous les diviseurs équivalents à un diviseur donné.

Les diviseurs d'une même classe sont de la forme $Q_0\zeta_1$, $Q_0\zeta_2$, $Q_0\zeta_3 \ldots$, où $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots$ désignent des fonctions du corps.

Si les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ du corps satisfont à une relation linéaire à coefficients constants,

$$c_1\zeta_2 + c_2\zeta_2 + \ldots + c_k\zeta_k = 0,$$

on dit que les diviseurs correspondants $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ d'une classe (Q) satisfont à la relation

$$c_1Q_1 + c_2Q_2 + \ldots + c_kQ_k = 0.$$

Tous les diviseurs d'une même classe ont le même ordre; cet ordre s'appelle *l'ordre de la classe*.

Si les diviseurs Q et Q′ d'une part, R et R′ d'autre part, sont équivalents, QR et Q′R′ sont équivalents, et il en est de même pour $\frac{Q}{R}$ et $\frac{Q'}{R'}$; ceci permet de définir la composition des classes de diviseurs par multiplication et par division. En désignant par (Q) et (R) deux classes de diviseurs, on appellera *produit de ces classes* et l'on désignera par (QR) la classe obtenue, en multipliant un diviseur de la classe (Q) par un diviseur de la classe (R); le quotient $\left(\frac{Q}{R}\right)$ se définit d'une manière analogue.

L'ensemble des diviseurs entiers d'une classe forme ce qu'on appelle *le domaine d'intégrité de cette classe*. Soient Q_0 un diviseur choisi une fois pour toutes dans la classe (Q), et G un diviseur entier de la même classe, on a

$$G = Q_0 \zeta, \qquad \zeta = G \times \frac{1}{Q_0},$$

ζ désignant une fonction du corps; on voit que l'élément de la classe principale, associé à un diviseur entier de la classe (Q), est un multiple de $\frac{1}{Q_0}$; or, on a vu que les fonctions du corps, qui sont des multiples d'un diviseur $\frac{1}{Q_0}$, peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de N d'entre elles, N étant un nombre entier qu'on sait déterminer; on en conclut qu'il y a, dans la classe (Q), N diviseurs entiers linéairement indépendants. On appelle *dimension d'une classe* (Q) et l'on désigne par $\{Q\}$ le nombre des diviseurs entiers de la classe (Q) qui sont linéairement indépendants.

Voici une première application qui donnera un aperçu sur la façon dont on tire parti de ces diviseurs algébriques. Il y a beaucoup d'intérêt à trouver une fonction x du corps dont le degré n_x soit aussi petit que possible, puisque n_x est le nombre des feuillets de la surface $\mathcal{R}_x$ qui peut servir à l'étude des fonctions du corps.

Dans cette idée, on considère les N fonctions du corps linéairement indépendantes qui sont des multiples de $\frac{1}{Q_0}$ et les diviseurs entiers qui leur correspondent dans la classe (Q). Soient $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(N)}$ ces fonctions, et $G_1, G_2, \ldots, G_N$ ces diviseurs.

Si l'on pose

$$x = \frac{c_1 \eta_1^{(1)} + c_2 \eta_1^{(2)} + \ldots + c_{N-1} \eta_1^{(N-1)}}{\eta_1^{(N)}} = \frac{c_1 G_1 + c_2 G_2 + \ldots + c_{N-1} G_{N-1}}{G_N},$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}$, désignant des constantes, x est une fonction du corps dont le degré n_x est égal ou inférieur à l'ordre q de la classe (Q); de plus, on peut disposer des $N-1$ constantes, de façon que le numérateur ait avec le dénominateur un diviseur commun d'ordre $N-2$; on a donc, en définitive,

$$n_x < q - |Q| + 2.$$

En se reportant au calcul qui a donné le nombre entier $N = |Q|$, on trouve l'inégalité

$$|Q| \geq q - \left(\frac{w}{2} - n\right).$$

w désignant la somme des ordres des points de ramification de la surface $\mathcal{R}_z$, somme qui est toujours un nombre pair, et n le degré du corps $K(z, u)$. Si l'on pose

$$p = \frac{w}{2} - n + 1,$$

p est justement le nombre désigné par Riemann comme donnant le *genre* de la surface $\mathcal{R}_z$, et l'inégalité précédente peut s'écrire

$$|Q| \geq q - p - 1.$$

Cette inégalité sera remplacée plus tard par une égalité, traduction du théorème de Riemann-Roch.

13. On aborde maintenant l'étude des intégrales abéliennes

$$\int \xi \, dz,$$

où ξ est une fonction du corps $K(z, u)$, en continuant d'employer comme auxiliaires les diviseurs algébriques. Avant tout, on fait correspondre à la différentielle $\xi \, dz$ un diviseur qui ne change pas quand on change la variable indépendante, et qui fait connaître la façon dont se comporte $\int \xi \, dz$ en tous les points de l'une des surfaces de Riemann servant à la représentation du corps $K(z, u)$.

On y parvient assez simplement en raisonnant de la façon suivante : Si ξ et η sont deux fonctions quelconques du corps et si l'on a dans le voisinage de $z = \alpha$

$$\xi - \xi_0 = \xi_d (z - \alpha)^{\frac{d}{a}} + \xi_{d+1} (z - \alpha)^{\frac{d+1}{a}} + \ldots,$$

$$\eta - \eta_0 = \eta_e (z - \alpha)^{\frac{e}{a}} + \eta_{e+1} (z - \alpha)^{\frac{e+1}{a}} + \ldots,$$

le développement de $\frac{d\eta}{d\xi}$ commence par un terme en $(z - \alpha)^{\frac{e-d}{a}}$, ce qu'on écrit symboliquement

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \prod P^{e-d},$$

le produit étant étendu à tous les points de $\mathfrak{R}_z$ pour lesquels $e - d$ est différent de zéro. Le même diviseur $\prod P^{e-d}$ se présente si l'on forme le quotient

$$\frac{Z_\eta}{N_\eta^2} : \frac{Z_\xi}{N_\xi^2}$$

où N_ξ est le diviseur du dénominateur de la fonction ξ du corps, Z_ξ le diviseur de ramification quand on prend ξ pour variable indépendante, tandis que N_η et Z_η ont des significations analogues relativement à la variable η.

On écrit symboliquement

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Z_\eta}{N_\eta^2} : \frac{Z_\xi}{N_\xi^2}.$$

D'autre part, une même différentielle abélienne $d\omega$ s'écrit, suivant qu'on prend ξ ou η comme variable,

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi = \zeta_\xi \frac{d\xi}{d\eta} d\eta = \zeta_\eta d\eta,$$

c'est-à-dire que le rapport des coefficients différentiels ζ_ξ, ζ_η satisfait à la condition

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi},$$

et, en tenant compte de l'égalité symbolique qui vient d'être obtenue,

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{Z_\eta}{N_\eta^2} : \frac{Z_\xi}{N_\xi^2}.$$

On voit enfin qu'on a pour deux fonctions quelconques ξ et η du corps

$$\zeta_\xi \frac{Z_\xi}{N_\xi^2} = \zeta_\eta \frac{Z_\eta}{N_\eta^2} = \varpi_\omega,$$

ϖ_ω représente un diviseur algébrique qui dépend de la différentielle $d\omega$, mais non de la variable d'intégration : c'est ce diviseur qu'on nomme le *diviseur différentiel* (*Differentialteiler*) associé à l'intégrale ω ou à la différentielle $d\omega$. Quand l'intégrale ω est donnée, le diviseur différentiel ϖ_ω est défini sans ambiguité, et réciproquement, quand le diviseur ϖ_ω est donné, l'intégrale est définie à une constante additive près.

On montre que, si P est un diviseur d'ordre h de ϖ_ω, le développement de ω au point correspondant est de la forme

$$\omega - \omega_0 = \alpha_h x^{h+1} + \ldots \qquad \text{pour} \qquad h \neq -1,$$

ou

$$\omega - \omega_0 = \alpha_{-1} \log x + \ldots \qquad \text{pour} \qquad h = -1.$$

Le diviseur ϖ_ω qu'on a fait correspondre à l'intégrale abélienne ω a donc bien les propriétés énoncées.

14. Une démonstration intéressante de la conservation du genre dans toute transformation birationnelle se rattache aux considérations précédentes. On part de l'égalité symbolique

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Z_\eta}{N_\eta^2} : \frac{Z_\xi}{N_\xi^2},$$

et l'on remarque que $\frac{d\eta}{d\xi}$ est une fonction du corps, puisque ξ et η, toutes deux fonctions rationnelles de z et u, sont liées entre elles par une équation algébrique $F(\eta, \xi) = 0$. En d'autres termes, les diviseurs $\frac{Z_\eta}{N_\eta^2}$ et $\frac{Z_\xi}{N_\xi^2}$ sont équivalents; ils ont donc le même ordre, et l'on a

$$\varpi_\eta - 2n_\eta = \varpi_\xi - 2n_\xi,$$

n_ξ étant le degré de ξ, ϖ_ξ la somme correspondante des ordres de ramification, et n_η, ϖ_η ayant des significations analogues. Donc, le nombre (entier, on l'a vu)

$$p = \frac{\varpi}{2} - n - 1$$

ne change pas quand on change la variable indépendante, le corps algébrique étudié restant le même, ou enfin le genre est un invariant pour toute transformation birationnelle.

Les diviseurs différentiels associés aux différentielles

$$d\omega = \zeta_\xi\, d\xi, \qquad d\omega' = \zeta'_\xi\, d\xi,$$

qui correspondent à deux fonctions du corps, sont deux diviseurs équivalents, puisqu'on a

$$w_\omega = \zeta_\xi \frac{Z_\xi}{N_\xi^2}, \qquad w_{\omega'} = \zeta'_\xi \frac{Z_\xi}{N_\xi^2},$$

et, par suite,

$$\frac{w_{\omega'}}{w_\omega} = \frac{\zeta'_\xi}{\zeta_\xi}.$$

Donc, tous les diviseurs différentiels appartiennent à une même classe (W) qui est déterminée par le diviseur $\frac{Z_\xi}{N_\xi^2}$; on voit que l'ordre de cette classe est égal à

$$w = 2n = 2p - 2.$$

On appelle *intégrale abélienne de première espèce* une intégrale abélienne qui reste finie en tous les points de la surface de Riemann à laquelle elle est attachée. Pour obtenir toutes les intégrales de première espèce, on est ramené à chercher tous les diviseurs entiers linéairement indépendants de la classe différentielle (W). On trouve, de cette façon, que le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes est égale au genre p du corps et, de plus, on apprend à former effectivement les fonctions algébriques dont les intégrales sont ces p intégrales de première espèce.

15. Le théorème de Riemann-Roch indique avec précision le nombre des constantes dont dépend la fonction la plus générale du corps $K(z, u)$, qui devient infinie du premier ordre en des points donnés (ou seulement en quelques-uns de ces points) et qui reste finie en tous les autres points de la surface $\mathcal{R}_p$. Au point de vue de la théorie des diviseurs algébriques, la question se pose de la façon suivante : Dans la classe différentielle (W), combien y a-t-il de diviseurs linéairement indépendants qui sont des mul-

tiples d'un diviseur donné Q? On montre d'abord que le nombre cherché est égal au nombre des diviseurs entiers linéairement indépendants de la classe $\left(\frac{W}{Q}\right)$, puis on obtient, par des calculs purement algébriques et en s'appuyant sur les propriétés d'un système normal de base pour un idéal, le résultat suivant :

$$|Q| = q - p + 1 - \left|\frac{W}{Q}\right|,$$

q désignant l'ordre du diviseur donné. On montrera plus loin l'équivalence de cet énoncé avec l'énoncé auquel on est conduit, quand on part de la formule de décomposition d'une fonction algébrique en éléments simples; mais il convient, dès maintenant, d'en indiquer les conséquences suivantes :

Dans le corps $K(z, u)$, il n'existe pas de fonction (proprement dite) telle que ses pôles soient des points arbitrairement choisis, en nombre moindre que $p + 1$; au contraire, il existe des fonctions de degré $q \geqq p + 1$ dont tous les pôles sont des points arbitrairement choisis, et la dimension du système linéaire de ces fonctions est $q - p + 1$, si l'on suppose que le groupe des points choisis comme pôles n'est pas un groupe spécial.

16. Les théories précédentes permettent d'effectuer, par des procédés algébriques, la décomposition d'une intégrale abélienne en une somme d'intégrales élémentaires.

Les intégrales élémentaires sont définies comme il suit : On a déjà vu qu'il existe p intégrales de première espèce linéairement indépendantes. On démontre, d'autre part, qu'il existe des intégrales $t_1, t_2, t_3, \ldots$, admettant un point P donné arbitrairement sur la surface $\mathcal{R}_z$ comme pôle d'ordre 1, 2, 3, ..., et qui n'admettent pas d'autres pôles; on les appelle *intégrales élémentaires de deuxième espèce;* il existe une intégrale admettant deux points P_1, P_2, donnés arbitrairement sur $\mathcal{R}_z$ comme points critiques logarithmiques et qui n'ont pas d'autres infinis; on l'appelle *intégrale élémentaire de troisième espèce*. L'existence des intégrales élémentaires est démontrée à l'aide du théorème de Riemann-Roch. Enfin, en décomposant un diviseur algébrique par une suite d'opérations analogues à celles qui conduisent progres-

sivement à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples, on obtient ce théorème :

Toute intégrale abélienne peut être décomposée en une somme d'intégrales élémentaires, et cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

17. Avant d'aborder l'étude des périodes des intégrales abéliennes, on expose, d'après Riemann, les principes d'*Analysis situs* qui conduisent à tracer sur la surface $\mathcal{R}_z$ un système de coupures.

Une surface limitée par une courbe est simplement connexe si toute coupure allant d'un point à un autre de la courbe limite partage cette surface en deux morceaux séparés ; elle est plusieurs fois connexe si l'on peut la transformer en une surface simplement connexe au moyen d'une coupure ou de plusieurs coupures successives.

Pour montrer comment on ramène une surface $\mathcal{R}_z$ à être simplement connexe, les auteurs raisonnent sur cette surface elle-même. Afin d'abréger le résumé de ce Chapitre, je m'appuierai sur cette proposition connue, que l'on peut faire correspondre point par point, d'une manière univoque, une surface de Riemann de genre p à un disque percé de p trous ([1]). Commençant par le cas de $p = 1$, où ce disque peut être remplacé par un tore, je suppose une petite ouverture faite dans la surface en un point O du plus grand des cercles situés dans l'équateur ; une première coupure b_1 sera le cercle méridien passant par O, la seconde a_1 le plus petit des cercles situés dans l'équateur ; ces coupures tracées, je pourrai transformer le tore en un tube cylindrique fendu le long d'une arête, puis dérouler cette surface cylindrique suivant un rectangle. Soit maintenant un disque plan à trois trous ; un plan parallèle aux faces du disque et situé entre ces faces détermine une coupure autour de chaque trou ; soient a_1, a_2, a_3 ces coupures ; un fil passant par le trou a_1 tendu sur la surface et noué sur le bord extérieur du disque détermine une coupure b_1 qui croise la coupure a_1, soient b_2, b_3 les coupures analogues qui correspondent à a_2 et a_3 ; enfin on joindra b_1 à b_2 puis b_2 à b_3 par des coupures c_2, c_3. On voit

---

([1]) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 380.

bien ces coupures : a_1, a_2, a_3 sont dans le plan qui, dans le cas du tore, est le plan de l'équateur; b_1, b_2, b_3 sont les analogues du cercle méridien du tore, c_1, c_2 seront, par exemple, dans le plan des coupures a_1, a_2, a_3, mais seront situées sur le contour extérieur du disque. On vérifie que, si le corps est de genre p, pour ramener la surface de Riemann à être simplement connexe, il faut tracer p coupures a et p coupures b.

L'ensemble de ces coupures à deux bords peut être regardé comme un contour unique et fermé formant un chemin continu C. On définit un sens sur ce chemin en le supposant parcouru par un mobile qui reste à l'extérieur du disque et qui a constamment à sa gauche l'aire enveloppée par le contour C; on constate que les bords opposés d'une même coupure sont parcourus en sens contraires.

On prendra, à chaque instant dans la suite, la différence des valeurs que prend, sur les bords opposés d'une coupure, une fonction attachée à la surface de Riemann. Pour fixer le signe de cette différence, il convient de distinguer un bord gauche et un bord droit pour chaque coupure. En vue d'une forme canonique à obtenir pour une relation fondamentale, cette distinction se fait de la façon suivante : On choisit arbitrairement le bord gauche de a_1; pour la coupure b_1, le choix est fait de façon que le mobile, décrivant le contour C, parcoure le bord gauche de a_1, en allant du bord droit au bord gauche de b_1. On déplace, comme cela est permis, la coupure c_2, de façon qu'elle aille de l'extrémité du bord droit de b_1 à un point de a_2; le mobile quittant b_1 suit un bord de c_2 qu'on prendra comme bord gauche de c_2, puis un bord de a_2 qu'on prendra comme bord gauche de a_2, et ainsi de suite.

18. Soit $\mathcal{R}'$ la surface simplement connexe déduite de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ par le système de coupures qui vient d'être défini. Sur cette surface $\mathcal{R}'$, on peut étudier les intégrales abéliennes, à l'aide des théorèmes de Cauchy, sur les intégrales de fonctions complexes. On obtient les résultats suivants :

Sur la surface $\mathcal{R}'$, une intégrale de première ou de seconde espèce

$$\omega = \int_{P_0}^{P} \xi\, dz$$

est une fonction uniforme de sa limite supérieure; cette fonction uniforme sera désignée par $\overline{\omega}(P)$.

Soient P_λ et P_ρ, deux points situés en face l'un de l'autre et pris l'un sur le bord gauche, l'autre sur le bord droit de la coupure a_i; la différence $\overline{\omega}(P_\lambda) - \overline{\omega}(P_\rho)$ est constante tout le long de la coupure a_i; on désignera par A_i cette différence constante et par B_i la différence correspondante pour la coupure b_i; la différence correspondante pour une coupure c_i est nulle. Les $2p$ constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$ se nomment *les modules de périodicité de l'intégrale considérée*. Une période quelconque, c'est-à-dire la différence des valeurs que prend en un point P de la surface non découpée $\mathcal{R}$ l'intégrale ω pour deux chemins d'intégration différents, une période quelconque est de la forme

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_p A_p + n_1 A_1 + \ldots + n_p B_p,$$

$m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_p$ désignant des nombres entiers.

Pour étudier une intégrale de troisième espèce, il faut introduire de nouvelles coupures sur la surface $\mathcal{R}'$. On enlève un petit cercle $\varkappa_i$ autour de chacun des points critiques logarithmiques $P^{(i)}$ et l'on joint ce cercle $\varkappa_i$ à la courbe limite de $\mathcal{R}'$ par une coupure l_i. Sur la surface $\mathcal{R}''$ ainsi déduite de $\mathcal{R}'$, l'intégrale de troisième espèce est une fonction uniforme de sa limite supérieure; les modules de périodicité sont définis par les égalités suivantes :

$$(a_i) \qquad \overline{\omega}(P_\lambda) - \overline{\omega}(P_\rho) = A_i,$$

$$(b_i) \qquad \overline{\omega}(P_\lambda) - \overline{\omega}(P_\rho) = B_i,$$

$$(c_i) \qquad \overline{\omega}(P_\lambda) - \overline{\omega}(P_\rho) = 0,$$

$$(l_k) \qquad \overline{\omega}(P_\lambda) - \overline{\omega}(P_\rho) = 2i\pi R_k,$$

R_k étant le résidu relatif au point critique logarithmique P_k. La somme de tous les résidus d'une différentielle abélienne est égale à zéro.

19. Si l'on considère l'intégrale $\int u\,dv$, où u et v désignent la partie réelle et le coefficient de i dans la valeur d'une intégrale de première espèce, et si l'on étend cette intégrale au contour C qui limite la surface $\mathcal{R}'$, on est conduit à une inégalité fondamen-

tale; A_k et B_k désignant les périodes de l'intégrale considérée le long des coupures a_k et b_k, on pose $A_k = \alpha_k + i\alpha'_k$, $B_k = \beta_k + i\beta'_k$, et l'on trouve

$$(\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1) + (\alpha_2\beta'_2 - \beta_2\alpha'_2) + \ldots + (\alpha_p\beta'_p - \beta_p\alpha'_p) > 0,$$

le premier membre ne pouvant être nul que si l'intégrale considérée se réduit à une constante.

En s'appuyant sur ce résultat, on arrive à reconnaître, d'après Riemann, qu'une intégrale abélienne est déterminée, à une constante additive près, si l'on se donne les discontinuités avec les parties principales des développements correspondants et, en outre, les périodes le long des coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (ou $b_1, b_2, \ldots, b_p$).

On choisit comme intégrales normales de première espèce p intégrales de première espèce $u_1, u_2, \ldots, u_p$, définies par cette condition que les périodes de u_i le long des coupures a sont toutes nulles, sauf le long de la coupure a_i, où la période est égale à l'unité.

S'il s'agit d'une intégrale qui n'est pas partout finie, on peut supposer que ses périodes, le long des coupures a, sont toutes nulles; on dit alors que l'intégrale est normale relativement aux coupures a.

20. La détermination d'une intégrale $\int \omega_1 \, d\omega_2$ où ω_1 et ω_2 sont deux intégrales abéliennes attachées à la surface $\mathcal{R}'$, l'intégrale étant prise le long du contour C de $\mathcal{R}'$, donne, par une méthode uniforme, les résultats suivants qui sont très importants.

Entre les périodes de deux intégrales de première espèce, on a la relation

$$\sum_p (A_k^{(1)} B_k^{(2)} - B_k^{(1)} A_k^{(2)}) = 0;$$

on en conclut que le déterminant formé des périodes des intégrales normales de première espèce $u_1, u_2, \ldots, u_p$ le long des coupures $b_1, b_2, \ldots b_p$ est un déterminant symétrique.

Une intégrale de deuxième espèce, normale relativement aux coupures a, admettant un seul pôle du premier ordre Q avec un

résidu égal à 1, a pour périodes le long des coupures b :

$$-2i\pi u'_1(Q), \quad -2i\pi u'_2(Q), \quad \ldots, \quad -2i\pi u'_p(Q),$$

$u'_k(Q)$ désignant la valeur que prend, au point Q, la dérivée de l'intégrale de première espèce u_k.

Une intégrale de troisième espèce, normale relativement aux coupures a, admettant comme discontinuités les deux points critiques logarithmiques Q_1, Q_2 avec les résidus -1 et $+1$, a pour période le long de b_k

$$2i\pi\{u_k(Q_2) - u_k(Q_1)\},$$

u_k désignant la $k^{\text{ième}}$ intégrale normale de première espèce.

Soit t_Q une intégrale normale de seconde espèce avec le seul pôle Q et t'_Q la dérivée de cette intégrale, on a

$$t'_Q(P) = t'_P(Q).$$

Soit $\omega_{P_1P_2}$ une intégrale normale de troisième espèce admettant les deux points P_1, P_2 comme points critiques logarithmiques avec les résidus -1 et $+1$, on a

$$\int_{Q_1}^{Q_2} d\varpi_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} d\varpi_{Q_1Q_2}.$$

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de l'échange du paramètre et de l'argument.

21. On va maintenant se servir des intégrales normales de seconde espèce pour décomposer en éléments simples une fonction algébrique, et de la formule de décomposition déduire le théorème de Riemann-Roch.

Soit t une fonction algébrique ayant comme pôles simples $P_1, P_2, \ldots, P_r$, et soient $t_{P_1}, t_{P_2}, \ldots, t_{P_r}$, les intégrales normales de seconde espèce ayant respectivement comme pôles simples $P_1, P_2, \ldots, P_r$, avec un résidu égal à 1. On peut déterminer les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_r$, de façon que la différence

$$t - C_1 t_{P_1} - C_2 t_{P_2} - \ldots - C_r t_{P_r}$$

soit partout finie; or cette différence est une intégrale abélienne de première espèce et ses périodes, le long des coupures a, sont toutes nulles; elle doit donc se réduire à une constante. Si l'on

désigne par C_0 cette constante, on aura

$$t = C_0 + C_1 t_{P_1} + C_2 t_{P_2} + \ldots + C_r t_{P_r}.$$

C'est la formule annoncée de décomposition en éléments simples. Les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_r$ sont assujetties à p conditions que l'on obtient en écrivant que les périodes de t pour les coupures b sont toutes nulles :

$$C_1 u'_k(P_1) + C_2 u'_k(P_2) + \ldots + C_r u'_k(P_r)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

Les auteurs insistent sur la nouvelle solution, fournie par les propriétés des intégrales normales, à la question : Trouver la dimension de la classe (Q) déterminée par le diviseur

$$Q = \frac{P_1 P_2 \ldots P_r}{Q_1 Q_2 \ldots Q_s},$$

en supposant pour simplifier que tous les facteurs du numérateur et du dénominateur sont des facteurs simples.

Soit G un diviseur entier de cette classe, on a $G = Q\zeta$, ζ étant une fonction du corps ou $\zeta = G\frac{1}{Q}$, de sorte que la question revient à trouver toutes les fonctions du corps $K(z, u)$ qui sont des multiples de $\frac{1}{Q}$, c'est-à-dire qui admettent $P_1, P_2, \ldots, P_r$ comme pôles simples et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ comme zéros simples. Pour cela, on se sert de la formule précédente de décomposition en éléments simples; aux p relations déjà écrites, entre les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_r$, il faut joindre s relations exprimant que $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ annulent t; il n'y a plus qu'à discuter un système d'équations linéaires et à interpréter les différents cas qui se présentent dans la discussion : Si les $p + s$ relations linéaires sont distinctes, la fonction algébrique t dépend de

$$r + 1 - p - s = q - p + 1 \qquad (q = r - s)$$

constantes; dans le cas général, on trouve

$$\{Q\} = q - p + 1 + \sigma \qquad \text{et} \qquad \sigma = \left\{\frac{W}{Q}\right\}.$$

C'est l'énoncé déjà donné du théorème de Riemann-Roch : les au-

teurs expliquent les raisons qui leur font préférer la première démonstration donnée sans l'aide des transcendantes abéliennes.

L'étude des intégrales abéliennes est reprise, au point de vue de Weierstrass, avec des développements dus aux auteurs de ce livre, développements qui sont indiqués à la page 645. Pour rapprocher l'exposé des idées de Weierstrass de la théorie précédente de Riemann, je passe de suite à l'analyse de la sixième Partie.

SIXIÈME PARTIE.

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE LES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

22. On supposera, à partir de maintenant, que, au point à l'infini, les n feuillets se réunissent en un point de ramification d'ordre $n-1$, ce qui peut toujours être obtenu par une transformation birationnelle.

L'ensemble des fonctions du corps $K(z, u)$ qui ne deviennent infinies qu'au point à l'infini, P_∞, forme un idéal $I(1)$. On considère un système fondamental pour cet idéal $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-1)}$, qui soit normal pour $z=\infty$, puis les n fonctions $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n-1)}$, qui correspondent au système complémentaire. Ces deux systèmes serviront dans tout ce qui suit pour représenter les fonctions de l'idéal $I(1)$ et les intégrales abéliennes.

On obtient d'abord ce résultat qui est fondamental :

Si l'on considère les fonctions du corps qui ne deviennent infinies qu'au point P_∞ et, pour chacune d'elles, le terme de degré le plus élevé en $z^{\frac{1}{n}}$ qui figure dans le développement en série relatif au point P_∞, le degré de ce terme ne peut pas prendre toutes les valeurs entières et positives : *Le nombre des entiers qui manquent est exactement égal au nombre p des intégrales de première espèce.* Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ les entiers qui manquent rangés par ordre de grandeur; on peut choisir des intégrales normales de première espèce $w_1, w_2, \ldots, w_p$ telles que, dans le développement de w_i suivant les puissances de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$, le premier terme soit de degré ρ_i; on peut même obtenir que les termes de degré $\rho_{i+1}, \ldots, \rho_p$ aient tous des coefficients nuls; il y a une

seule intégrale de première espèce w_i répondant à toutes ces conditions.

On peut définir p intégrales de seconde espèce $t_1, t_2, \ldots, t_p$ qui deviennent infinies au point P_∞, de telle façon que le produit $t_i w_i$ prenne en ce point une valeur finie et différente de zéro; les intégrales $t_1, t_2, \ldots, t_p$ ne sont définies de cette façon qu'à une combinaison linéaire près des intégrales de première espèce.

Toute intégrale attachée à la surface $\mathcal{R}_z$ et n'ayant que des discontinuités polaires peut être représentée par la somme d'une fonction du corps et d'une combinaison linéaire et homogène des $2p$ intégrales fondamentales de première et de seconde espèce

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_p; \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_p.$$

Pour arriver à une représentation des intégrales de troisième espèce qui va jouer le rôle principal dans toute cette théorie, on considère la fonction

$$\theta(P, \overline{P}) = \frac{\overline{\xi^{(0)}}\,\eta^{(0)} + \overline{\xi^{(1)}}\,\eta^{(1)} + \ldots + \overline{\xi^{(n-1)}}\,\eta^{(n-1)}}{z - \overline{z}},$$

où P et $\overline{P}$ désignent deux points différents de la surface $\mathcal{R}_z$ et où les lettres désignant des fonctions sont surmontées, ou non, d'une barre horizontale suivant qu'elles correspondent au point $\overline{P}$ ou au point P.

L'intégrale élémentaire de troisième espèce admettant comme points logarithmiques les points Q_1 et Q_2 avec les résidus -1 et $+1$ peut être représentée par l'une ou l'autre des expressions

$$\varpi_{Q_1 Q_2} = \int \{\theta(P, Q_2) - \theta(P, Q_1)\}\, dz = \int dz \int_{Q_1}^{Q} \frac{d\theta(P, \overline{P})}{d\overline{z}}\, d\overline{z}.$$

Dans le cas particulier où le corps est défini par l'équation $u^2 = g(z)$, $g(z)$ désignant un polynome entier de degré $2p+1$, les p nombres entiers désignés plus haut par ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_p$ sont $1, 3, \ldots, 2p-1$; les intégrales normales de première et de deuxième espèce sont des combinaisons linéaires des intégrales

$$\int \frac{z^h\, dz}{\sqrt{u}} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1).$$

enfin l'on a

$$\theta(P, \overline{P}) = \frac{1}{2u} \frac{u - \overline{u}}{z - \overline{z}}.$$

23. Le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument résultera ici d'une identité algébrique qui peut s'énoncer comme il suit :

Si l'on détermine d'une manière convenable les intégrales de deuxième espèce $t_1, t_2, \ldots, t_p$ qui n'étaient encore définies qu'à des intégrales près de première espèce, l'expression différentielle

$$D(P, \overline{P}) = \frac{d}{d\overline{z}} \theta(P, \overline{P})\, d\overline{z}\, dz + \sum_{i=1}^{p} dw_i(P)\, dt_i(\overline{P})$$

ne change pas quand on échange P et $\overline{P}$.

Cette identité vérifiée, on intègre l'expression différentielle $D(P, \overline{P})$ en supposant que les points variables P et $\overline{P}$ décrivent deux chemins qui ne se rencontrent pas, le premier chemin s allant de P_1 à P_2, le second chemin σ allant de Q_1 à Q_2 et l'on obtient le théorème suivant :

L'intégrale

$$\int_{P_1}^{P_2} d\varpi_{Q_1 Q_2}$$
$$= \int_{P_1}^{P_1} \{\theta(P, Q_2) - \theta(P, Q_1)\}\, dz + \sum_{i=1}^{p} \int_{P_1}^{P_2} dw_i \int_{Q_1}^{Q_2} dt_i$$

ne change pas quand on échange P_1 *et* P_2 *avec* Q_1 *et* Q_2 *ou en abrégé*

$$\int_{P_1}^{P_2} d\varpi_{Q_1 Q_2} = \int_{Q_1}^{Q_2} d\varpi_{P_1 P_2}.$$

C'est le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument.

24. Ce théorème doit être modifié comme il suit dans le cas où les deux chemins d'intégration s et σ se croisent, s allant de P_1 à P_2 et σ de Q_1 à Q_2, d'après la notation adoptée au numéro précédent.

Si l'on pose

$$\int_s d\varpi_{Q_1 Q_2} = \int_s [\theta(P, Q_2) - \theta(P, Q_1)]\, dz - \sum_{i=1}^{p} \int_s dw_i \int_\sigma dt_i,$$

on a la relation

$$\int_s d\varpi_{Q_1 Q_2} - \int_\sigma d\varpi_{P_1 P_2} = 2i\pi(s, \sigma),$$

où (s, σ) désigne l'excès du nombre des passages positifs sur le nombre des passages négatifs de s sur σ, un passage étant regardé comme positif quand le chemin s va du bord gauche au bord droit du chemin σ, comme négatif dans le cas contraire.

On vérifie de suite

$$(s, \sigma) = -(\sigma, s), \qquad (s, \sigma' + \sigma'') = (s, \sigma') + (s, \sigma'').$$

Le nombre entier (s, σ) s'appelle, d'après Kronecker, la *caractéristique* des deux chemins s et σ; l'importance du théorème précédent dans la théorie actuelle résulte de ce qu'il exprime la caractéristique des chemins s et σ au moyen d'intégrales prises suivant l'un ou l'autre de ces chemins et qu'il donne ainsi un moyen de parvenir aux propriétés des surfaces $\mathfrak{R}_z$ relatives à leur connexion, sans faire intervenir l'*Analysis situs*.

Si l'on considère en particulier un chemin fermé s qui ne se croise pas et pour lequel les périodes des $2p$ intégrales t_1, $t_2, \ldots, t_p, w_1, w_2, \ldots, w_p$ sont toutes nulles, puis un chemin non fermé $\sigma = Q_1 Q_2$, on trouve

$$2i\pi(s, \sigma) = \int_s [\theta(P, Q_2) - \theta(P, Q_1)]\, dz,$$

et l'on en peut déduire que la coupure s partage la surface $\mathfrak{R}_z$ en deux morceaux séparés.

Si deux chemins a et b tracés sur la surface sont tels que b commence au point où a se termine, le chemin qui va du commencement de a à l'extrémité de b est par définition la somme $a + b$ des deux chemins donnés; on définit de même la différence $a - b$ et une combinaison $xa + yb$ où x et y désignent des entiers positifs ou négatifs.

On dit que deux chemins a et b sont équivalents si l'on a

$$\int_a dt_i = \int_b dt_i, \qquad \int_a dw_i = \int_b dw_i,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$ et l'on écrit pour rappeler ces relations

$$a \sim b \qquad \text{ou} \qquad a - b \sim 0.$$

Dans les questions relatives à l'équivalence on peut se borner à considérer des chemins fermés; c'est ce qu'on fera à partir de maintenant et l'on emploiera le mot *chemin de périodes* (*Periodenweg*).

On dit que m chemins de périodes $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sont linéairement dépendants si l'on a la relation

$$x_1 s_1 + x_2 s_2 + \ldots + x_m s_m \sim 0,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignant des entiers positifs ou négatifs.

On peut (d'une infinité de manières) trouver sur la surface $\mathfrak{R}$ $2p$ chemins de périodes $s_1, s_2, \ldots, s_{2p}$ linéairement indépendants, et tels que tout autre chemin de périodes s peut (d'une seule manière) se mettre sous la forme

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \ldots + x_{2p} s_{2p},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{2p}$ désignant des nombres rationnels; on dit que le système $(s_1, s_2, \ldots, s_{2p})$ est un système fondamental de chemins de périodes.

25. Si l'on considère les deux chemins de périodes s et σ s'exprimant à l'aide du système fondamental par les égalités

$$s = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \ldots + x_{2p} s_{2p},$$
$$\sigma = y_1 s_1 + y_2 s_2 + \ldots + y_{2p} s_{2p},$$

où les x et les y désignent des nombres rationnels, on aura

$$(s, \sigma) = y_1 (s, s_1) + y_2 (s, s_2) + \ldots + y_{2p} (s, s_{2p})$$

et

$$(s, s_h) = x_1 (s_1, s_h) + x_2 (s_2, s_h) + \ldots + x_{2p} (s_{2p}, s_h).$$

Donc

$$(s, \sigma) = \sum_{g,h} (s_g, s_h) x_g y_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On voit que (s, σ) s'exprime par une forme bilinéaire à coefficients entiers, des nombres x_g, y_h; cette forme bilinéaire, ainsi associée au système fondamental $(s_1, s_2, \ldots, s_{2p})$, se nomme *forme caractéristique*. L'étude des systèmes fondamentaux de chemins de périodes va être ramenée à celles de leurs formes caractéristiques.

On dit que deux systèmes fondamentaux $(s_1, s_2, \ldots, s_{2p})$ et $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_{2p})$ sont équivalents si l'on a

$$s'_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} s_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les coefficients $k_{\alpha\beta}$ étant des nombres entiers tels que le déterminant $|k_{\alpha\beta}| = \pm 1$, de sorte que, si l'on résout les équations précédentes par rapport à $s_1, s_2 \ldots, s_{2p}$, les coefficients de $s'_1, s'_2, \ldots,$ sont encore des nombres entiers.

Un système fondamental de chemins de périodes $(s_1, s_2, \ldots, s_{2p})$ dont la forme caractéristique admet comme diviseurs élémentaires (*Elementarteiler* d'après la définition de Weierstrass) les nombres $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est équivalent à un autre système fondamental $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_{2p})$ dont la forme caractéristique est

$$e_1(x_1 y_{p+1} - x_{p+1} y_1) + \ldots + e_p(x_p y_{2p} - x_{2p} y_p).$$

Dans le cas où tous les diviseurs élémentaires de la forme caractéristique sont égaux à l'unité, le système fondamental $(s'_2, s'_2, \ldots, s'_{2p})$ jouit de cette propriété que tout autre chemin est donné par une égalité

$$s = x_1 s'_1 + x_2 s'_2 + \ldots + x_{2p} s'_{2p},$$

où tous les coefficients $x_1, \ldots, x_{2p}$ sont entiers.

En s'appuyant sur ces propositions, on trouve un système canonique de coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ pour la surface $\mathfrak{R}_z$ et l'on établit, pour une intégrale de première ou seconde espèce, la formule

$$\int_s dt = (s, a_1)A_1 + \ldots + (s, a_p)A_p + (s, b_1)B_1 + \ldots + (s, b_p)B_p$$

où l'on a posé

$$\int_{a_i} dt = B_i, \qquad \int_{b_i} = -A_i.$$

Cette formule définit avec précision l'intégrale $\int dt$ prise suivant un chemin fermé s.

26. On va maintenant retrouver les relations entre les périodes des intégrales fondamentales de première et de seconde espèce. Pour plus de symétrie dans les notations, on désignera par

$$t_1, \quad t_2, \quad t_p, \quad t_{p+1} \quad \ldots, \quad t_{2p},$$

les intégrales désignées jusqu'ici par

$$t_1, \quad t_2, \quad t_p, \quad w_1, \quad \ldots, \quad w_p,$$

et par

$$s_1, \quad s_2, \quad s_p, \quad s_{p+1}, \quad \ldots, \quad s_{2p},$$

les coupures du système canonique qu'on avait d'abord appelées

$$a_1, \quad a_2, \quad a_p, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_p;$$

enfin, pour représenter le système des périodes des $2p$ intégrales fondamentales, on posera

$$t_{\alpha\beta} = \int_{s_\beta} dt_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2p).$$

En considérant une substitution qui transforme en elle-même la forme caractéristique

$$\sum_{k=1}^{p} (x_k y_{p+k} - x_{p+k} y_k) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

on trouve entre les périodes $t_{\alpha\beta}$ le système des relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{p} (t_{k,\alpha} t_{p+k,\beta} - t_{p+k,\alpha} t_{k,\beta}) = -2i\pi\varepsilon_{\alpha\beta},$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et l'on montre que ces relations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$\sum_{k=1}^{p} (t_{\alpha,k} t_{\beta,p+k} - t_{\alpha,p+k} t_{\beta,k}) = -2i\pi\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Sous cette dernière forme chacune des relations contient

les $2p$ périodes de deux intégrales t_α, t_β, tandis que sous la forme précédente les $2p$ intégrales interviennent, mais pour deux chemins de périodes seulement.

La première forme est habituellement désignée sous le nom de *forme de Weierstrass*, la seconde sous le nom de *forme de Riemann* pour les relations bilinéaires entre les périodes des $2p$ intégrales fondamentales de première et de seconde espèce.

Un changement dans le système canonique des $2p$ coupures est relié à une substitution qui transforme en elle-même la forme caractéristique.

27. L'étude des périodes de l'intégrale normale de troisième espèce est reprise au point de vue de la théorie actuelle et l'on parvient à la formule de décomposition d'une fonction du corps en produit de fonctions primaires (*Primfunctionen*).

Si le diviseur correspondant à cette fonction ζ est

$$Q = Q_1^{\mu_1} Q_2^{\mu_2} \ldots Q_h^{\mu_h} \qquad (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_h = 0),$$

on a

$$\zeta = e^{\mu_1 \varpi_{Q_0 Q_1} + \mu_2 \varpi_{Q_0 Q_2} + \ldots + \mu_h \varpi_{Q_0 Q_h} + C_1 w_1 + C_2 w_2 + \ldots + C_p w_p},$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ désignant des constantes convenablement choisies et Q_0 un point arbitraire.

Puisque ζ est une fonction uniforme sur la surface $\mathcal{R}_z$, il faut que ses modules de périodicité relatifs aux $2p$ coupures soient nuls; p des égalités ainsi obtenues déterminent les constantes C_1, les p dernières donnent les relations qui existent entre les zéros et les infinis d'une fonction algébrique de genre p.

28. Le théorème d'Abel est énoncé sous la forme suivante, en considérant successivement une intégrale de première, de seconde ou de troisième espèce.

Soient $A = A_1 A_2 \ldots A_r$, $B = B_1 B_2 \ldots B_r$ deux diviseurs entiers équivalents et $x' = \frac{B}{A}$.

1° Si w désigne une intégrale quelconque de première espèce, on a

$$\int_{A_1}^{B_1} dw + \int_{A_2}^{B_2} dw + \ldots + \int_{A_r}^{B_r} dw = 0.$$

en supposant que les chemins d'intégration sont superposés sur la surface $\mathcal{R}_{x'}$.

2° Si t_μ est une intégrale élémentaire de deuxième espèce admettant Q comme pôle multiple d'ordre μ, la somme

$$\int_{A_1}^{B_1} dt_\mu + \int_{A_2}^{B_2} dt_\mu + \ldots + \int_{A_r}^{B_r} dt_\mu$$

est une fonction entière de l'inverse de la valeur q que prend x' au point Q, en supposant que les chemins d'intégration sont superposés sur la surface $\mathcal{R}_{x'}$.

3° Si $\varpi_{Q_1 Q_2}$ est une intégrale normale de troisième espèce, la somme

$$\int_{A_1}^{B_1} d\varpi_{Q_1 Q_2} + \int_{A_2}^{B_2} d\varpi_{Q_1 Q_2} + \ldots + \int_{A_r}^{B_r} d\varpi_{Q_1 Q_2}$$

est égale au logarithme du quotient des valeurs que prend x' en Q_1 et en Q_2, les chemins d'intégration étant superposés sur la surface $\mathcal{R}_{x'}$.

Enfin, la théorie des intégrales abéliennes vient aboutir au problème d'inversion de Jacobi :

Les équations

$$\int_{P_\infty}^{P_1} dw_i + \int_{P_\infty}^{P_2} dw_i + \ldots + \int_{P_\infty}^{P_p} dw_i = v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où les intégrales qui ont même limite supérieure sont supposées prises suivant le même chemin, font correspondre à tout diviseur

$$Q = P_1 P_2 \ldots P_p$$

des valeurs de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ qui sont définies à des multiples près des périodes. Inversement $v_1, v_2, \ldots, v_p$ étant donnés, on demande de trouver $P_1, P_2, \ldots, P_p$.

C'est ce problème posé par Jacobi qui est l'origine de la théorie des fonctions abéliennes.

Pour rapprocher la théorie des intégrales abéliennes exposée en dernier lieu de celle qui avait été donnée d'abord, d'après Riemann, j'ai laissé de côté la quatrième et la cinquième partie qui contiennent une exposition rigoureuse de propriétés importantes. Je me bornerai à indiquer les principaux sujets qui s'y trouvent traités.

QUATRIÈME PARTIE.

LES COURBES ET LES FORMATIONS ALGÉBRIQUES (ALGEBRAISCHE GEBILDE).

29. On étudie dans cette Partie les points multiples d'une courbe algébrique $F(x, y) = 0$, le diviseur des points doubles, c'est-à-dire le dénominateur du diviseur différentiel associé à la différentielle

$$d\varphi = \frac{dx}{F'_y} = \frac{dy}{-F'_x},$$

la résolution des singularités, le théorème du reste, les groupes de points corésiduels.

Les formules de Plucker sont rattachées aux diviseurs de ramification (*Verzweigungsdivisoren*) : Les coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2 d'un point d'une courbe étant supposées des fonctions d'une variable u du corps K, les deux premiers diviseurs de ramification sont définis en considérant les différentielles

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1, \quad x_2 dx_0 - x_0 dx_2, \quad x_0 dx_1 - x_1 dx_0,$$

puis

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0, & x_1, & x_2 \\ \dfrac{dx_0}{du}, & \dfrac{dx_1}{du}, & \dfrac{dx_2}{du} \\ \dfrac{d^2x_0}{du^2}, & \dfrac{d^2x_1}{du^2}, & \dfrac{d^2x_2}{du^2} \end{vmatrix} du_2.$$

On cherche ensuite, pour les courbes gauches, à généraliser les résultats précédents et l'on détermine en particulier le nombre de conditions que doit remplir une surface pour contenir tout entière une courbe gauche donnée.

CINQUIÈME PARTIE.

LES CLASSES DE TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES.

30. On étudie la courbe principale ou courbe des différentielles de première espèce définie par les formules

$$\frac{x_1}{dw_1} = \frac{x_2}{dw_2} = \ldots = \frac{x_p}{dw_p},$$

puis les points de Weierstrass qui sont définis à l'aide des diviseurs de ramification et qui jouent un rôle important dans la théorie des fonctions algébriques faite d'après les idées de Weierstrass.

On établit que le nombre des transformations qui transforment en elle-même une formation algébrique de genre $p > 1$ est toujours fini, tandis qu'il existe un nombre infini de ces transformations quand le genre p est inférieur ou égal à un.

On range dans une même classe, d'après Riemann, deux équations algébriques qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation birationnelle. Parmi toutes les courbes appartenant à la même classe, on en choisit une pour servir de *courbe normale* à la classe considérée et cette courbe est obtenue en partant de la courbe principale correspondante et en faisant une suite de projections qui abaissent chacune d'une unité le nombre des dimensions de l'espace auquel appartient cette courbe principale.

Riemann a cherché de combien de paramètres dépend essentiellement une classe de courbes algébriques, de façon qu'à des valeurs déterminées de ces paramètres corresponde une classe ou un nombre limité de classes; la solution de ce problème est différente, on le montre sur des exemples, suivant que le corps K est le plus général de son genre ou qu'il possède des propriétés particulières.

On démontre que, si le corps K est le corps le plus général de genre p, le nombre de ces paramètres que Riemann appelle des *modules*, est égal à $3p - 3$.

Comme exemples de corps particuliers, on étudie les corps hyperelliptiques et les corps qui contiennent des fonctions du troisième ordre. E. L.

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE.

Monsieur l'Éditeur,

Dans son article récent sur la *Représentation proportionnelle*, M. La Chesnais dit : « On voit donc que le système belge favorise les partis les plus forts : c'est même pour cette raison qu'il a été adopté (*Bulletin*, 1re Partie, p. 100) ».

Non, le système de feu le Professeur Dhondt a été adopté en Belgique, parce que *le nombre des suffrages inefficaces y est moindre que dans aucun autre système.*

Soient, en effet, n députés à élire et, pour fixer les idées, supposons que trois partis A, B, C, sur un nombre total de s suffrages, en recueillent respectivement a, b, c. Soit Δ un nombre tel que

$$a = p\Delta + \alpha, \qquad b = q\Delta + \beta, \qquad c = r\Delta + \gamma,$$
$$p + q + r = n,$$

α, β, γ étant les restes de la division de a, b, c par Δ, et l'un de ces restes étant au plus égal à 2 ; un ou deux des nombres p, q, r peut d'ailleurs être nul.

Dans le système belge ou système Dhondt, les partis A, B, C auront respectivement droit à p, q, r députés.

Or, la répartition des sièges de députés entre les trois partis eût été la même si α électeurs du parti A, β du parti B, γ du parti C n'avaient pas voté. Il y a donc

$$\alpha + \beta + \gamma = a + b + c - (p + q + r)\Delta = s - n\Delta \text{ suffrages inefficaces.}$$

Considérons un *autre* système quelconque de répartition des n sièges. Supposons, par exemple, que l'on en attribue p' au parti A, q' au parti B, r' au parti C. Comme

$$n = p' + q' + r' = p + q + r,$$

l'un au moins des nombres p', q' ou r' sera supérieur au nombre

correspondant p, q ou r de la première répartition. Soit, par exemple, $p' > p$. On aura, en divisant a par p',

$$a = p'\Delta' + \alpha',$$

α' étant au plus égal à $p' - 1$. On déduit de là, puisque

$$a = p\Delta + \alpha, \qquad \alpha < \Delta,$$
$$p'\Delta' + \alpha' = p\Delta + \alpha < (p+1)\Delta,$$

et comme $p' \geqq p + 1$, $\Delta' < \Delta$.

Dans le second mode de répartition, il y aura au moins

$$s - n\Delta' = (s - n\Delta) + n(\Delta - \Delta') \textit{ suffrages inefficaces,}$$

c'est-à-dire, $n(\Delta - \Delta')$ *de plus que dans le système Dhondt.*

Au point de vue du moindre nombre des suffrages inefficaces, le système belge ou système Dhondt l'emporte donc sur tous les autres et, en particulier, sur le *système des plus grands restes,* appelé *système rationnel* par M. La Chesnais.

Malheureusement, ni ce dernier système (qui est le plus proportionnel de tous), ni le système Dhondt (qui favorise pourtant le parti qui a la majorité dans chaque circonscription) n'assurent une majorité dans le Parlement au parti qui aura recueilli la majorité des suffrages dans le pays, comme on peut le prouver aisément. En particulier, dans le système des plus grands restes, un parti en minorité dans le pays, s'il se divise habilement en deux ou trois *sous-partis* dans chaque circonscription électorale, augmente ses chances et peut conquérir la majorité au Parlement. Dans le système belge, un parti n'a jamais intérêt à se diviser.

Veuillez agréer, Monsieur l'Éditeur, l'expression de ma considération distingnée. P. Mansion.

Gand, 19 mai 1903.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JOUFFRET (E.). — Traité élémentaire de géométrie a quatre dimensions. 1 vol. in-8° de xxx-212 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Le livre de M. le lieutenant-colonel Jouffret rendra de grands services à ceux qui veulent s'initier à la Géométrie à quatre dimensions et étudier en particulier l'un des problèmes les plus curieux qu'elle traite, celui des polyèdres réguliers.

Il est écrit d'une façon claire, alerte, et l'enthousiasme que l'auteur éprouve pour le sujet qu'il traite n'est pas pour déplaire.

M. Jouffret s'est borné à l'espace euclidien. Quelques-uns regretteront peut-être cette limitation et se demanderont pourquoi, du moment qu'on sort de la réalité pour entrer dans le domaine de la pure abstraction, on n'aborde pas de suite le sujet dans toute sa généralité.

Tout d'abord, il faut bien se limiter, et l'étude générale de la notion d'espace, des groupes qu'elle implique, aurait demandé à l'auteur de longs développements qu'il voulait sans doute éviter.

Il a pu juger aussi que la difficulté qui consiste à passer de la Géométrie ordinaire à la Géométrie à quatre dimensions était suffisante, et qu'il ne fallait point obliger le lecteur à rompre avec toutes ses habitudes.

On ne doit pas oublier non plus que le terme de son Ouvrage était ce beau problème des polyèdres réguliers, qui occupe plus du tiers de son Livre, et qu'il avait toute raison de choisir pour le traiter en détail, en raison de son importance, de son intérêt et de sa difficulté.

Enfin, je soupçonne un peu M. Jouffret de penser qu'il ne sortait pas de la réalité en faisant de la Géométrie à quatre dimensions : il s'est arrêté avec quelque complaisance sur le parti que les physiciens et les chimistes peuvent tirer de la quatrième dimension pour l'explication des phénomènes réels. On sait assez que de très grands esprits n'ont pas reculé devant cette conception hardie; mais, après tout, est-elle si hardie? Qu'importe le nom

qu'on donne à une variable de plus? Si ce nom et les interprétations qu'il comporte permettent un meilleur groupement de l'ensemble de signes que nous substituons à la réalité, et que nous avons bien le droit d'appeler *notre science*, puisqu'il nous permet de nous reconnaître dans cette réalité et de la tourner à notre profit, qui ne s'en réjouira? La clarté, la simplicité, la cohérence de cet ensemble de signes et, avant tout, sa bonne adaptation aux phénomènes, voilà ce qui importe; il est absurde de se demander si des signes sont vrais, puéril de croire que les signes sont plus vrais, parce que nous y sommes plus habitués. De son côté, M. Jouffret reconnaîtra sans doute volontiers que l'explication du monde extérieur, au moyen d'une quatrième dimension, n'est pas encore très avancée.

M. Jouffret conserve le nom d'espace à l'espace ordinaire, et donne le nom d'étendue à l'espace à quatre dimensions. Après avoir donné les définitions essentielles (droite, plan, espace, etc.), il étudie les intersections et le parallélisme des espaces, des plans et des droites, développe les notions de distance et de perpendicularité : ces sujets remplissent les trois premiers chapitres.

Le chapitre suivant traite de diverses questions, dont la plus importante concerne les rotations. L'Auteur passe ensuite à l'étude des systèmes de coordonnées, et en particulier du système de coordonnées rectangulaires. Le Chapitre VI est consacré à la notion d'angle : l'Auteur expose les notions essentielles, sans développer les formules de la *tétragonométrie* : c'est dans ce même chapitre qu'il expose les principes de la Géométrie descriptive à quatre dimensions, et comment un objet quelconque de l'*étendue* peut être représenté par ses projections. Le Chapitre VII est une étude rapide des lignes, surfaces et hypersurfaces, en particulier de l'hypersphère.

Ainsi que je l'ai déjà dit, le chapitre le plus important de l'Ouvrage est consacré aux six polyédroïdes réguliers, pour lesquels l'Auteur adopte les dénominations de M. Stringham : octaédroïde, pentaédroïde, hexadécaédroïde, hexacosiédroïde, icosatétraédroïde, hécatonicosaédroïde; les six corps sont étudiés successivement : les nombreuses figures qui illustrent ce chapitre ne manqueront pas d'intéresser vivement le lecteur.

Le Chapitre IX, intitulé *Applications*, se rapporte à diverses

considérations philosophiques, et, en particulier, au rôle possible de la Géométrie à quatre dimensions dans les Sciences physiques. Enfin, pour terminer, l'Auteur conduit le lecteur *hors de l'étendue*, pour lui donner quelques rapides et importantes indications sur la Géométrie à n dimensions. J. T.

BURKHARDT (H.). — ALGEBRAISCHE ANALYSIS. 1 vol. in-8°; XII-192 pages. Leipzig, Veit und Co., 1903.

Ce petit livre prend les choses au commencement, à la définition des opérations arithmétiques, et conduit le lecteur jusqu'à la représentation des fonctions circulaires, au moyen de séries entières, de produits infinis ou de séries de fractions rationnelles. Déjà, dans ses *Elliptische Funktionen* et dans ses *Funktionen theoretische Vorlesungen*, dont le présent Livre forme, en quelque sorte, les préliminaires indispensables, M. Burkhardt avait montré le rare talent qu'il a de dire l'essentiel et de ne dire que l'essentiel : il fallait ce talent pour faire tenir, en moins de 200 pages, tout ce qu'il y a dans cette *Algebraische Analysis*, car ce n'est assurément pas les éléments qu'il est le plus aisé d'exposer d'une façon claire et systématique.

Quatre chapitres sont consacrés aux nombres rationnels, dans l'ordre suivant : nombres entiers positifs, nombres entiers nuls et négatifs, fractions rationnelles, fonctions rationnelles entières. On notera l'introduction, dès le premier Chapitre de la formule du binome, fondée sur la considération du triangle arithmétique, et dans le quatrième, des trois paragraphes relatifs à l'interpolation, au calcul des différences, à la sommation des suites arithmétiques. Dans le chapitre suivant, l'Auteur traite des systèmes de deux ou de trois équations linéaires, non homogènes ou homogènes.

Il introduit ensuite les nombres irrationnels, dans le sens de M. Dedekind, développe la théorie des opérations sur ces nombres, définit les racines, les exposants fractionnaires, négatifs, irrationnels, enfin les logarithmes. On remarquera, dans ces deux Cha-

pitres, les utiles indications qui concernent les calculs numériques.

Dans le Chapitre VIII, il traite des séries (simples et doubles). Pour les critères de convergence des séries à termes positifs, il se borne aux règles de Cauchy et de Raabe, ce qui, dans l'ordre d'idées où il s'est placé, semble très raisonnable.

L'étude de la continuité, du passage à la limite, de l'inversion des fonctions continues et monotones, de l'uniformité dans la continuité et dans la convergence est faite avec le soin qu'exige cet important sujet.

Le Chapitre X est consacré au développement des fonctions en séries entières (formule du binome, fonction exponentielle, logarithmes, fonctions circulaires). Les propriétés essentielles qui résultent des développements en série sont naturellement mises en évidence. Notons encore l'heureuse idée qu'a eue l'auteur de placer dans ce Chapitre la notion si importante du retour des suites.

Enfin, le Chapitre XI et dernier contient les formules qui donnent $\cos x$ et $\sin x$ sous forme de produits infinis, $\operatorname{tang} x$ et $\cot x$ sous forme de séries dont les termes sont des fractions rationnelles.

Ce petit Volume ne peut manquer d'avoir du succès auprès des étudiants, pour lesquels il sera un guide sûr et commode.

J. T.

LJUBOWJ SAPOLSKY. — Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen cubischen Zahlkörper. Inaugural Dissertation. 481 pages et 35 Tableaux. Göttingen, 1902.

M. Hilbert, dans son compte rendu de la *Théorie des corps algébriques* (1), a traité la théorie du corps de degré $l(l-1)$ que l'on obtient en adjoignant au corps $K(\zeta)\left(\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}}\right)$, le nombre

(1) *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. IV, 1897.

$\theta = \sqrt[l]{\mu}$, μ étant un entier de ce corps. En particulier, il étudie le corps $K(\zeta, \theta)$ par rapport au corps $K(\zeta)$ considéré comme fondamental; $K(\zeta, \theta)$ est alors un corps abélien (identique à ses conjugués et dont les substitutions sont échangeables); il étudie aussi la façon dont les idéaux premiers de $K(\zeta)$ se décomposent en facteurs dans $K(\zeta, \theta)$.

Mlle Ljubowj Sapolsky, dans la première partie de sa Thèse, reprend cette étude pour le cas de $l = 3$, et la pousse jusque dans ses détails, en se bornant à un cas particulier : celui où le corps $K(\zeta, \theta)$ est un corps galoisien (identique à ses conjugués) (par rapport au corps des entiers rationnels, bien entendu). Cela exige que μ ait une des deux formes particulières suivantes :

1° $\mu = (\mu_1)^3 P$, μ_1 étant un entier quelconque du corps $K(\zeta)$, P étant un entier rationnel qui peut contenir en facteur 3 mais non 3^2. Dans ce cas le corps $K(\zeta, \theta)$ est seulement galoisien, mais non abélien.

2° $\mu = (\mu_1)^3 PQ \ldots$, μ_1 ayant la même signification que plus haut; P, Q, ... étant de la forme $\varepsilon p \pi$, ε étant une unité du corps $K(\zeta)$ ($\varepsilon = \pm 1, \pm \zeta, \pm \zeta^2$), p étant un nombre premier rationnel $\equiv 1 \pmod 3$; enfin π étant l'un des deux facteurs dans lesquels se décompose p dans le corps $K(\zeta)$. Dans ce cas le corps $K(\zeta, \theta)$ est abélien.

L'Auteur cherche successivement dans ces deux cas : les groupes de substitutions du corps $K(\zeta, \theta)$; la valeur du déterminant de ce corps par rapport au corps $K(\zeta)$ et par rapport au corps des entiers ordinaires; la décomposition en facteurs des nombres premiers du corps $K(\zeta)$ dans le corps $K(\zeta, \theta)$. Enfin elle résout les mêmes questions pour les sous-corps de $K(\zeta, \theta)$.

Dans la seconde partie de la Thèse, l'Auteur s'occupe d'un corps du douzième degré, $K(\sqrt{m}, \zeta, \theta)$, obtenu en adjoignant au précédent la racine carrée d'un entier rationnel m, qui n'est pas de l'une des formes : $m = n^2$ ou $m = -3n^2$ [cas auxquels ce corps se confondait avec $K(\zeta, \theta)$]. Elle résout des questions analogues aux précédentes mais naturellement plus compliquées.

Ce n'est pas arbitrairement que l'Auteur a choisi les corps objets de ses études. Les corps $K(\zeta, \theta)$ sont les plus simples

dont les nombres peuvent servir à exprimer rationnellement les racines des équations cubiques, binomes ou abéliennes. Les corps $K(\sqrt{m}, \zeta, \theta)$ jouissent de la même propriété relativement aux équations cubiques non binomes ni abéliennes.

L'Ouvrage se termine par 35 Tableaux de formules. Malgré son aspect un peu rébarbatif il est rédigé d'une façon très claire et pourra être très utile à celui qui désire préciser, sur un exemple particulier, les généralités de la théorie des corps. E. C.

ROST (Dr Georg), privat-docent an der Universität Würzburg. — Theorie der Riemann'schen Theta-function. 1 vol. in-4° de 66 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

M. Rost s'est proposé de combler certaines lacunes de cette difficile théorie, en insistant sur les caractères particuliers que peuvent présenter les systèmes de points que l'on y considère, à propos de l'évanouissement des fonctions theta. C. Neumann avait déjà signalé la nécessité de reprendre la démonstration d'un théorème de Riemann sur les zéros de sa fonction theta : ce théorème sera rappelé, plus commodément, à la fin de ce résumé.

Le Livre de M. Rost, rédigé avec beaucoup de méthode et de précision, est divisé en deux parties dont la première forme comme une introduction à l'étude proprement dite des fonctions theta de Riemann.

PREMIÈRE PARTIE (pages 1-30).

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES UNIFORMES SUR UNE SURFACE DE RIEMANN T.

L'auteur suppose que la surface de Riemann T est à deux feuillets et qu'elle est $2p+1$ fois connexe. Il reprend la définition des coupures a, b, c à l'aide desquelles on transforme la surface T en une surface simplement connexe T'; il rappelle l'existence et les propriétés fondamentales des p intégrales normales de première espèce, $u_1^z, \ldots, u_p^z$, des intégrales normales de seconde ou de troi-

sième espèce, puis les formules de décomposition en éléments simples ou en produit de facteurs primaires. De ces formules, il déduit, sous deux formes différentes, les conditions que doit remplir un système de points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ pris sur T, pour qu'il existe une fonction algébrique uniforme sur T, qui devienne infinie en ces points, ou en quelques-uns d'entre eux.

Un système de points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ sera dit *remplaçable* (*ersetzbares Punktsysteme*) si les p congruences représentées, avec une notation abrégée, par

$$\sum_{\mu=1}^{m} u^{\varepsilon_\mu} \equiv \sum_{\mu=1}^{m} u^{\eta_\mu}$$

sont vérifiées par un système de points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ non identique au système $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ (il faut concevoir la congruence précédente écrite successivement pour chacune des p intégrales normales de première espèce; les deux sommes doivent différer seulement par une somme de multiples entiers des périodes, la période relative à une coupure b_ν étant multipliée par un entier g_ν qui reste le même pour les p intégrales).

DEUXIÈME PARTIE (pages 30-61).

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS THETA DE RIEMANN.

La série qui sert de définition à une fonction theta de p variables $v_1, v_2, \ldots, v_p$ est déterminée par une forme quadratique de p variables entières; les coefficients de cette forme quadratique étant supposés égaux aux modules de périodicité des intégrales normales de première espèce $u_1^z, \ldots, u_p^z$ le long des coupures b, on remplace $v_1, \ldots, v_p$ par $u_1^z + e_1, \ldots, u_p^z + e_p$, en supposant que $e_1, \ldots, e_p$ désignent des constantes; la fonction de z ainsi obtenue est la fonction theta de Riemann, on la désignera par la notation $\vartheta((u^z + e))$.

Parmi les propositions relatives à cette fonction, dont M. Rost a repris la démonstration, je citerai les suivantes en leur laissant le numéro qu'elles ont dans son livre.

1. Si la fonction $\vartheta((u^z + e))$ n'est pas identiquement nulle, elle

possède sur la surface T' p zéros $\tau_{1}, \tau_{2}, \ldots, \tau_{p}$: ces zéros, dont la position est inconnue, sont reliés aux constantes $e_1, e_2, \ldots e_p$ par les p congruences

$$(-e) = \left(\sum_{\nu=1}^{p} u^{\tau_\nu} - k \right)$$

où les quantités k sont des constantes indépendantes des e et des τ_ν.

II. L'équation

$$\Theta\left(\left(\sum_{1}^{p-1} u^{z_\nu} - k \right) \right) = 0$$

a lieu quelles que soient les positions des points $z_1, \ldots, z_{p-1}$ sur la surface T'.

IV. Non seulement les zéros $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ satisfont aux p congruences

$$(-e) = \left(\sum_{1}^{p} u^{\tau_\nu} - k \right),$$

mais ils forment la solution unique du système de ces p congruences.

VIII. Pour que la fonction

$$\Theta\left(\left(u^{z} - \sum_{1}^{p} u^{z_\nu} - k \right) \right)$$

s'annule en tout point z de T', il faut et il suffit que $z_1, z_2, \ldots, z_p$ forment un système *remplaçable*.

La difficulté que signale C. Neumann (*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*, 2e édition, p. 334) est la suivante : dans le Mémoire célèbre de Riemann, on est obligé d'admettre brusquement que les zéros $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ de la fonction $\Theta(u^{z} - e)$ peuvent être amenés en des positions arbitrairement fixées si l'on dispose d'une manière convenable des valeurs attribuées aux constantes $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

M. Rost dit que le nœud de ces questions se trouve dans le théorème II cité plus haut. Il ajoute dans une note que la démonstration donnée dans le texte ne diffère pas essentiellement d'une

démonstration donnée autrefois par C. Neumann et qu'il semble difficile d'établir ce théorème sans faire intervenir des considérations de continuité. E. L.

MÉLANGES.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS ENTIÈRES DÉFINIES PAR UN DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR;

PAR ERNST LINDELÖF.

Certains travaux récents relatifs à ce sujet (1) nous donnent l'occasion de revenir sur la méthode que nous avions développée dans le troisième Chapitre de notre *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (2), et dont M. Borel, de son côté, s'était servi dans ses leçons au Collège de France (3). Il nous semble, en effet, que cette méthode, par son caractère à la fois élémentaire et intuitif, se recommande tout spécialement à l'enseignement, en même temps qu'elle comporte toute la précision qu'exige la théorie *asymptotique* des fonctions entières.

1. Soit une fonction entière

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{1}$$

et désignons par $M(r)$ le maximum de son module sur le cercle $|x| = r$. On sait que *l'inégalité*

$$M(r) > |c_n| r^n \tag{2}$$

---

(1) A. PRINGSHEIM, *Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen* (*Sitzungsberichte der bayerischen Akademie der Wissenschaften*, t. XXXII, 1902). — E. MAILLET, *Sur les fonctions entières et quasi-entières à croissance régulière et les équations différentielles* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV, 1902).

(2) *Acta Soc. Scient. Fenn.*, t. XXXI.

(3) *Leçons sur les séries à termes positifs*. Gauthier-Villars, 1902.

est vérifiée pour toutes les valeurs de r et de l'indice n et, d'autre part, que $M(r)$ *est une fonction croissante de r.*

Il s'agit de trouver des limites supérieure et inférieure de $M(r)$. Comme limite inférieure nous choisirons tout simplement le plus grand des termes $|c_n| r^n$; en le désignant par $T(r)$, nous avons donc cette première inégalité

$$M(r) > T(r). \tag{3}$$

A chaque valeur donnée de r faisons maintenant correspondre un entier n_r, tel qu'on ait $\sqrt[n]{|c_n|}\, r < k (< 1)$ pour $n \geqq n_r$ $\left(\text{ce qui est possible puisqu'on a } \lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0\right)$, et écrivons

$$M(r) = \sum_{0}^{n_r - 1} c_n r^n + \sum_{n_r}^{\infty} |c_n| r^n.$$

Pour la seconde somme, on aura l'inégalité

$$\sum_{n_r}^{\infty} |c_n| r^n < \sum_{n_r}^{\infty} k^n = \frac{k^{n_r}}{1-k} < \frac{1}{1-k}.$$

La première somme est inférieure au terme maximum multiplié par le nombre des termes

$$\sum_{0}^{n_r - 1} c_n r^n < n_r T(r),$$

et la différence entre ces deux expressions augmente d'ailleurs indéfiniment lorsque r croît. On obtient ainsi pour $M(r)$ la limite supérieure suivante

$$M(r) < n_r T(r), \tag{4}$$

en supposant que r dépasse une certaine limite finie.

Les inégalités (3) et (4), obtenues comme on voit par les moyens les plus élémentaires, suffisent complètement pour le calcul asymptotique de $M(r)$.

2. Pour faire voir combien cette méthode est facile à manier, nous allons traiter en détail un cas particulier qui se présente

souvent dans les applications, à savoir celui où l'on a, pour toute valeur positive de ε,

$$(5^a) \qquad \sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{1+\varepsilon}{An}\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{à partir d'un certain indice } n_0,$$

et, d'autre part,

$$(5^b) \qquad \sqrt[n]{|c_n|} > \left(\frac{1-\varepsilon}{An}\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \text{pour une infinité d'indices } n_1, n_2, \ldots,$$

A désignant une constante positive.

Nous ferons d'abord observer que, λ étant une quantité positive quelconque, l'expression

$$\left[\frac{r}{(\lambda n)^{\frac{1}{\rho}}}\right]^n,$$

considérée comme fonction de n, atteint son maximum pour

$$n = \frac{r^\rho}{\lambda e},$$

d'où

$$r = (\lambda e n)^{\frac{1}{\rho}},$$

et que ce maximum est égal à

$$e^{\frac{r^\rho}{\lambda e \rho}}.$$

En vertu des inégalités (2) et (5^b), et en faisant $\lambda = \frac{A}{1-\varepsilon}$, nous pouvons en tirer cette conclusion qu'on a

$$(6) \qquad M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{Ae\rho} r^\rho}$$

pour

$$r = r_\nu = \left(\frac{Aen_\nu}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, comme

$$\frac{r}{(\lambda n)^{\frac{1}{\rho}}} < k,$$

dès que

$$n > \frac{1}{\lambda}\left(\frac{r}{k}\right)^{\rho},$$

les inégalités (4) et (5^a) nous donnent, en faisant cette fois $\lambda = \frac{A}{1+\varepsilon}$,

$$(7) \qquad M(r) < P(r) - \frac{1-\varepsilon}{A}\left(\frac{r}{k}\right)^{\rho} e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho} r^{\rho}},$$

$P(r)$ étant un polynome.

Les inégalités (6) et (7) impliquent le théorème suivant :

Si les coefficients c_n vérifient les conditions (5), *on aura, quelque petit que soit* ε,

$$(8^a) \qquad M(r) < e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho} r^{\rho}}$$

à partir d'une valeur finie de r, et d'autre part

$$(8^b) \qquad M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{Ae\rho} r^{\rho}}$$

pour une infinité de valeurs r dépassant toute limite donnée.

Il résulte d'ailleurs de notre démonstration que réciproquement :

Si le module maximum de la fonction (1) *vérifie les conditions* (8), *les coefficients c_n satisferont aux inégalités* (5).

3. Cherchons maintenant la condition pour que $M(r)$ soit *à croissance régulière*, en ce sens que l'inégalité (8^b) soit vérifiée, comme (8^a), à partir d'une valeur finie de n, de sorte qu'on puisse écrire [1]

$$(9) \qquad M(r) = e^{\frac{1+\varepsilon(r)}{Ae\rho} r^{\rho}}.$$

Nous démontrerons à cet égard le théorème suivant :

Pour que le module maximum de la série (1) *obéisse à l'éga-*

---

[1] Pour éviter des redites incessantes, nous conviendrons de désigner indifféremment par $\varepsilon(r)$, $\varepsilon(n)$, ... toute fonction tendant vers zéro lorsque r, n, ... tendent vers l'infini.

lité asymptotique (9), *il faut et il suffit que, pour toute valeur positive de* ε, *l'inégalité* (5^a) *soit vérifiée à partir d'un certain indice* n_0, *et l'inégalité* (5^b) *pour une infinité d'indices* n_1, $n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, *tels que*

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}\right)=1. \tag{10}$$

Je dis d'abord que ces conditions sont suffisantes. Soit, en effet, $r_\nu < r < r_{\nu+1}$, en posant comme plus haut

$$r_\nu=\left(\frac{A\,e\,n_\nu}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\nu=1, 2, \ldots).$$

Comme $M(r)$ croît avec r, on aura

$$M(r) > M(r_\nu),$$

ou bien, d'après (6),

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{A e \rho} r_\nu^\rho}.$$

Or, la condition (10) entraîne l'égalité

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{r_{\nu+1}}{r_\nu}=1,$$

d'où résulte

$$r_\nu^\rho > (1-\varepsilon)\, r_{\nu+1}^\rho,$$

et par suite, à plus forte raison,

$$r_\nu^\rho > (1-\varepsilon)\, r^\rho,$$

si l'on prend ν suffisamment grand. On trouve ainsi, à partir d'une certaine valeur de r,

$$M(r) > e^{\frac{1-\varepsilon}{A e \rho} r^\rho},$$

et comme d'ailleurs l'inégalité (8^a) est vérifiée, d'après n° 2, il est donc prouvé que $M(r)$ peut se mettre sous la forme (9).

Reste à démontrer que la condition (10) est nécessaire. Supposer que cette condition n'est pas vérifiée (pour toute valeur positive de ε), c'est admettre l'existence de deux nombres positifs, σ et τ, tels qu'on ait

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{1-\sigma}{A n}\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{11}$$

pour une infinité d'intervalles, $n'_\nu < n < n''_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), extérieurs les uns aux autres et satisfaisant à la condition $n''_\nu > (1+\tau) n'_\nu$. En nous plaçant dans cette hypothèse, nous allons faire voir que l'égalité (9) ne saurait avoir lieu.

A cet effet, après avoir fixé convenablement le nombre ε, partageons les termes de la série donnée (1) en quatre groupes, correspondant respectivement aux valeurs suivantes de l'indice n :

$$n < n_0, \qquad n_0 \leq n \leq n'_\nu, \qquad n'_\nu < n < n''_\nu, \qquad n''_\nu \leq n.$$

Le polynome formé par les termes du *premier* groupe n'aura évidemment aucune influence sur le résultat.

L'hypothèse (11) nous donne, d'après le n° 2, pour la somme des termes du *troisième* groupe, une limite supérieure de la forme

$$\text{const.}\, r\rho\, e^{\frac{1-\sigma}{Ae\rho} r^\rho}.$$

Les coefficients des termes des deux autres groupes vérifient l'inégalité

$$\sqrt[n]{c_n} < \left(\frac{1-\varepsilon}{An}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

d'où

$$c_n r^n < \left[r\left(\frac{1-\varepsilon}{An}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]^n.$$

Nous pouvons écrire cette dernière expression sous la forme

$$\left[r\left(\frac{1-\varepsilon}{An}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right]^n = e^{\frac{n}{\rho}\left[1-\log\left(\frac{n}{\alpha}\right)\right]},$$

α désignant la valeur de n,

$$\alpha = \frac{1-\varepsilon}{Ae} r\rho,$$

pour laquelle l'expression en question atteint son maximum.

Cela posé, déterminons r par la condition $\alpha = \left(1+\frac{\tau}{2}\right) n'_\nu$, d'où il suit

$$n'_\nu = \frac{\alpha}{1+\frac{\tau}{2}}, \qquad n''_\nu = \frac{1+\tau}{1+\frac{\tau}{2}}\alpha.$$

On aura, pour le *deuxième* des groupes envisagés ci-dessus,

$$|c_n| r^n < e^{\frac{n'_\nu}{\rho}\left[1 - \log\left(\frac{n'_\nu}{\alpha}\right)\right]} = e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho} k' r^\rho},$$

et, pour le *quatrième* groupe,

$$|c_n| r^n < e^{\frac{n''_\nu}{\rho}\left[1 - \log\left(\frac{n''_\nu}{\alpha}\right)\right]} < e^{\frac{1+\varepsilon}{Ae\rho} k'' r^\rho},$$

k' et k'' désignant les quantités

$$k' = \frac{1}{1+\frac{\tau}{2}}\left[1 + \log\left(1+\frac{\tau}{2}\right)\right], \qquad k'' = \frac{1+\tau}{1+\frac{\tau}{2}}\left[1 - \log\left(\frac{1+\tau}{1+\frac{\tau}{2}}\right)\right].$$

Or ces quantités sont toutes les deux inférieures à l'unité, et, sans insister davantage sur les détails du raisonnement, nous pouvons en tirer cette conclusion que, dans l'hypothèse admise tout à l'heure, le module maximum de la fonction (1) vérifie, pour une infinité de valeurs r indéfiniment croissantes, une inégalité de la forme

$$M(r) < e^{\frac{1-\eta}{Ae\rho} r^\rho},$$

où η désigne une quantité positive fixe, et que, par suite, l'égalité (9) ne saurait avoir lieu. Notre démonstration est donc achevée.

Par un raisonnement analogue on établit cet autre théorème :

Si, pour toute valeur positive de ε, *l'inégalité*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}$$

est vérifiée à partir d'une valeur finie de n, *et l'inégalité*

$$\sqrt[n]{|c_n|} > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}$$

pour une infinité d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, *tels que*

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\frac{\log n_{\nu+1}}{\log n_\nu}\right) = 1 \quad (^1),$$

(1) Dans le Mémoire cité plus haut (page 455), M. Maillet avait démontré que cette condition est nécessaire, mais non pas qu'elle est suffisante.

on aura

$$M(r) = e^{r^{\rho+\varepsilon(r)}},$$

et réciproquement.

4. La méthode précédente s'étend, sans modification aucune, aux fonctions entières d'ordre zéro ou de genre infini, comme nous l'avons déjà fait voir dans notre Mémoire (page 39) sur des exemples particuliers. D'une manière générale, elle sera applicable toutes les fois que l'ordre de grandeur de $\sqrt[n]{|c_n|}$ est indiqué par une expression de la forme $\frac{1}{\varphi(n)}$, $\varphi(n)$ étant une fonction croissante quelconque composée de puissances, d'exponentiels ou de logarithmes superposés en nombre *fini*. Dans tous ces cas, il suffira de recourir aux formules suivantes (*loc. cit.*, p. 36)

$$(12) \qquad \Omega(r) = e^{\frac{\alpha^2\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}}, \qquad r = \varphi(\alpha)\, e^{\frac{\alpha\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}},$$

où $\Omega(r)$ désigne le maximum de l'expression $\left(\frac{r}{\varphi(n)}\right)^n$, considérée comme fonction de n, et α la valeur de n pour laquelle ce maximum est atteint.

Soit par exemple $\varphi(n) = e_k(n^\rho)$ (¹). Les formules précédentes deviennent :

$$\Omega(r) = e^{\rho\alpha^{\rho+1} e_1(\alpha^\rho) e_2(\alpha^\rho)\ldots e_{k-1}(\alpha^\rho)},$$
$$r = e_k(\alpha^\rho)\, e^{\rho\alpha^\rho e_1(\alpha^\rho) e_2(\alpha^\rho)\ldots e_{k-1}(\alpha^\rho)},$$

et, dans une première approximation, on en tire pour $\Omega(r)$ l'expression

$$\Omega(r) = e^{(1+\varepsilon(r))\log r \cdot \log_k r^{\frac{1}{\rho}}},$$

si $k > 1$. Pour $k = 1$, on aura exactement :

$$\Omega(r) = e^{\rho\left(\frac{\log r}{\rho+1}\right)^{\frac{\rho+1}{\rho}}}.$$

(¹) A l'exemple de M. Maillet, nous ferons usage de la notation abrégée

$$e^x = e_1(x), \qquad e^{e^x} = e_2(x), \qquad \ldots, \qquad e^{e_{k-1}(x)} = e_k(x), \qquad \ldots$$

Nous écrirons de même

$$\log(\log x) = \log_2 x, \qquad \ldots \qquad \log(\log_{k-1} x) = \log_k x, \qquad \ldots$$

Par un raisonnement analogue à celui des n°s 2 et 3, nous déduisons de ces expressions les résultats suivants :

Si les inégalités

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{e_k(n^{\rho-\varepsilon})} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{e_k(n^{\rho-\varepsilon})}$$

sont vérifiées, quelque petit que soit ε, *la première à partir d'une valeur finie de* n *et la seconde pour une infinité d'indices,* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, *tels que*

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\frac{\log n_{\nu+1}}{\log n_\nu}\right) = 1,$$

on aura l'égalité asymptotique

$$M(r) = e^{\log r \cdot \log_k r^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon r}},$$

et réciproquement.

Si les inégalités

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{e_k[(1-\varepsilon)n^\rho]} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{e_k[(1-\varepsilon)n^\rho]}$$

sont vérifiées, quelque petit que soit ε, *la première à partir d'une valeur finie de* n *et la seconde pour une infinité d'indices.* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, tels que

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}\right) = 1,$$

le module maximum $M(r)$ *de la fonction* (1) *sera de la forme*

$$e^{(1+\varepsilon r)\log r \cdot \log_k r^{\frac{1}{\rho}}} \qquad \text{ou} \qquad e^{(1+\varepsilon r)\rho\left(\frac{\log r}{\rho-1}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}},$$

suivant que $k > 1$ *ou* $k = 1$ *; et réciproquement.*

Soit en second lieu $\varphi(n) = (\log_k n)^{\frac{1}{\rho}}$: les formules (12) nous donnent

$$\Omega(r) = e^{\frac{\alpha}{\rho \log \alpha \log_2 \alpha \ldots \log_k \alpha}},$$

$$r = (\log_k \alpha)^{\frac{1}{\rho}} e^{\frac{1}{\rho \log \alpha \log_2 \alpha \ldots \log_k \alpha}}.$$

et, par un calcul asymptotique très simple, nous en tirons

$$\Omega(r) = e^{\frac{1+\varepsilon(r)}{e\rho}} \frac{e_k(r^\rho)}{r^\rho e_1(r^\rho) e_2(r^\rho) \ldots e_{k-1}(r^\rho)}.$$

On en déduit facilement les résultats suivants, que nous réunirons, pour abréger, dans un seul énoncé, et qui serviront à préciser et à compléter le théorème qu'a fait connaître M. Maillet dans une Note récente [1].

Si l'expression $\sqrt[n]{|c_n|}$, *pour toute valeur positive de* ε, *est inférieure à*

$$\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon} \quad \text{ou} \quad (1+\varepsilon)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \ldots,$$

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\log_i n \ldots \log_k n}\right)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \ldots,$$

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{\log n \log_2 n \ldots \log_k n}\right)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

à partir d'une valeur finie de n, *et en même temps supérieure à*

$$\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} \quad \text{resp.} \quad (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \ldots,$$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\log_i n \ldots \log_k n}\right)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \ldots,$$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{\log n \log_2 n \ldots \log_k n}\right)\left(\frac{1}{\log_k n}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

pour une infinité d'indices, $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$, *tels que le rapport*

$$\frac{\log_{k+1} n_{\nu+1}}{\log_{k+1} n_\nu} \quad \text{resp.} \quad \frac{\log_k n_{\nu+1}}{\log_k n_\nu}, \quad \ldots, \quad \frac{\log_{i-1} n_{\nu+1}}{\log_{i-1} n_\nu}, \quad \ldots, \quad \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$$

tende vers l'unité lorsque ν *croît indéfiniment, le module maximum* $M(r)$ *de la fonction* (1) *pourra se mettre sous la*

[1] *Comptes rendus* du 9 février 1903.

forme

$$c_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon(r)}) \text{ resp. } e_{k-1}[1-\varepsilon(r)]r^{\rho}, \ldots, e_i[1-\varepsilon(r)]\,c_{k-i+1}(r^{\rho})\ldots$$

$$e^{\frac{1-\varepsilon(r)}{e^{\rho}}\frac{e_1 r^{\rho}}{r^{\rho}e_1 r^{\rho}\, e_2 r^{\rho}\ldots e_k r^{\rho}}}.$$

La réciproque a lieu également.

5. Dans notre Mémoire nous avons déjà fait voir sur plusieurs exemples que la méthode exposée ci-dessus est susceptible d'être précisée de manière à fournir des résultats aussi exacts que la méthode de M. Le Roy (¹), avec laquelle elle présente d'ailleurs de grandes analogies.

En voici un nouvel exemple d'un caractère assez général. Supposons les coefficients de la série (1) positifs et

$$\sqrt[n]{c_n} = \left(1 + A\frac{\log n}{n} + \frac{B}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

A et B étant des constantes. Dans ces conditions on trouve (*Cf.* la démonstration p. 40-41 de notre Mémoire), pour les valeurs positives de x,

$$\sum_0^{\infty} c_n x^n = [1-\varepsilon(x)]\sqrt{\frac{2\pi\rho}{e}}\, e^{B-A}\, x^{\rho\left(A+\frac{1}{2}\right)}\, e^{x^{\rho}}. \tag{13}$$

Appliquons ce résultat à la fonction de Bessel

$$J^{\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

La formule de Stirling nous donne

$$\left(\frac{1}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e^2}{n^2}\left(1-(\nu-1)\frac{\log n}{n} - \frac{\log(2\pi)}{n} - \frac{\varepsilon(n)}{n}\right).$$

Nous devons donc, dans l'égalité (13), faire $\rho = \frac{1}{2}$, $A = -(\nu+1)$,

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1900.

$B = -\log(2\pi)$, et remplacer x par $\left(\frac{ex}{2}\right)^2$, et nous retrouvons ainsi le résultat connu

$$J^{\nu}(ix) = [1 + \varepsilon(x)]\, i^{\nu} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},$$

où x est supposé réel et positif.

Soit encore la fonction

$$(14) \qquad \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + \sigma n)},$$

dont M. Mittag-Leffler a fait connaître récemment des propriétés intéressantes [1]. La formule de Stirling nous donne

$$\left(\frac{1}{\Gamma(1 + \sigma n)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{e}{\sigma}\right)^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\log n}{n} - \frac{\log\sqrt{2\pi\sigma}}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}\right) \frac{1}{n^{\sigma}},$$

et, à l'aide de l'égalité (13), on en conclut

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(1 + \sigma n)} = \frac{1 + \varepsilon(x)}{\sigma} e^{x^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Cette forme plus précise de notre méthode s'applique également aux fonctions d'ordre zéro ou de genre infini. Soit, par exemple, la fonction de genre infini

$$(15) \qquad f(x) = \sum_0^{\infty} \left[\frac{x}{[\log(n + \beta)]^{\frac{1}{\sigma}}}\right]^n,$$

β et σ désignant des paramètres réels, dont σ positif; on trouve (*loc. cit.*, p. 43)

$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)] \sqrt{\frac{2\pi}{e\sigma}}\, x^{\frac{1}{2\sigma}} e^{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{\sigma}}}\, \Omega(x).$$

$\Omega(x)$ étant déterminé par les équations

$$\Omega(x) = e^{\frac{\sigma\alpha}{\log\alpha}}, \qquad x = (\log\alpha)^{\sigma} e^{\frac{\sigma}{\log\alpha}}.$$

[1] *Comptes rendus* du 9 mars 1903.

d'où résulte, dans une première approximation,

$$\Omega(x) = e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{\sigma}{e}x - \frac{1}{\sigma}e^{\frac{1}{\sigma}}\right)}.$$

6. En terminant nous ferons, relativement à la fonction (15), quelques remarques intéressantes, suggérées en partie par la Note citée ci-dessus de M. Mittag-Leffler. En posant $z = \rho e^{i\psi}$, on trouve :

$$\left|\left(\frac{1}{[\log(z-\beta)]^{\sigma}}\right)^{z}\right| = e^{-\sigma\rho\left[\log\rho\cos\psi - \frac{\psi\sin\psi}{\log\rho} + \frac{\varepsilon\rho}{\log\rho}\right]}.$$

La fonction de z figurant au premier membre est holomorphe sur l'axe imaginaire et à droite de cet axe, si l'on suppose $\beta > 1$, et tend vers l'unité lorsque σ s'évanouit. L'expression du second membre est inférieure à $e^{\varepsilon\rho}$, pour $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq -\frac{\pi}{2}$, dès que ρ dépassera une certaine limite finie, quelque petit qu'on donne le nombre positif ε.

D'après un théorème général que nous avons établi dans une Note récente (¹), il s'ensuit d'abord que, *σ tendant vers zéro, la fonction* (15), *où l'on suppose $\beta > 1$ [ainsi que d'ailleurs la fonction* (14)], *tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans tout domaine fini n'ayant aucun point commun avec la partie $+1 \text{ — } +\infty$ de l'axe réel.*

Des considérations développées dans la Note citée il résulte, d'autre part, que *la fonction* (15) *tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant un rayon quelconque autre que l'axe réel positif.* Cette propriété découle d'ailleurs, comme conséquence immédiate, d'un théorème général relatif aux séries de la forme $\Sigma\varphi(n)x^n$, où φ est une fonction analytique de n (²).

Si $\beta > 2$, les mêmes considérations conduisent à l'égalité

$$f(x) = -\frac{[\log(\beta-1)]^{\sigma} - \varepsilon(x)}{x},$$

(¹) *Comptes rendus* du 29 décembre 1902.

(²) *Cf.* p. 29 de notre Mémoire : *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (*Acta Soc. Scient. Fenn.*, t. XXXI, 1902). Sous une forme moins précise, ce théorème avait été démontré par M. Le Roy (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. II, 1900).

$\varepsilon(x)$ tendant uniformément vers zéro lorsque x tend vers l'infini avec un argument quelconque compris entre ε et $2\pi - \varepsilon$, et cela quelque petit que soit ε. Donc, *pour* $\beta > 2$, *les arguments des racines de la fonction* (15) *tendent vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de l'origine.*

Si l'on donne au paramètre σ une valeur complexe d'argument ω compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et qu'on suppose d'ailleurs $\beta > 1$, la fonction entière (15) tendra vers zéro lorsque x tend vers l'infini suivant l'une quelconque des spirales logarithmiques

$$r = \text{const.}\, e^{\varphi \cot \omega} \qquad (x = re^{i\varphi}),$$

excepté celle qui passe par le point $x = 1$. Enfin, si $\beta > 2$, on peut affirmer en outre que les zéros de la fonction (15), à partir d'un certain d'entre eux, sont tous compris entre les spirales logarithmiques

$$r = e^{(\varphi - \varepsilon)\cot \omega} \qquad \text{et} \qquad r = e^{(\varphi + \varepsilon)\cot \omega},$$

quelque petit qu'on donne le nombre positif ε. Pour la démonstration de ces dernières propriétés, nous nous contenterons de renvoyer au Mémoire que nous venons de publier dans le *Journal de Mathématiques*.

Helsingfors, avril 1903.

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS DE $\frac{1}{1-x}$ EN SÉRIES DE POLYNOMES.

PAR M. E. GOURSAT.

Les recherches récentes sur le prolongement analytique ont montré toute l'importance des développements de la fraction simple $\frac{1}{1-x}$ en séries de polynomes, uniformément convergentes dans des régions de forme variée. Les travaux de MM. Runge, Hilbert, Painlevé permettent d'obtenir de pareilles séries. On y arrive aussi, d'une façon très simple, en appliquant la méthode

d'intégration de Cauchy-Lipschitz à l'équation $y' = y^2$. D'après une remarque fondamentale de M. Picard, cette méthode conduit à un développement de l'intégrale en série uniformément convergente dont tous les termes sont des polynomes. Ces mêmes séries peuvent être obtenues par une voie entièrement élémentaire, n'empruntant rien au Calcul intégral, et qui, par cela même, présente peut-être quelque intérêt au point de vue didactique.

1. Posons

$$U_0^{(n)} = 1, \qquad U_1^{(n)} = 1 + \frac{x}{n}, \qquad U_2^{(n)} = 1 + \frac{2x}{n} + \frac{2x^2}{n^2} + \frac{x^3}{n^3}, \qquad \ldots,$$

et, en général,

$$(1) \qquad U_{p+1}^{(n)} = U_p^{(n)} + \frac{x}{n}(U_p^{(n)})^2 \qquad (p \leqq n-1);$$

il est clair que $U_n^{(n)}$ sera un polynome entier en x de degré $2^n - 1$. Nous allons trouver une limite supérieure du module de la différence $U_n^{(n)} - \frac{1}{1-x}$, en supposant que x n'est pas une quantité réelle supérieure à l'unité.

Soit

$$u_0^{(n)} = 1, \quad u_1^{(n)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}, \quad \ldots, \quad u_p^{(n)} = \frac{1}{1 - \frac{px}{n}}, \quad \ldots, \quad u_n^{(n)} = \frac{1}{1-x};$$

si x n'est pas réel et supérieur à *un*, le module de la fonction $\frac{1}{1-z}$ reste inférieur à un nombre fixe M lorsque la variable z décrit le segment de ligne droite allant du point $z = 0$ au point $z = x$, et il est clair que M est supérieur ou au moins égal au module de $u_p^{(n)}$, quels que soient les nombres entiers n et p.

Entre deux fractions consécutives $u_p^{(n)}$ et $u_{p+1}^{(n)}$, nous avons la relation

$$(2) \qquad u_{p+1}^{(n)} = u_p^{(n)} + \frac{x}{n}(u_p^{(n)})^2 + \frac{x^2}{n^2}(u_p^{(n)})^2 u_{p+1}^{(n)}.$$

Retranchons membre à membre les égalités (1) et (2); il vient, en posant $\delta_p^{(n)} = U_p^{(n)} - u_p^{(n)}$,

$$(3) \qquad \delta_{p+1}^{(n)} = \delta_p^{(n)} + \frac{x}{n}\delta_p^{(n)}(U_p^{(n)} + u_p^{(n)}) - \frac{x^2}{n^2}(u_p^{(n)})^2 u_{p+1}^{(n)}.$$

Soit ρ le module de x; le module de $U_p^{(n)} + u_p^{(n)}$ est inférieur à $2M + |\delta_p^{(n)}|$, et nous avons encore

$$(4) \qquad |\delta_{p+1}^{(n)}| < |\delta_p^{(n)}| \left(1 + \frac{\rho}{n}(2M + |\delta_p^{(n)}|)\right) + \frac{\rho^2 M^3}{n^2}.$$

En même temps que les différences $\delta_p^{(n)}$, considérons une suite de quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, liées par la relation de récurrence

$$(5) \qquad \varepsilon_{p+1} = \varepsilon_p \left(1 + \frac{\rho}{n}(2M + 1)\right) + \frac{\rho^2 M^3}{n^2} \qquad (p \leq n - 1),$$

que l'on peut écrire

$$(5)' \qquad \varepsilon_{p+1} + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)} = \left(1 + \frac{\rho}{n}(2M + 1)\right)\left(\varepsilon_p + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right).$$

Sous cette dernière forme, on voit immédiatement que l'expression générale de ε_{p+1} est, en fonction de ε_1,

$$\varepsilon_{p+1} = \left(1 + \frac{\rho}{n}(2M + 1)\right)^p \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right) - \frac{\rho M^3}{n(2M+1)};$$

le nombre entier p étant inférieur à n, on a évidemment

$$\varepsilon_{p+1} < e^{\rho(2M+1)} \left(\varepsilon_1 + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right) - \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}.$$

Supposons que l'on ait pris $\varepsilon_1 = \frac{\rho^2 M}{n^2}$; nous aurons

$$(6) \qquad \varepsilon_{p+1} < e^{\rho(2M+1)} \left(\frac{\rho^2 M}{n^2} + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right) - \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}.$$

Si l'on a pris le nombre n assez grand pour que l'on ait

$$(7) \qquad e^{\rho(2M+1)} \left(\frac{\rho^2 M}{n^2} + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right) - \frac{\rho M^3}{n(2M+1)} < 1,$$

tous les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ seront *a fortiori* inférieurs à *un*.

Le nombre n ayant été choisi de cette façon, comparons les deux suites $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_n^{(n)}$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. On a d'abord

$$\delta_1^{(n)} = 1 + \frac{x}{n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} - \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n}},$$

et par suite

$$|\delta_1^n| < \frac{M\rho^2}{n^2} \quad \text{ou} \quad |\delta_1^n| < \varepsilon_1 < 1.$$

En faisant $p = 1$ dans les relations (4) et (5), on voit que l'on a aussi

$$|\delta_2^n| < \varepsilon_2,$$

et l'on démontre de même, en continuant de proche en proche, que l'on a

$$|\delta_{p-1}^n| < \varepsilon_{p-1}.$$

Le module de la différence $U_n^{(x)} - \frac{1}{1-x}$ est donc plus petit que l'expression trouvée plus haut

$$R_n = e^{\rho(2M+1)}\left(\frac{\rho^2 M}{n^2} + \frac{\rho M^3}{n(2M+1)}\right) - \frac{\rho M^3}{n(2M+1)},$$

pourvu que la condition (7) soit vérifiée. Cette quantité R_n tend évidemment vers zéro lorsque le nombre entier n augmente indéfiniment; le polynome $U_n^{(x)}$ a donc pour limite la valeur de $\frac{1}{1-x}$ lorsque n augmente indéfiniment, *pourvu que x ne soit pas un nombre réel supérieur à l'unité.*

Dans toute région finie du plan A limitée par un contour fermé C, n'ayant aucun point commun avec la partie $1 \ldots \infty$ de l'axe réel, le polynome $U_n^{(x)}(x)$ tend *uniformément* vers $\frac{1}{1-x}$. Soit, en effet, ρ' le rayon d'un cercle décrit de l'origine comme centre et renfermant la région A, et M' la valeur maximum de $\left|\frac{1}{1-x}\right|$ lorsque x reste dans la région A' balayée par le rayon vecteur qui joint l'origine à un point du contour C. D'après l'expression précédente de R_n, on voit immédiatement que, pour tout point de la région A, on a

$$(8) \qquad \left|U_n^{(x)}(x) - \frac{1}{1-x}\right| < e^{\rho'(2M'+1)}\left(\frac{\rho'^2 M'}{n^2} - \frac{\rho' M'^3}{n}\right);$$

cette différence sera moindre qu'un nombre positif ε pourvu que l'on ait

$$\frac{\rho' n^2}{\rho' - n M'^2} > \frac{1}{\varepsilon}\rho'^2 M' e^{\rho'(2M'+1)}.$$

On pourra donc former, au moyen des polynomes $U_n^{(n)}(x)$, une série de polynomes ayant pour somme $\frac{1}{1-x}$, et uniformément convergente dans la région A.

Remarque. — On peut obtenir tous les polynomes successifs $U_n^n(x)$, $U_{n+1}^{n+1}(x)$, ... par une seule loi de récurrence. Considérons, en effet, les polynomes $V_0(x)$, $V_1(x)$, ..., $V_n(x)$, ... définis par les conditions

$$V_0 = 1, \qquad V_1 = 1 - x, \qquad \ldots, \qquad V_{p+1} = V_p + xV_p^2, \qquad \ldots;$$

il est clair que le polynome $U_n^{(n)}(x)$, considéré tout à l'heure, se déduira du polynome $V_n(x)$ en y remplaçant x par $\frac{x}{n}$. La suite des polynomes

$$V_0 \quad V_1, \quad V_2\left(\frac{x}{2}\right), \quad \ldots, \quad V_n\left(\frac{x}{n}\right), \quad \ldots$$

converge donc uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans la région A [1].

---

[1] La loi de récurrence entre deux polynomes consécutifs,

$$V_{p+1} = V_p(1 - xV_p),$$

peut être remplacée par une autre. Observons pour cela que si une fonction $f(x)$ satisfait à la condition

$$(1+x)f[x(1+x)] = f(x)[1 + xf(x)],$$

il en est de même de la fonction

$$F(x) = f(x)[1 + xf(x)],$$

comme on le vérifie immédiatement. Or le polynome $V_1 = 1 + x$ vérifie la condition précédente; il en est donc de même des polynomes successifs $V_2(x)$, $V_3(x)$, ..., $V_p(x)$, ... et l'on peut remplacer la loi de récurrence considérée par la suivante

$$V_{p+1}(x) = (1+x)V_p[x(1+x)].$$

Posons

$$Q_1 = 1 + x, \qquad Q_2 = 1 + x(1+x), \qquad \ldots,$$

et, en général,

$$Q_p(x) = Q_{p-1}[x(1+x)];$$

le polynome $V_p(x)$ a pour expression générale

$$V_p(x) = Q_1 Q_2 \ldots Q_p.$$

2. La méthode précédente peut être aisément généralisée. Soit L un arc de courbe de forme arbitraire, et de longueur finie, joignant dans le plan de la variable x l'origine au point $x = 1$. Prenons sur cet arc de courbe un certain nombre de points $\Theta_0 = 0$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_{n-1}, \Theta_n = 1$, se succédant dans l'ordre des indices quand on décrit la ligne L à partir de l'origine. La transformation $x' = \frac{1}{x}$ fait correspondre à la courbe L une courbe Λ allant du point $x = 1$ à l'infini, et nous supposerons que le point x n'est pas situé sur cette courbe Λ, de telle sorte que le module de $\frac{1}{1 - xz}$ reste inférieur à un nombre fixe M lorsque la variable z décrit l'arc de courbe L.

Cela étant, posons, comme plus haut,

$$U_0^{(n)} = 1, \qquad U_1^{(n)} = 1 + \Theta_1 x, \qquad \ldots,$$

et d'une manière générale

$$(9) \qquad U_{p+1}^{(n)} = U_p^{(n)} + (\Theta_{p+1} - \Theta_p) x (U_p^{(n)})^2 \qquad (p \leqq n - 1),$$

puis

$$u_0^{(n)} = 1, \quad u_1^{(n)} = \frac{1}{1 - \Theta_1 x}, \quad \ldots, \quad u_p^{(n)} = \frac{1}{1 - \Theta_p x}, \quad \ldots, \quad u_n^{(n)} = \frac{1}{1 - x}.$$

Nous avons encore la relation

$$(10) \quad u_{p+1}^{(n)} = u_p^{(n)} + (\Theta_{p+1} - \Theta_p) x (u_p^{(n)})^2 + (\Theta_{p+1} - \Theta_p)^2 x^2 (u_p^{(n)})^2 u_{p+1}^{(n)};$$

en retranchant les égalités (9) et (10) membre à membre, il vient

$$\delta_{p+1}^{(n)} = \delta_p^{(n)} + (\Theta_{p+1} - \Theta_p) x \delta_p^{(n)} (U_p^{(n)} + u_p^{(n)}) - (\Theta_{p+1} - \Theta_p)^2 x^2 (u_p^{(n)})^2 u_{p+1}^{(n)}.$$

Soit ρ le module de x, α_n une limite supérieure de $|\Theta_{p+1} - \Theta_p|$; il est clair que $|u_p^{(n)}|$ et $|u_{p+1}^{(n)}|$ sont inférieurs à M, et l'on a aussi

$$(11) \qquad |\delta_{p+1}^{(n)}| < |\delta_p^{(n)}| [1 + \alpha_n \rho (2M + |\delta_p^{(n)}|)] + \alpha_n^2 \rho^2 M^3.$$

On peut toujours prendre les nombres Θ_i de façon que le produit $n\alpha_n$ soit inférieur à un nombre fixe K quel que soit n; si, par exemple, les points Θ_i sont les sommets d'une ligne brisée ayant ses côtés égaux, le produit $n\alpha_n$ sera inférieur à la longueur de l'arc L. Les points Θ_i ayant été pris de façon que cette condition

soit satisfaite, nous aurons encore

$$|\delta_{p+1}^{(n)}| < |\delta_p^{(n)}| \left(1 + \frac{K\rho}{n}(2M + |\delta_p^{(n)}|)\right) + \frac{K^2\rho^2 M^3}{n^2}.$$

En raisonnant comme plus haut, on voit de la même façon que, si l'on a choisi le nombre n assez grand pour que l'on ait

$$e^{K\rho(2M+1)}\left(\frac{K^2\rho^2 M}{n^2} + \frac{K\rho M^3}{n(2M+1)}\right) < 1,$$

le polynome $U_n^{(n)}(x)$ tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans toute région finie du plan A limitée par une courbe C qui n'a aucun point commun avec la ligne A.

Si, par exemple, la ligne L est une demi-circonférence décrite sur le segment $0 - 1$ de l'axe réel comme diamètre, A est une demi-droite menée par le point $x = 1$ perpendiculairement à l'axe réel. On peut prendre pour les points Θ_p les sommets d'un polygone régulier de $2n$ côtés situés au-dessous de l'axe réel, ce qui revient à poser

$$\Theta_p = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{p\pi i}{n}}\right).$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Atti *della R. Accademia delle Science fisiche e matematiche.* Serie II. Vol. X. In-4°. Napoli, Tip. della R. Accademia. 24 l.

Everett (J.-D.). — *Illustrations of the C. G. S. System of Units, with Tables and physical Constants.* In-8°, 308 p. London, Macmillan. 5 sh.

Föppl (A.). — *Die Mechanik des 19. Jahrhunderts.* (Akadem. Festvortrag.) Gr. in-8°, 25 p. München, Reinhardt. 20 pf.

Routh (E.-J.). — *Treatise on analytical Statics.* Vol. II. 2e édition. In-8°, 390 p. avec figures. London, Clay. 14 sh.

STRUTT (J.-W.). — *Baron Rayleigh, Scientific Papers.* Vol. III. 1887-1892. In-8°. London, Clay. 15 sh.

DUHEM (P.). — *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell.* Étude historique et critique. Gr. in-8°, 235 p. Paris, Hermann. 8 fr.

ANDOYER (H.). — *Théorie de la Lune.* In-8°, 86 p. Paris, Naud. 2 fr.

BARBARIN (N.). — *La Géométrie non euclidienne.* Petit in-8°, 69 p. avec fig. Paris, Naud.

BRIEM (E.). — *Rechentabelle zum Gebrauch bei Multiplication u. Division.* Gr. in-8°, IV-99 p. Leipzig, Twietmeyer. 8 m.

DEICHMÜLLER (F.). — *Die astronomische Instrumente von Peking.* Gr. in-8, 10 p. avec planches. Bonn, Röhrscheid et Ebbecke. 1 m.

FILON (L.-N.-G.). — *On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load.* In-4°. London, Dulau. 5 sh. 6 d.

LEMOINE (EM.). — *Géométrographie ou Art des constructions géométriques.* In-8°. 87 p. avec 32 fig. Paris, Naud. 2 fr.

CALDARERA (E.). — *Corso di Meccanica razionale.* Vol. II. Parte I. In-8°. Palermo, Reber. 8 l.

HARTMANN (E. v.). — *Die Weltanschauung der modernen Physik.* Gr. in-8°, X-233 p. Leipzig, Haahke. Relié, 8 m. 50 pf.

DARWIN (G.-H.). — *On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid.* In-4°. London, Dulau. 1 sh. 6 d.

FORSYTH (A.-R.). — *Theory of differential equations.* Part. 3. Vol. IV : *Ordinary linear equations.* In-8°. London, Clay. 12 sh. 6 d.

FOURIER (Baron J.-B.-J.). — *Die Auflösung der bestimmten Gleichungen.* (*Analyse des équations déterminées.* Paris, 1831.) Uebers. u. herausgegeben von A. Lœwy. In-8°, V-263 p. avec 18 fig. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. N° 127.) Cart. 4 m.

FRANKLAND (W.-B.). — *The Story of Euclid.* In-12°, 176 p. avec fig. London, Newnes. 1 sh.

GAUSS (C.-F.). — *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats wirkenden Anziehungs- u. Abstossungs-Kräfte.* (1840). Herausgeg. von R. Wangerin. 2e édition. In-8°, 61 p. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N° 2). Cart. 80 pf.

GOURSAT (ED.). — *Cours d'Analyse mathématique.* 2 vol. gr. in-8°. T. I. VI-620 p. avec 52 fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

JUNKER (F.). — *Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.* In-12, 119 p. avec 42 fig. Leipzig, Göschen. (Sammlung Göschen. 143. Bdchn.) Relié, 80 pf.

— *Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung.* In-12°, 130 p. avec 50 fig. (Sammlung Göschen. 147. Bdchn.) Relié, 80 pf.

— *Höhere Analysis.* 2. Theil. *Integralrechnung.* 2e édition. In-12. 208 p. avec 89 fig. (Sammlung Göschen. 88. Bdchn.) Relié, 80 pf.

LOEWY (A.). — *Ueber Differentialgleichungen die mit ihren adjungirten zu derselben Art gehören.* Gr. in-8°, München, Franz. 20 pf.

MERTENS (F.). — *Ein Beweis des Galois'schen Fundamentalsatzes.* Gr. in-8°, 21 p. Wien, Gerold's Sohn. 50 pf.

PEARSON (K.). — *On the mathematical theory of errors of judgment with special reference to the personal equation.* In-4°. London, Dulau. 4 sh.

POINCARÉ (H.). — *Sur la stabilité de l'équilibre des figures pyriformes affectées par une masse fluide en rotation.* In-4°, 40 p. London, Dulau, 2 sh.

SCHUBERT (H.). — *Beispiel-Sammlung zur Arithmetik u. Algebra.* 2765 Aufgaben, systematisch geordnet. 2e édition. 2e tirage. In-12, 134 p. Leipzig, Göschen. (Sammlung Göschen. 48. Bdchn.) Relié, 80 pf.

ZEUTHEN (H.-G.). — *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.* Edition française, traduite par Jean Mascart. In-8°, XIII-298 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

FREYCYNET (C. DE). — *Sur les principes de la Mécanique rationnelle.* In-8°, VIII-170 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

HELMHOLTZ (H. v.). — *Abhandlungen zur Thermodynamik.* Herausgeg. von M. Planck. In-8°, 84 p. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N° 124.) Cart. 1 m. 40 pf.

RADAU (R.). — *Tables barométriques et hypsométriques pour le calcul des hauteurs, précédées d'une instruction sur l'usage des Tables.* Nouveau tirage. In-18°, 24 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 25.

ABHANDLUNGEN *zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von M. Cantor. 12. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 16 m.

Contenu : M. Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. der Renaissance. (In 2 Thln.) I. Thl. x-336 p. avec 117 fig.

CODDINGTON (E.). — *Die Bestimmung der Bahn eines kleinen Plane-*

ten aus vier Beobachtungen. (Dissert.) Gr. in-8°, 65 p. Berlin, Mayer et Müller. 3 m.

JAHRESBERICHT *astronomischer...* Mit Unterstützung der astronom. Gesellschaft herausgeg. von W.-F. Wislicenus. 3. Bd. 1901. Gr. in-8°, XXXII-671 p. Berlin, G. Reimer. 20 m.

KRAMER (JUL.). — *Theorie der kleinen Planeten vom Hecuba Typus.* Gr. in-4°, 152 p. Berlin, Weidmann. (Abhandlgn. der kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Mathemat.-Physikal. Klasse. Neue Folge. II. Bd. N° 2.) 15 m.

PASCAL (E.). — *Repertorium der höheren Mathematik.* Deutsche Ausgabe von A. Schepp. *Analysis u. Geometrie.* II. Thl. *Die Geometrie.* Gr. in-8°, IX-712 p. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

PERRY (J.). — *Höhere Analysis für Ingenieure.* Deutsche Bearbeitung von R. Fricke u. F. Süchting. Gr. in-8°, IX-123 p. avec 106 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 8 m. 40 pf.

SELLENTHIN (B.). — *Mathematischer Leitfaden m. besond. Berücksichtigg. der Navigation.* Gr. in-8°, XI-450 p. avec 324 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 8 m. 40 pf.

ANTOMARI (X.) et C. HUMBERT. — *Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale.* In-8°, 270 p. avec fig. et 1 pl. Paris, Nony et Cie.

DRUDE (P.). — *The theory of Optics.* Traduit de l'allemand par C.-R. Mann et R.-A. Milikan. Avec 110 diagr. In-8°. London, Longmans. 15 sh.

LORENTZ (H.-A.). — *Sichtbare und unsichtbare Bewegungen.* Vorträge. Unter Mitwirkg. des Verf. aus dem Holländ. übersetzt von G. Siebert. Gr. in-8°, V-123 p. avec 40 fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 3 m.

TEUBNER'S *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* VIII. Bd. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. Relié, 20 m.

Contenu : A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. XIV-511 p. avec 251 fig.

COULON (J.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques.* (Thèse.) In-4°, 127 p. avec fig. Paris, Hermann.

DARWIN (G.-H.). — *Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem.* Deutsch von Agnes Pockels. Mit Einführungswort von C. v. Neumayer. Leipzig, Teubner. Relié, 6 m. 80 pf.

GEISSLER (KURT). — *Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie.* Gr. in-8°, VIII-417 p. Leipzig, Teubner. 14 m.

GOURSAT (E.). — *Cours d'Analyse mathématique.* T. I. In-8°, VI-620 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

KLEIN (E.). — *Anwendung der Differential- u. Integralrechnung auf Geometrie; eine Revision der Prinzipien.* Vorlesung, ausgearb. von Conr. Müller. In-4°, VIII p. u. 468 p. autogr., avec fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

LORIA (GINO). — *Spezielle algebraische u. transcendente ebene Kurven. Theorie u. Geschichte.* Deutsche Ausg. bearb. von Fritz Schütte. I. Hälfte. Gr. in-8°, 416 p. avec 122 fig. et 13 pl. lith. Leipzig. Teubner. 16 m.

SAMMLUNG *Schubert.* 35. Bd. Gr. in-8°. Leipzig, Göschen. Relié, 10 m.

Contenu : P.-H. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie. 1 Thl. VIII-295 p. avec 65 fig. et 355 exercices.

TANNERY (J.) et MOLK (J.). — *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.* T. IV. In-8°. IX-304 p. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

WEIERSTRASS (KARL). — *Mathematische Werke.* 4. Bd. *Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Transcendenten.* Bearb. von G. Hettner u. J. Knoblauch. Gr. in-4°, XIV-623 p. Berlin, Mayer et Muller. 40 m.; relié, 43 m. 40 p.; sur papier à écrire et relié, 54 m.

MACH (E.). — *Science of mechanics.* Transl. from the German by F.-J. Mc Cormack. 2e édition. In-8°. London, Paul. 9 sh. 6 d.

BONNESON (T.). — *Analitiske studier over ikke-euklidisk geometri.* In-8°. Copenhague, Ursin. 3 kr.

BRIOSCHI (FR.). — *Opere matematiche.* T. II. In-4°. Milan, Hoepli. 25 l.

ENCYKLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* T. IV. 2e fascicule. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. 60 pf.

GOLLER (ADAM). — *Ueber die Steiner'sche Fläche.* Progr. III-69 p. München, Kellerer. 1 m.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FERRERS (N.-M.), M. A., fellow and tutor of Gonville and Caius College. — MATHEMATICAL PAPERS OF THE LATE GEORGE GREEN, fellow of Gonville and Caius College, Cambridge. 1 vol. in-8°, x-336 pages. London, Macmillan and C°, 1871. Édition fac-simile, Paris, A. Hermann, 1903.

I.

L'emploi de la fonction potentielle, incidemment indiquée par Lagrange et constamment usitée par Laplace, a singulièrement facilité les recherches qui ont pour objet les forces attractives ou répulsives inversement proportionnelles au carré de la distance. Vers 1825, cet emploi avait déjà donné aux physiciens une riche moisson de résultats. Poisson en avait tiré, d'abord, les lois de la distribution électrique sur les corps conducteurs, puis les lois de l'aimantation du fer doux. Les fonctions Y_n, instrument puissant forgé par Laplace et si heureusement appliqué par lui à la solution des problèmes de Mécanique céleste, avaient permis d'intégrer les équations aux dérivées partielles dont dépend l'équilibre électrique ou magnétique pour un corps sphérique ou pour la couche que comprennent entre elles deux sphères concentriques; elles avaient également conduit Poisson à la détermination de la distribution qu'affecte l'électricité sur deux sphères, distantes ou contiguës, et, par l'accord des résultats de l'analyse avec les observations de Coulomb, elles avaient assuré à la théorie nouvelle le contrôle de l'expérience.

Systématiser les principes épars dans les écrits de Laplace et de Poisson, en tirer des théorèmes généraux sur la fonction potentielle, transformer les problèmes de l'électrostatique et du magnétisme et, par cette transformation, ouvrir des voies nouvelles à leur intégration, tel est l'objet que se proposa George Green [1]. Les résultats de ses méditations furent publiés en 1828,

[1] George Green était né en 1793 à Sneinton, près Nottingham. Il mourut en 1841.

à Nottingham, dans un petit Livre intitulé : *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux Théories de l'Électricité et du Magnétisme.*

Ce Livre demeura longtemps inconnu. Lorsque Gauss, en 1840, publiait ses *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte,* lorsque, à la même époque, Chasles et W. Thomson trouvaient, dans la solution de problèmes électrostatiques, l'occasion de prouver leur merveilleux talent de géomètres, il leur arrivait de plagier Green à leur insu; et Faraday, en découvrant par les expériences les plus ingénieuses les lois de l'induction électrostatique, ignorait l'écrit où Green avait annoncé d'avance les résultats qu'il observait.

Exhumé plus tard par W. Thomson, l'*Essay* de Green demeurait introuvable lorsque les membres du *Gonville and Caius College* de Cambridge, dont Green avait été *fellow,* chargèrent l'un d'eux, M. Ferrers, de le rééditer. Par les soins de M. Ferrers, un Volume fut publié en 1871, qui contenait non seulement l'*Essay,* mais encore les autres écrits mathématiques de George Green. Ce Livre, un des classiques de la Physique mathématique, était depuis longtemps épuisé. M. A. Hermann a rendu aux géomètres et aux physiciens le grand service de publier une édition *fac-simile* que nous allons feuilleter, en nous arrêtant particulièrement à certains passages.

II.

Le plus connu des écrits de George Green est assurément celui qui fut publié en 1828, à Nottingham, sous le titre : *An Essay of the Application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Là se trouve, en effet, la formule célèbre qui domine la théorie des intégrales triples et qui a reçu le nom de *formule de Green;* là est étudiée la *fonction de Green,* dont la connaissance permettrait de résoudre tous les problèmes d'équilibre électrique sur les corps conducteurs.

L'emploi régulier de formules générales et, particulièrement,

de celle qui porte habituellement le nom de Green, impose un ordre systématique et rigoureux à cet Ouvrage où les propositions nouvelles complètent heureusement les résultats obtenus par Poisson. L'innovation de Green est, d'ailleurs, bien plutôt dans cet emploi régulier d'une formule générale que dans l'invention même de cette formule, facile à tirer des Mémoires de ses prédécesseurs.

« La formule

$$\int (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,d\varpi = -\int \left(U\frac{\partial V}{\partial n_i} - V\frac{\partial U}{\partial n_i}\right) dS,$$

dit Émile Mathieu [1], est celle qui sert à déterminer les coefficients de la série qui donne le refroidissement d'un corps; elle a donc été employée dans différents cas par Fourier et Poisson longtemps avant l'apparition du Mémoire de Green. »

De cette formule, Green tire d'emblée une conséquence des plus remarquables : La détermination de la distribution qu'affecte l'électricité sur un conducteur soumis à des actions quelconques se ramène à la détermination prise, en chaque point M de l'espace, par une fonction qui dépend de la forme de la surface du conducteur et de la position qu'occupe un certain pôle P; cette fonction à son tour est connue si l'on sait déterminer l'influence qu'une charge électrique concentrée en P exercerait sur le conducteur uni au sol; enfin, pour un conducteur donné, la valeur au point M de la fonction de Green de pôle P est égale à la valeur que prendrait au point P la fonction de Green de pôle M.

Ces beaux théorèmes ont pris, dans la physique mathématique actuelle, une grande extension; F.-E. Neumann, M. F. Klein, M. Hadamard, ont trouvé des fonctions analogues à la fonction de Green en divers problèmes relatifs à l'induction magnétique ou à l'hydrodynamique des fluides incompressibles.

Green ne se borne pas à établir ces propositions algébriques; il en tire, touchant la théorie des phénomènes électriques, des conséquences d'une grande portée.

---

[1] Émile Mathieu, *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*. Première Partie : *Théorie du Potentiel*. Paris, 1885, p. 14.

La théorie de la bouteille de Leyde l'occupe tout d'abord ; laissant à l'armature interne une forme quelconque, il la suppose séparée de l'armature externe par une couche isolante d'épaisseur constante et infiniment petite ; il remarque alors que les éléments superficiels correspondants de ces deux armatures portent des charges électriques égales et de signes contraires. Chasles devait plus tard énoncer ce théorème sous une forme entièrement générale.

De cette proposition se déduit cette autre :

Si l'armature externe entoure complètement l'armature interne, les deux armatures portent des charges totales égales et de signes contraires.

Green signale ce que ce théorème a d'inattendu ; il ajoute qu'il serait sans doute aisé d'en obtenir la preuve expérimentale ; cette preuve, en effet, devait être donnée par Faraday.

Du reste, l'*Essay* renferme la démonstration complète des propositions que Faraday devait, plus tard, prouver expérimentalement. Voici, en effet, l'énoncé (p. 49) dont Green établit la légitimité :

« Supposons qu'une enveloppe creuse, formée par une matière parfaitement conductrice, soit limitée par deux surfaces quelconques ; imaginons que des corps électrisés en nombre quelconque soient placés où l'on voudra, aussi bien à l'intérieur de l'enveloppe qu'à l'extérieur ; la surface interne de l'enveloppe et les corps intérieurs seront appelés *le système intérieur*, la surface externe de l'enveloppe et les corps électrisés extérieurs seront appelés le *système extérieur*. Tous les phénomènes électriques relatifs aux attractions, aux répulsions, aux distributions, qui ont leur siège dans le système intérieur se produiront comme si le système extérieur n'existait pas et que la surface interne de l'enveloppe appartînt à un conducteur parfait en communication avec le sol. Tous les phénomènes qui ont leur siège dans le système extérieur sont les mêmes que si le système intérieur n'existait pas, et que la surface externe de l'enveloppe fût la surface d'un conducteur parfait chargé d'une quantité d'électricité égale à la charge primitive de l'enveloppe, augmentée de la charge des corps électrisés intérieurs. »

Cet énoncé était publié en 1828 : c'est seulement en 1843 que Faraday [1], sans connaître l'*Essay* de Green, l'obtint à son tour par une expérience célèbre.

Mais, si Faraday avait été devancé par Green, Green, à son tour, avait été précédé par Poisson : dans une note [2] bien remarquable, et cependant bien peu connue, publiée dès 1824, Poisson, qui, au moyen des fonctions Y_n de Laplace, savait résoudre le problème général de l'électrostatique pour les espaces limités par une surface sphérique, avait étudié complètement le problème de l'électrisation d'une sphère creuse sous l'action de charges données, tant extérieures qu'intérieures. Il avait énoncé, avec une grande précision, dans ce cas, restreint, il est vrai, les théorèmes que l'on devait nommer plus tard *Théorèmes de Faraday*. Citons ici ces énoncés :

« ...La distribution de l'électricité sera connue sur les deux faces de la sphère creuse. On peut remarquer :

» 1° Que l'épaisseur de la couche électrique sur la surface intérieure est indépendante des forces extérieures... et du rayon a de la surface extérieure ;

» 2° Que l'épaisseur relative à cette dernière surface ne dépend que de son rayon, des forces extérieures, et de la totalité $E + E'$ du fluide appartenant à la partie pleine de la sphère et aux corps compris dans son intérieur. Si, par exemple, les forces extérieures étaient toutes nulles, ... elle resterait la même quelles que fussent l'épaisseur de la sphère creuse et la disposition des corps électrisés placés dans son intérieur ; elle ne changerait pas si l'électricité passait par étincelle de l'un de ces corps dans un autre, ou dans la partie pleine de la sphère.

» ...Les actions totales exercées sur les points extérieurs ne dépendront, comme l'épaisseur de la couche électrique à la surface extérieure, que du rayon de cette surface, des forces exté-

---

(1) Faraday, *On the electrical inductive action* (*London and Edimburg Philosophical Magazine*, vol. XII : 1843. — *Faraday's experimental Researches on Electricity*, t. II, p. 279).

(2) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité dans une sphère creuse électrisée par influence* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1824, p. 49).

rieures, et de la totalité du fluide appartenant à la sphère et aux corps placés dans son intérieur; elles seront indépendantes de la distribution de l'électricité dans ces corps, et les mêmes, abstraction faite des forces extérieures, que si les deux fluides étaient réunis au centre de la sphère.

» L'action exercée sur les points situés dans l'intérieur de la sphère creuse ne dépendra que de son rayon intérieur et des forces intérieures. Si toutes ces forces étaient nulles, il n'y aurait aucune action exercée sur ces points: de manière qu'un électromètre, placé quelque part que ce soit dans l'intérieur de la sphère creuse, n'indiquerait aucun signe d'électricité, quelles que soient d'ailleurs l'épaisseur de la sphère et la grandeur des forces extérieures. Comme un plan peut être regardé comme une sphère de rayon infini, il en résulte qu'une feuille métallique d'une très grande étendue et d'une épaisseur quelconque et partout la même doit empêcher l'action de ces corps de se transmettre; ou, pour parler plus exactement, son action devra neutraliser celle de ces corps; de telle sorte que les corps légers n'éprouveront ni attraction, ni répulsion, lorsqu'une feuille métallique sera interposée entre eux et les corps électrisés, pourvu que les uns et les autres soient très éloignés du bord de cette feuille.

» Il serait à désirer que les théorèmes que nous venons de démontrer fussent vérifiés par l'expérience. »

Un géomètre illustre se plaisait, au déclin de sa vie, à railler la Physique mathématique, à laquelle, plus jeune, il avait dû quelques-uns de ses plus beaux Mémoires :

« Faraday, comme Coulomb, a-t-il écrit [1], a devancé les géomètres, non plus par l'accord du calcul avec des mesures numériques, mais par la découverte de théorèmes généraux qu'ils auraient dû prévoir. »

En fait, ces théorèmes, Poisson et Green les avaient énoncés, et dans les moindres détails; Faraday n'avait guère lu leurs écrits, que son absence d'instruction mathématique lui rendait inacces-

---

[1] J. Bertrand, *Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité*, p. 79. Paris, 1890.

sibles; il n'en résulte pas qu'il soit équitable d'attacher son seul nom à une découverte si complètement achevée avant qu'il la refît.

L'importance des théorèmes dits *de Faraday* et les idées erronées que l'on professe à l'endroit de leur invention, nous ont engagé à insister sur cette partie de l'*Essay;* il nous faudra glisser plus rapidement sur le reste de cet Ouvrage dont maint paragraphe mériterait cependant une plus longue attention. Citons, en particulier, ce beau théorème :

Lorsque, à l'extérieur d'un corps électrisé, on connaît la fonction potentielle de ce corps, on peut immédiatement déterminer la distribution qu'affecterait l'électricité sur un conducteur limité par une des surfaces de niveau de cette fonction.

Ce théorème fut retrouvé presque simultanément par Chasles, par Gauss et par W. Thomson, vers 1840; à ces trois auteurs, l'*Essay* de Green était alors inconnu.

Nous glisserons sur les applications des théorèmes généraux au Magnétisme; la plupart de ces applications reproduisent des résultats déjà obtenus par Poisson; en terminant, Green s'essaye à déterminer la distribution de l'aimantation sur une aiguille d'acier; les lois physiques qui réagissent l'aimantation d'un corps doué de force coercitive étaient alors trop mal connues pour que cette tentative ne fût pas prématurée; elle ne le serait guère moins aujourd'hui.

III.

Les actions, attractives ou répulsives, qui varient en raison inverse du carré de la distance mutuelle des masses qu'elles sollicitent, fournissent aux géomètres l'occasion de développer leurs méthodes les plus élégantes et les plus fécondes. Ne pourrait-on, par des méthodes analogues, étudier des actions qui procéderaient suivant d'autres fonctions de la distance, notamment suivant une puissance autre que -2? Cette question ne peut manquer de s'imposer à l'attention de l'algébriste; l'étude des forces proportionnelles à $\frac{1}{r^3}$ sollicite invinciblement ses efforts.

Cette étude a souvent été tentée depuis Mac-Laurin qui, déjà, avait considéré l'attraction en raison inverse du cube de la distance; elle s'est toujours montrée stérile; elle oblige le géomètre à surmonter de grandes difficultés sans le récompenser, ni par la beauté algébrique des théorèmes obtenus, ni par leur utilité physique. De nos jours seulement, M. Carl Neumann [1], en sortant des sentiers battus, en considérant, non plus une fonction potentielle inversement proportionnelle à une certaine puissance de la distance r, mais une fonction telle que $\frac{e^{-\alpha r}}{r}$, a pu recueillir une riche moisson de théorèmes élégants.

Ces remarques nous sont suggérées par l'écrit que Green communiqua, le 12 novembre 1832, à la *Philosophical Society* de Cambridge [2], écrit qui a pour titre : *Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the electric Fluid, with other similar Researches.*

Aux actions mutuelles des fluides qu'il étudie, Green attribue une fonction potentielle de la forme $\int \frac{dm}{r^{n-1}}$. L'existence même d'une telle fonction en un espace continûment rempli par le fluide agissant, l'existence de ses dérivées, les relations de ces dérivées avec les composantes de la force, ne peuvent être admises qu'après de sévères démonstrations, et ces démonstrations limitent singulièrement le champ des valeurs que l'on peut attribuer à l'exposant n. Green ne semble pas avoir eu souci de ces précautions indispensables; et ce manque de rigueur diminue notablement l'intérêt de son écrit, où l'on ne peut guère admirer que l'habileté des transformations algébriques.

Les mêmes remarques peuvent être faites au sujet de l'écrit intitulé : *On the Determination of the exterior and interior Attractions of Ellipsoids of variable Densities,* que Green communiquait à la même Société le 6 mai 1833 [3]. C'est encore, en effet, selon la puissance $-n$ de la distance que procède l'attraction dont Green traite en cet écrit.

---

(1) CARL NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen uber das Newtons'che Princip der Fernwirkungen*. Leipzig, 1896.

(2) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1883.

(3) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1835.

IV.

L'Hydrodynamique doit à Green plusieurs beaux Mémoires. Le premier intitulé : *Researches on the Vibration of Pendulums in fluid media*, fut communiqué à la Société Royale d'Edimbourg le 16 décembre 1833 (¹).

Un ellipsoïde solide est plongé au sein d'un fluide incompressible parfait, qui glisse sans résistance à la surface du corps qu'il baigne; en outre, le mouvement de ce fluide dépend d'un potentiel des vitesses; c'est ce mouvement que Green se propose de déterminer, soit dans le cas où l'ellipsoïde est immobile, soit dans le cas où il se meut d'un mouvement rectiligne; en outre, Green suppose que ce mouvement est très lent.

La solution de ce problème, conduite par une méthode rapide et élégante, montre que la résistance opposée par le fluide indéfini au mouvement de l'ellipsoïde équivaut à un certain accroissement de la masse de ce corps. Cet accroissement dépend, d'ailleurs, de la direction dans laquelle se meut l'ellipsoïde; sa détermination exige, en général, le calcul de trois certaines intégrales définies; les trois transcendantes ainsi introduites se réduisent à une seule lorsque la direction du mouvement de l'ellipsoïde est celle de l'un des axes principaux; pour un ellipsoïde de révolution, ces intégrales définies se ramènent aux fonctions logarithmiques et circulaires.

Il ne paraît pas, Stokes en a fait la remarque (²), que Green ait eu connaissance d'un mémoire sur le même sujet publié peu de temps auparavant par Poisson (³); les écrits des deux géomètres présentent une étroite parenté. Le mémoire de Poisson, moins général que celui de Green, se borne à considérer le mouvement

---

(¹) *Transactions of the Royal Society of Edimburgh*, vol. XIII, 1836, p. 54.

(²) G. Stokes, *Report on recent Researches in Hydrodynamics* (*Report of the British Association for* 1846, Part. I, p. 1. — *Stokes mathematical and physical Papers*, vol. I, p. 179).

(³) S.-D. Poisson, *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. IX, p. 521. Addition, p. 526, 1832).

d'une sphère dans un fluide; ce fluide, il est vrai, Poisson le regarde comme compressible; mais, au cours de ses calculs, il néglige, à cause de leur petitesse, les termes qu'avait introduits la compressibilité; aussi les résultats auxquels il parvient concordent-ils avec ceux que l'on peut tirer des formules de Green.

L'application de ces résultats au problème physique des oscillations du pendule dans l'air donne prise à bien des doutes; ce n'est pas à un fluide parfait, glissant librement à la surface du pendule, que l'air est assimilable, mais à un fluide visqueux qui demeure adhérent au solide oscillant; le problème qu'il conviendrait de résoudre pour serrer d'un peu près la réalité est beaucoup plus compliqué que le problème traité par Poisson et par Green.

La propagation des ondes dans un canal est l'un des principaux objets que l'Hydraulique ait à considérer. Déjà Lagrange, dans la *Mécanique analytique*, avait posé les équations aux dérivées partielles dont dépend cette propagation; mais l'intégration de ces équations n'a pu être abordée jusqu'ici qu'au moyen de certaines approximations.

Dans sa pièce : *On the Motion of Waves in a variable Canal of small Depth and Width*, communiquée [1] le 15 mai 1837 à la *Philosophical Society* de Cambridge, Green suppose que la hauteur de l'onde est très petite par rapport aux dimensions de la section du canal rectangulaire, tandis que la longueur de cette onde est comparable à ces mêmes dimensions; enfin, sans demeurer rigoureusement constantes, ces dimensions varient très lentement le long du canal. L'intégration des équations de Lagrange se poursuit alors aisément; elle conduit aux résultats suivants :

Si β et γ sont la longueur et la profondeur du canal, si g est l'intensité de la pesanteur, la hauteur de l'intumescence est proportionnelle à $\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{4}}$; la longueur de l'onde à $\gamma^{-\frac{1}{2}}$; la vitesse d'une particule fluide à $\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{3}{4}}$; enfin la vitesse de propagation de l'onde est égale à $\sqrt{g\gamma}$.

La théorie élégante développée par Green ne s'accordait pas entièrement avec les observations des hydrauliciens et, en parti-

---

[1] *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. VI, 1838, p. 457.

culier, avec les expériences si remarquables de Scott Russel. Green avait posé, à la base même de son analyse, que la profondeur du canal variait, le long de ce canal, beaucoup moins vite que la hauteur de l'intumescence; selon Scott Russel, au contraire, la dénivellation produite par l'*onde solitaire* varie beaucoup moins vite que la profondeur du canal où cette onde se propage. Cette divergence n'échappa pas à Green; mais il ne chercha pas à la lever; dans une nouvelle *Note on the motion of Waves in Canals*, communiquée à la *Philosophical Society* de Cambridge le 18 février 1839 (¹), il se borne à étudier la propagation des ondes de très grande longueur dans un canal de section invariable. Il intègre, en particulier, les équations pour le cas d'une section triangulaire. Les résultats de son analyse s'accordent d'une manière satisfaisante avec certaines observations de Scott Russel.

L'étude de la réflexion du son à la surface de séparation de deux fluides a été inaugurée par Poisson. Dans un premier Mémoire (²), l'illustre géomètre a traité complètement les effets qui se produisent lorsqu'une onde sonore plane tombe normalement sur la surface plane qui sépare deux fluides différents. Dans un second Mémoire (³), il a abordé, dans son entière généralité, l'étude de la propagation d'un ébranlement issu d'un centre, au sein d'un système formé par deux fluides superposés.

A ce degré de généralité, le problème devient des plus ardus; l'extrême habileté acquise par Poisson dans le maniement des formules algébriques compliquées et dans la transformation des intégrales multiples, lui permit seule de mener à bien des calculs aussi épineux et d'en faire sortir ce beau théorème :

Si les deux fluides superposés se compriment et se dilatent suivant les lois qui régissent les gaz parfaits, les formules dont dépendent la réflexion et la réfraction du son ont même forme

---

(¹) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. VII, 1839, p. 87.

(²) Poisson, *Mémoire sur le mouvement des fluides élastiques dans des tuyaux cylindriques et sur la théorie des instruments à vent.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. II, 1819, p. 372).

(³) Poisson, *Mémoire sur le mouvement de deux fluides élastiques superposés* (Ibid., t. X, 1825, p. 317.)

que celles dont dépendent la réflexion et la réfraction de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Ce théorème, ainsi que les résultats les plus intéressants de l'analyse de Poisson, peut s'obtenir très aisément si l'on se borne à traiter de la réflexion et de la réfraction des ondes planes; c'est ce que Green montra en l'élégant Mémoire : *On the Reflexion and Refraction of Sound,* qu'il communiqua, le 11 décembre 1877, à la *Philosophical Society* de Cambridge ([1]).

Les calculs compliqués que Poisson avait dû développer lui avaient donné, dans le cas où le son éprouve la réflexion totale, des résultats visiblement inadmissibles. Green parvint heureusement à résoudre ce problème de la réflexion totale dans le cas où le petit mouvement du fluide a la forme pendulaire qui convient à un son simple. Cette solution consistait essentiellement à représenter le mouvement engendré dans le milieu où le son se propage le plus vite par la formule qui convient à une *onde évanescente.*

Coïncidence étrange ! Cette forme d'intégrale de l'équation des petits mouvements se présentait simultanément en France, en Angleterre, en Allemagne et en Irlande, à quatre géomètres dont les méditations se poursuivaient, indépendantes; elle leur apparaissait comme la clé des effets de réflexion totale en Acoustique et en Optique.

En 1836, dans une lettre à Ampère, Cauchy ([2]) formulait le premier cette hypothèse : Une lumière qui se réfléchit totalement engendre une onde réfractée évanescente; cette onde, il la supposait longitudinale. En 1837, tandis que Green introduisait cette même onde en Acoustique, F.-E. Neumann ([3]) restituait la transversalité à l'onde optique évanescente. Dans de courtes Notes présentées ([4]) à l'Académie de Dublin de 1841 à 1845, Mac Cullagh développait des vues semblables.

([1]) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. VI, 1838, p. 403.

([2]) Cauchy, *Comptes rendus*, t. II, 1836, p. 364. — *Poggendorff's Annalen*, Bd. IX, 1836, p. 39.

([3]) F.-E. Neumann, *Poggendorff's Annalen*, Bd. X, 1837, p. 510.

([4]) Mac Cullagh, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. II et III. — *Collected Works*, p. 187, 218 et 250.

V.

L'étude de la réflexion et de la réfraction du son conduisait Green, par un passage naturel, de l'Hydrodynamique à l'Optique. En effet, le 11 décembre 1837, en même temps qu'il donnait à la *Philosophical Society* de Cambridge son Mémoire sur l'Acoustique, il lui communiquait [1] un autre écrit intitulé : *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non cristallized media.*

Cauchy avait déjà tenté d'analyser la réflexion et la réfraction d'une onde plane à la surface de séparation de deux milieux élastiques isotropes, et de comparer les résultats obtenus aux formules, découvertes par Fresnel, qui régissent la réflexion et la réfraction de la lumière; mais les conditions qu'il avait imposées à la surface de contact des deux milieux élastiques ne s'accordaient évidemment pas avec les lois habituelles de l'Élasticité. Cauchy, il est vrai, avait annoncé un Mémoire où serait établi un *nouveau principe de Mécanique* applicable à ce problème; mais ce Mémoire n'avait jamais vu le jour.

L'étude de la réflexion et de la réfraction à la commune surface de deux milieux élastiques, étude si essentielle à la critique des théories optiques, devait donc être précédée d'une revision des principes admis dans la théorie de l'Élasticité et, particulièrement, des conditions vérifiées à la limite de deux milieux.

Or, lorsqu'on veut écrire à coup sûr, sans omission ni répétition, toutes les conditions dont dépend le mouvement du système, une seule méthode offre toute garantie; c'est la méthode qui consiste à prendre pour point de départ le principe des vitesses virtuelles et le principe de d'Alembert, et à en tirer toutes les équations du mouvement par le calcul des variations; c'est, en un mot, la méthode créée par Lagrange et dont la *Mécanique analytique* est l'admirable développement.

C'est de cette méthode que Green fait usage pour établir les

---

(1) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1838.

équations de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques isotropes et très peu déformés.

Le potentiel interne, dont il regarde l'existence comme liée à l'impossibilité du mouvement perpétuel, est une intégrale triple dont l'élément varie avec les dilatations et les glissements en chaque point; ce potentiel dépend, pour chaque milieu élastique isotrope, de deux constantes distinctes, qui caractérisent les propriétés de ce milieu; ces deux constantes se retrouvent naturellement dans toutes les équations, équations indéfinies et conditions aux limites, que fournit la méthode de Lagrange.

Tout n'était pas nouveau, il s'en faut bien, dans cette analyse de Green. Créant la théorie de l'Élasticité, et la fondant sur certaine hypothèse relative aux actions moléculaires, Navier [1] avait, tout d'abord, obtenu les équations de l'Élasticité par une méthode bien distincte de celle de Lagrange; mais, dans une seconde partie de son Mémoire, il avait formé le potentiel des forces dont il supposait l'existence et, par l'emploi du calcul des variations, il en avait tiré non seulement les équations indéfinies que lui avait fournies sa première méthode, mais encore les conditions aux limites qu'elle ne lui avait pas données. Malheureusement, cette seconde partie du Mémoire de Navier (la plus belle) demeura plongée dans un oubli profond.

Les hypothèses de Navier faisaient dépendre l'élasticité d'un corps isotrope d'un seul coefficient, variable avec la nature du corps; de même, selon Poisson et Cauchy, l'élasticité d'un ensemble de points matériels soumis à des attractions, fonctions de la distance mutuelle, qui deviennent insensibles à des distances sensibles, dépend seulement, en général, de quinze coefficients, qui se réduisent à un seul lorsque l'ensemble est isotrope. Mais, dès 1828, Cauchy observa [2] que l'élasticité d'un milieu *continu* et isotrope dépendait de deux coefficients distincts; il a donc, sur

---

(1) NAVIER, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827, p. 376; Extrait du *Bulletin de la Société philomathique*, 16e année, 1823, p. 177.)

(2) CAUCHY, *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre et les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique* (*Anciens exercices de Mathématiques*, 3e année, 1828; *Œuvres de Cauchy*, 2e série, t. VIII, p. 195).

ce point, devancé Green, comme Navier l'avait précédé dans l'emploi, en Élasticité, de la méthode de Lagrange.

Les conditions vérifiées à la commune surface de deux milieux isotropes étant connues, il devient très facile d'analyser la réflexion que des ondes planes et transversales éprouvent en une telle surface.

Lorsque la vibration incidente est normale au plan d'incidence, il est possible de satisfaire aux conditions limites en supposant que les vibrations réfléchies et réfractées sont toutes deux transversales et normales au plan d'incidence; les formules qui régissent leurs amplitudes coïncident avec celles que Fresnel a données pour la lumière polarisée dans le plan d'incidence. L'expérience exige donc, si l'on veut adopter l'explication élastique des phénomènes lumineux et mesurer l'intensité lumineuse par le carré de l'amplitude, que l'on place la vibration normalement au plan de polarisation.

Lorsque l'on veut traiter de même la réflexion et la réfraction d'une onde plane vibrant dans le plan d'incidence, une difficulté surgit; pour vérifier les conditions limites il faut, à l'onde réfléchie transversale et à l'onde réfractée transversale, associer une onde réfléchie longitudinale et une onde réfractée longitudinale.

Pour faire disparaître ces ondes parasites, qui rendraient impossible toute comparaison entre les vibrations d'un corps élastique et les phénomènes lumineux, Green suppose que les deux milieux élastiques ont sensiblement les mêmes constantes d'élasticité, tout en étant de densités différentes, et qu'ils sont sensiblement incompressibles. Alors une onde transversale vibrant dans le plan d'incidence fournit une onde réfléchie et une onde réfractée, toutes deux transversales, pour lesquelles les formules de Fresnel, relatives à la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, jouent le rôle de loi limite.

En considérant ainsi des milieux isotropes qui ont tous la même élasticité, tout en ayant des densités différentes, qui sont tous incompressibles, Green a repris, sans qu'il paraisse s'en être douté, les suppositions par lesquelles Fresnel avait défini les éthers propres aux divers milieux transparents et sur lesquelles il avait édifié ses formules de la réflexion et de la réfraction. La théorie de Green n'est, en somme, que la théorie de Fresnel

développée selon les méthodes rigoureuses de la *Mécanique analytique*.

L'étroite parenté de cette théorie avec les vues de Fresnel a été mise en évidence par M. H. Poincaré ([1]), qui a repris les conceptions de Green sans connaître la priorité du géomètre anglais.

Le dernier travail de Green fut communiqué par lui à la *Philosophical Society* de Cambridge, le 20 mai 1839 ([2]); il est intitulé : *On the Propagation of Light in crystallized Media;* l'importance de ce Mémoire pour la théorie de l'élasticité n'est pas moindre que pour la théorie de la lumière.

Green développe, tout d'abord, l'analyse des déformations finies d'un milieu continu; cette analyse, qu'il tire de la considération du carré d'un même élément linéaire avant et après la déformation, le conduit à caractériser cette déformation par six expressions qu'une transformation de coordonnées avait déjà fournies à Cauchy ([3]). Ces expressions des dilatations et des glissements en une déformation finie, il en fait usage pour établir les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, selon la méthode, imitée de Lagrange, qu'il avait appliquée, dans son précédent travail, aux milieux infiniment peu déformés. Il remarque que le potentiel interne dépendra par là des dérivées partielles des élongatations u, v, w de chaque point matériel par rapport aux coordonnées initiales x, y, z de ce même point matériel. Mais il restreint le développement de ce potentiel aux termes qui contiennent seulement les premières et les secondes puissances de ces dérivées; en regardant les autres termes comme négligeables, il bornait implicitement aux déformations infiniment petites son analyse, qui aurait pu être entièrement générale; il laissait à M. Boussinesq ([4]) l'honneur d'écrire le premier les formules qui régissent l'équilibre et le mouvement d'un milieu continu, affecté de déformations finies.

([1]) H. Poincaré, *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, n° 208. Paris, 1889.

([2]) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1839.

([3]) Cauchy, *Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation ou à la dilatation des corps* (*Anciens exercices de mathématiques*, 3e année, p. 257, 1828).

([4]) Boussinesq, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Note III (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XX, p. 591).

Des formules obtenues, Green déduit, par une analyse très élégante, les lois de la propagation d'une onde plane; voici le beau théorème auquel il parvient :

Une même onde plane, dont on se donne l'orientation dans l'espace formé par les positions initiales (x, y, z) *des points matériels, peut propager des vibrations orientées suivant trois droites distinctes; lorsqu'on les rapporte à ce même état initial du milieu, ces trois droites sont rectangulaires entre elles; elles sont dirigées suivant les axes principaux d'un certain ellipsoïde qui dépend de l'élasticité du milieu dans son état initial* et de l'orientation de l'onde considérée. *Chacune des trois directions de vibrations a une vitesse de propagation particulière et le carré de cette vitesse est inversement proportionnel à l'axe principal selon lequel s'oriente cette vibration.*

L'année même où Green communiquait à la *Philosophical Society* de Cambridge le Mémoire où se trouvait ce beau théorème, l'Académie des Sciences entendait la lecture du dernier Mémoire de Poisson [1].

Dans le troisième paragraphe, dont la maladie et la mort n'ont pas permis l'achèvement, le grand géomètre, auquel la théorie de l'élasticité doit peut-être ses progrès les plus étonnants, consacrait les dernières lueurs de son génie à l'établissement du théorème même par lequel Green couronnait sa courte, mais brillante carrière. L'analyse de Poisson était moins élégante que celle de Green; elle était aussi un peu moins générale, car elle se bornait tout d'abord aux vibrations infiniment petites; Green, il est vrai, et nous l'avons dit, perdait par une hypothèse restrictive introduite dans la formation du potentiel la généralité première de ses formules. En reprenant le problème de la propagation des ondes dans les milieux affectés de déformations finies par les puissantes méthodes qu'ont inaugurées Christoffel et Hugoniot, M. Hada-

---

[1] Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés*, lu à l'Académie le 28 octobre 1828, § III : *Lois de la propagation du mouvement dans un corps cristallisé* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XVIII, p. 134).

mard [1] a pu, tout récemment, donner une entière généralité et une rigoureuse précision au théorème de Green et de Poisson. Après les recherches de M. Hadamard, une seule restriction pesait encore sur ce théorème : l'invariabilité de la température pendant la durée du mouvement étudié. Cette restriction, Laplace en avait délivré l'expression de la vitesse du son au sein des fluides qu'avait donnée Newton; les méthodes de la Thermodynamique nous ont permis de la lever [2] dans le problème plus général que nous analysons ici.

L'objet de Green, en résolvant ce problème, était d'établir un lien solide entre la théorie de l'élasticité et l'étude des phénomènes lumineux au sein des milieux biréfringents.

Fresnel admet qu'au sein d'un cristal, chaque onde plane propage deux vibrations exactement situées dans l'onde. Prenons donc un milieu élastique dans un état d'équilibre où aucune force étrangère ne le sollicite; supposons qu'une onde plane s'y propage et assujettissons le milieu à des conditions telles que deux des trois vibrations propagées par l'onde se trouvent assurément dans cette onde, la troisième lui étant alors normale. Ces conditions restreignent étroitement les lois de l'élasticité de notre milieu anisotrope; tandis que l'élasticité d'un milieu cristallisé dépend en général, selon l'analyse de Green, de vingt-sept coefficients, qui se réduisent à vingt et un si l'état d'équilibre initial correspond à des pressions nulles, le milieu que nous venons de caractériser ne dépend plus que de six coefficients d'élasticité distincts. D'ailleurs, au sein d'un tel milieu, les vibrations élastiques se propagent suivant des lois semblables de tout point à celles qui, selon Fresnel, régissent les vibrations lumineuses au sein d'un milieu cristallisé. Ce milieu élastique à six coefficients d'élasticité distincts fournit donc une saisissante image de l'éther qui propage la lumière dans des substances biréfringentes.

---

(1) J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, séance du 19 décembre 1900, t. XXX, p. 56. — *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 51. Paris, 1903.

(2) *Sur la propagation des ondes dans un milieu parfaitement élastique affecté de déformations finies.* (*Comptes rendus*, séance du 8 juin 1903, t. CXXXVI, p. 1379.) — *La propagation des ondes dans les milieux élastiques, selon qu'ils conduisent ou ne conduisent pas la chaleur* (*Ibid.*, séance du 22 juin 1903, t. CXXXVI, p. 1537).

Cette belle théorie de la double réfraction demeura peu connue; longtemps après, Lamé la retrouva par une analyse moins élégante et la publia dans ses *Leçons sur l'élasticité des corps solides*, ignorant la priorité de Green.

Nous avons dit qu'au sein du milieu à six coefficients d'élasticité défini par Green, les lois de propagation des vibrations situées dans l'onde s'accordaient pleinement avec les lois, énoncées par Fresnel et vérifiées par l'expérience, qui régissent la propagation de la lumière dans les cristaux. Cette affirmation nécessite une restriction. Si nous prenons pour mesure de l'intensité lumineuse le carré de l'amplitude de la vibration, l'accord des deux ensembles de lois suppose que l'on prenne pour plan de polarisation d'un rayon le plan qui passe par ce rayon et la vibration qu'il propage; selon Fresnel, au contraire, le plan de polarisation doit être pris perpendiculaire au plan du rayon et de la vibration.

Rien ne s'oppose, semble-t-il tout d'abord, à ce changement; il atteint une règle qui paraît une pure convention; avant Green, F.-E. Neumann (1) et Cauchy (2) l'ont proposé. Mais d'autre part, si l'on veut donner par l'élasticité une explication des effets de réflexion et de réfraction de la lumière au contact de deux milieux isotropes, la même définition de l'intensité lumineuse exige que l'on place le plan de polarisation perpendiculaire au plan de vibration, comme le voulait Fresnel. La contradiction est flagrante.

Dans l'espoir de la lever, Green semble prêt à renoncer à sa théorie de la double réfraction : il ne fait plus égales à o les pressions qui sollicitent l'éther dans l'état d'équilibre initial, et il établit, sur la propagation des ondes au sein de cet éther initialement déformé, un théorème qui a quelque parenté avec les doctrines de Fresnel. L'explication ne saurait suffire. Entre la théorie que Green a donnée de la réflexion et de la réfraction au contact des milieux isotropes et toute théorie possible de la double réfraction, le désaccord est forcé : il a sa racine dans les hypothèses mêmes sur lesquelles repose la première théorie.

Green, comme Fresnel, a supposé que les milieux isotropes transparents différaient les uns des autres par la densité de l'éther

---

(1) F.-E. Neumann. *Poggendorf's Annalen*. Bd. XXV. 1832. p. 418.
(2) Cauchy. *Mémoires de l'Académie des Sciences*. t. X. 1831. p. 293.

qu'ils contiennent, mais non pas par l'élasticité de cet éther; l'extension d'une telle théorie aux milieux cristallisés est inconcevable: on ne peut, en effet, imaginer qu'en un milieu anisotrope, la densité de l'éther varie avec la direction que l'on considère: il faut donc que l'anisotropie du milieu influe sur l'élasticité de l'éther; et comment cela pourrait-il être, si cette élasticité est indépendante de la nature du corps où l'éther est répandu?

Dès 1835, F.-E. Neumann signalait [1] cette contradiction; ce n'est pas ici le lieu d'examiner le moyen qu'il proposait pour la résoudre: nous nous verrions entraînés à discuter complètement la relation qu'il convient d'établir entre le plan de vibration et le plan de polarisation; cette discussion, à laquelle l'expérience de M. Otto Wiener a apporté un élément essentiel en imposant une nouvelle condition aux indéterminées du problème, nous conduirait à rejeter comme contradictoire la théorie élastique de la lumière.

Ces quelques pages, consacrées à l'œuvre de Green, suffiront, nous en avons l'espoir, à caractériser le rôle de première importance que cette œuvre a joué dans le développement des théories physiques; elles montreront quel service M. Ferrers avait rendu aux géomètres et aux physiciens en réunissant les écrits de George Green, quel service M. Hermann leur rend en publiant de nouveau cette collection épuisée.

P. Duhem.

GERNET (Mlle N. v.). — Untersuchung zur Variationsrechnung. Ueber eine Methode in der Variationsrechnung. Inauguraldissertation de l'Université de Göttingue. In-8°. 76 pages. Göttingue, 1902.

Mlle Gernet expose la théorie, aujourd'hui connue, de quelques-uns des problèmes importants du calcul des variations (cas de plu-

---

[1] F.-E. Neumann. *Abhandlungen der Berliner Akademie*, 1835 (Le mémoire de Neumann a été traduit par Cabart et publié sous ce titre : *Recherche théorique des lois d'après lesquelles la lumière est réfléchie et réfractée à la limite commune de deux milieux complètement transparents*, dans le *Journal de Liouville*, t. VII, 1842, p. [illegible]).

sieurs fonctions inconnues ; cas le plus simple du minimum relatif) en employant la méthode de Weierstrass, sous la forme que lui a donnée M. Hilbert.

On notera les paragraphes (p. 15-17, 53-56) qui ont pour objet de démontrer la dérivabilité (jusqu'au second ordre) de la fonction cherchée. L'auteur emploie à cet effet deux méthodes différentes : l'une, bien connue [1], consiste à faire l'intégration par parties dans un sens opposé à celui de Lagrange, de manière à introduire sous le signe $\int$ une intégrale définie au lieu d'une dérivée; l'autre s'inspire des idées contenues dans un précédent travail de M. Noble : elle est remarquable en ce qu'elle arrive au résultat sans introduire la variation première.

Nous nous permettrons une critique au point de vue historique et bibliographique. Mlle Gernet, lorsqu'elle étudie les choses à ce point de vue, paraît ignorer la part qui revient à M. Darboux. Je fais allusion aux pages qu'elle consacre (p. 49-53) à la nécessité de la condition de Jacobi et à la cessation du minimum aux points conjugués : question que M. Darboux a élucidée dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* en employant précisément le mode de raisonnement dont se sert l'auteur. La thèse de Mlle Gernet n'est d'ailleurs pas, parmi les travaux analogues parus récemment sur le calcul des variations, le seul qui appelle une remarque de cette espèce. J. H.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Handwörterbuch *der Astronomie*. Herausgeg. von W. Valentiner. 27e et 28e livraison. Gr. in-8°. Leipzig, Barth. 3 m. 60 pf.

Hensel (Kurt) u. Geo. Landsberg. — *Theorie der algebraischen*

[1] *Voir*, en particulier, un article de M. Whittemore, dans les *Transactions of the American Math. Soc.*

Funktionen einer Variablen u. ihre Anwendung auf algebraische Kurven u. Abel'sche Integrale. Gr. in-8°, XVI-707 p. Leipzig, Teubner. 26 m.; relié 28 m.

JACOBY (H.). — *Practical talks by an Astronomer.* In-8°, avec illustrations. New-York. 5 sh.

LORIA (GINO). — *Spezielle algebraische u. transcendente ebene Kurven; Theorie u. Geschichte.* Deutsche Ausg., bearb. von Fritz Schütte. 2e partie, avec 52 fig. et 4 planches lithographiques. Leipzig, Teubner. 10 m. Complet en un volume cartonné toile, 28 m.

MELLOR (J.-W.). — *Higher Mathematics. For students of Chemistry and Physics.* With special reference to practical Work. In-8°, 566 p. London, Longmans. 12 sh. 6 d.

HELMHOLTZ (H. v.). — *Vorlesungen über theoretische Physik.* Herausgeg. von Arth. König u. A.; T. II. In-8°. Leipzig, Barth. 12 m.; relié, 13 m. 50 pf.

Contenu : Dynamik continuirlich verbreiteter Massen. Herausgeg. von Otto Krigar-Menzel. VIII-247 p. avec 9 fig.

PIONCHON (J.). — *Leçons d'Électricité industrielle.* T. I : *Électrostatique; Magnétisme; Électromagnétisme; Électrocinématique; Électrothermie; Electrochimie.* In-8°, 365 p. avec fig. Grenoble, Gratier et Cie. 10 fr.

ARAGO. — *Essai d'une méthode de calcul commune aux distances lunaires et aux occultations.* In-8°, 127 p. et planches. Paris, Impr. nationale.

DESSENON (E.). — *Éléments de Géométrie analytique.* 3e édit. In-8°, 523 p. avec fig. Paris, Hachette et Cie. 7 fr. 50 c.

HILBERT (D.). — *Foundations of Geometry.* Traduit par E.-J. Townshend. In-8°. London, Paul. 4 sh. 6 d.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann.* Herausgeg. von Emil Lampe u. Geo. Waltenberg. 31. Bd. 1900. 1. Heft. Gr. in-8°. VI-480 p. Berlin, G. Reimer. 15 m.

ROUQUET (V.). — *Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales.* In-4°, 43 p. Marseille, impr. Barlatier.

BELTRAMI (E.). — *Opere mathematiche.* Per cura della facolta di scienze della R. Univ. di Roma. T. I. In-4°. Milano, Hoepli. 25 l.

BIGOURDAN (G.). — *Observations de nébuleuses et d'amas stellaires.* T. IV : *Observations différentielles* (XIVh0m-XVIIIh0m). In-4°, 402 p. Paris. Gauthier-Villars.

CHARLIER (CARL-LUDW.). — *Die Mechanik des Himmels. Vorlesungen.* 1. Bd. Gr. in-8°, VIII-488 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 18 m.; relié, 20 m. 50 pf.

CLAIRIN (J.). — *Sur les transformations de Baecklund* (thèse). In-4°, 68 p. Paris, Gauthier-Villars.

CLERKE (AGNES-M.). — *Popular history of Astronomy during the 19th century.* 4e édit. In-8°, 508 p. London, Black. 15 sh.

COMBEBIAC (G.). — *Calcul des triquaternions* (thèse). In-4°, 127 p. Paris, Gauthier-Villars.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE. *Comptes rendus des travaux, procès-verbaux, rapports et mémoires,* publiés par E. Fichot et P. de Vanssay. In-4°, XL-254 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

DOEHLEMANN (KARL). — *Geometrische Transformationen.* 1. Thl. In-8°, VII-322 p. avec 99 fig. et 6 portraits. Leipzig, Göschen. (Sammlung Schubert, XXVII.) 10 m.

ENCYKLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* 1 Bd. *Arithmetik u. Algebra*, redig. von W. Fr. Meyer. 7. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 3 m. 60 pf.

FOUËT (E.-A.). — *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* 1re partie. In-8°, 334 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

FRICKE (ROB.). — *Hauptsätze der Differential- u. Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen.* 3. Aufl. Gr. in-8°, XV-218 p. avec 74 fig. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 5 m.; relié, 5 m. 80 pf.

HEGEMANN (E.). — *Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie.* 2. Aufl. Gr. in-8°, VI-169 p. avec 41 fig. Berlin, Parey; relié, 5 m.

KINKELIN (HERM.). — *Quadraturen.* Gr. in-4°. 30 p. avec fig. Basel, Schwabe. 1 m. 60 pf.

LAUSSEDAT (A.). — *Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques.* T. II. 1re partie : *Iconométrie et Métrophotographie.* In-8°, 202 p. avec fig. et 2 planches. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

LODGE (A.). — *Differential Calculus for Beginners,* with Introduction by sir Oliver J. Lodge, in-8°, 304 p. London, Bell. 4 sh. 6 d.

MONTCHEUIL (M. DE). — *Sur une classe des surfaces* (thèse). In-4°. 83 p. Paris, Gauthier-Villars.

SAPOLSKY (L.). — *Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen cubischen Zahlkörper.* (Dissert.) Gr. in-8°, VII-481 et VI p. avec 35 Tab. Leipzig, Teubner. 6 m.

SCHUBERT (HERM.). — *Niedere Analysis.* I. Thl. *Kombinatorik Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche u. diophantische Gleichungen.* In-8°, VII-181 p. Leipzig, Göschen. (Sammlung Schubert, V.) 3 m. 60 pf.

STURM (C.). — *Cours d'Analyse de l'École polytechnique.* 12e édit. 2 vol. in-8° avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

WOLF (C.). — *Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à* 1793. In-8°, XII-392 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

ZINDLER (KONR.). — *Liniengeometrie u. Anwendungen.* 1. Bd. In-8°, VIII-380 p. avec 87 fig. Leipzig, Göschen. (Sammlung Schubert, XXXIV). 12 m.

BOLTZMANN (L.). — *Leçons sur la théorie des gaz.* Trad. par A. Gallotti. Ire partie. In-8°, XIX-204 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 8 fr.

LAFORENT-DUCLOS (C.). — *Origine et système des mouvements de l'atmosphère. Génération des variations barométriques.* In-8°, 93 p. Limoges, Vve Ducourtieux.

TRAVAUX *et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures.* T. XII. In-4°, 416 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

VERÖFFENTLICHUNGEN *des königl. preuss. meteorologischen Instituts.* Herausgeg. durch W. v. Bezold. Ergebniss der Arbeiten am aëronautischen Observatorium in d. J. 1900 u. 1901. Von Rich. Assmann u. Arth. Berson. Gr. in-4°, IV-279 p. avec figures. Berlin, Asher et Cie. 15 m.

Ibid. Ergebnisse der magnet. Beobachtgn. in Potsdam im J. 1900. 2. Heft. Gr. in-4°, 43 p. et 4 planches. Berlin, Asher et Cie. 3 m. 50 pf.

ABEL (NIELS-HENRIK). *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance.* In-4°, XIII-119-135-61-64-59 et II p. avec figures. 2 planches et 6 fac-similés. Leipzig, Teubner. Paris, Gauthier-Villars. 21 m.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MACH (Ernst), Professeur émérite de l'Université de Vienne. — La Mécanique. Étude historique et critique de son développement. Ouvrage traduit sur la 4e édition allemande par *Émile Bertrand*, Professeur à l'École des Mines du Hainaut. Avec une Introduction de M. *Émile Picard*, Membre de l'Institut. Grand in-8°, VIII-496 pages et figures. Paris, A. Hermann.

La *Mécanique* du professeur Mach offre une des lectures les plus variées que l'on puisse souhaiter. On y trouve des déductions mathématiques, mais aussi simplifiées que possible et exemptes de tout vain étalage de formules; de l'expérience, chose bien imprévue, pour un lecteur français, en un traité de Mécanique, et cependant bien essentielle à l'intelligence de cette science; de la philosophie, mais dépouillée de ce pédantesque jargon qui croit avoir atteint la profondeur lorsqu'il est plongé dans l'obscurité; des tableaux historiques, mais brossés par larges touches que n'alourdissent pas les minuties de l'érudition; de la polémique, enfin, mais sans aigreur ni personnalités. A ce livre varié, sobre, vivant, que manquait-il pour séduire le lecteur français? D'être écrit en français. En traduisant cet Ouvrage, M. Émile Bertrand nous a ôté tout prétexte à l'ignorer plus longtemps.

1. L'Ouvrage tout entier est dominé par une théorie sur la nature et la portée de la philosophie naturelle; cette théorie, nous ne la saurions discuter en ce *Bulletin*, qui n'est pas une revue de philosophie; mais nous ne saurions, non plus, nous dispenser de la résumer, car ses conséquences se prolongent jusqu'à l'exposition de la Mécanique rationnelle que nous présente le professeur Mach, et en imposent le plan.

La doctrine philosophique qui fait considérer au professeur Mach la Science comme *économie de la pensée* s'est formée en lui depuis fort longtemps. Dès 1868, il l'exposait dans une con-

férence « sur les formes des liquides [1] ». En 1882, il la formulait d'une manière doctrinale dans un discours académique [2]. Depuis, il en a poursuivi les conséquences dans divers écrits et, notamment, en celui qui nous occupe.

« L'idée d'une économie de la pensée, dit M. Mach, se développa en moi par mes expériences professorales dans la pratique de l'enseignement. Je la possédais déjà lorsqu'en 1861, je commençai mes leçons comme *privat-docent*, et je croyais alors être seul à l'avoir, ce que l'on voudra bien trouver pardonnable. Mais aujourd'hui je suis, au contraire, convaincu qu'au moins un pressentiment de cette idée doit toujours avoir été un bien commun à *tous* les investigateurs qui ont réfléchi sur la recherche en général. »

Depuis l'époque où M. Mach a formulé sa doctrine sur la nature de la philosophie naturelle, des pensées plus ou moins analogues aux siennes se sont développées en Angleterre, en Allemagne, en France, dans les écrits de nombreux auteurs; parmi ceux-ci, les uns subissaient plus ou moins directement l'influence du professeur de Vienne; les autres, sans ressentir les heureux effets de cette influence, retrouvaient par leurs propres efforts des idées déjà découvertes; naturellement, ils n'ont pas rendu aux recherches de leur prédécesseur inconnu la justice qu'elles méritaient [3].

L'immense multitude, l'infinie variété des objets proposés à la connaissance de l'homme excéderaient sans mesure l'ampleur et la perspicacité de son intelligence s'il lui fallait en conserver une mémoire qui fût le simple décalque de son expérience personnelle; en outre, le temps et les moyens lui manqueraient pour transmettre à ses contemporains ou à la postérité les fruits de cette expérience. Il lui faut donc, avant d'emmagasiner en son esprit les apports de

---

(1) E. Mach. *Die Gestalten der Flussigkeit*. Prag, Calve, 1872. — E. Mach. *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*. Leipzig, 1896.

(2) E. Mach. *Die okonomische Natur der physikalischen Forschung*. Vienne, Gerold, 1882. — E. Mach, *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*. Leipzig, 1896.

(3) Qu'il nous soit permis d'excuser de la sorte l'absence du nom de M. Mach en des publications où nous avons parfois émis des pensées qui avaient avec les siennes plus d'une analogie.

ses perceptions, qu'il les condense, qu'il les concentre, qu'il en extraie le suc de telle manière qu'il puisse loger dans une case aussi réduite que possible tout ce qu'une foule de faits renfermaient d'utile. Ce résumé, cette *abstraction,* au sens étymologique du mot, est l'objet propre du travail scientifique. En tout domaine, le progrès de la Science a pour but de faire tenir le plus de réalité possible en une forme réduite le plus possible; l'essence de ce progrès est une *économie* de plus en plus grande de la pensée.

Selon M. Mach, cette tendance à l'économie, considérée comme principe directeur du labeur scientifique, est particulièrement saisissable dans le domaine des sciences physiques.

Dans la nature, il n'y a que des *faits;* la loi unique qui, seule, entrera dans la Science au lieu et place de faits multiples, est la copie, résumée par abstraction, des caractères communs entre tous ces faits, ou mieux, de ceux de ces caractères communs qui nous intéressent particulièrement.

« Lorsque nous parlons de causes et d'effets, nous faisons arbitrairement ressortir, dans la copie mentale d'un fait, les circonstances dont nous devons estimer l'enchaînement dans la direction qui est importante pour nous. Dans la nature, il n'y a ni causes, ni effets. La nature n'est présente qu'*une fois*. Les répétitions de cas semblables où A est toujours lié à B, c'est-à-dire les conséquences identiques de circonstances identiques, dans lesquelles consiste précisément l'essentiel de la relation de cause à effet, n'existent que dans l'abstraction que nous employons afin de copier les faits dans la pensée. »

Toute loi physique est donc le résumé économique d'un nombre immense de faits; elle nous fait connaître non pas le tout de chacun de ces faits, mais le caractère que, pour une raison ou une autre, nous considérons comme important.

« Au lieu, par exemple, de noter un à un les divers cas de réfraction de la lumière, nous pouvons les reproduire et les prévoir tous lorsque nous savons que le rayon incident, le rayon réfracté et la normale sont dans un même plan et que $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Au lieu de tenir compte des innombrables phénomènes dans des milieux

et sous des angles différents, nous n'avons alors qu'à observer la valeur n en tenant compte des relations ci-dessus, ce qui est infiniment plus facile. La tendance à l'économie est ici évidente. Dans la nature, il n'existe d'ailleurs pas de loi de la réfraction, mais rien que de multiples cas de ce phénomène. La loi de la réfraction est une méthode de reconstruction concise, résumée, faite à notre *usage* et, en outre, *uniquement* relative au côté géométrique du phénomène. »

Les formules de plus en plus amples et générales de la Physique théorique ne sont que des concentrations, que des résumés abstraits poussés de plus en plus loin. « La Science elle-même peut donc être considérée comme un problème de minimum, qui consiste à exposer les faits aussi parfaitement que possible avec la moindre dépense intellectuelle. »

2. Ces idées sur la nature d'une formule de Mécanique ou de Physique dirigent la méthode qui doit servir à prouver une semblable formule. Cette formule prétend uniquement être une représentation condensée de l'expérience; la seule manière d'en éprouver la valeur, la seule *démonstration* dont elle soit susceptible consiste donc à la mettre en regard des faits qu'elle veut représenter; elle sera d'autant meilleure qu'elle représentera un plus grand nombre de faits, avec une plus grande exactitude et par des procédés plus simples.

« Toute science a donc, selon nous, la mission de remplacer l'expérience. Elle doit, par conséquent, dans ce but, d'une part rester toujours dans le domaine de l'expérience et, d'autre part, en sortir, attendant toujours de celle-ci une confirmation ou une infirmation. Là où il est impossible de confirmer ou d'infirmer, la Science n'a rien à faire... Les pensées *les plus scientifiques* sont celles qui restent valables sur le domaine *le plus étendu* et qui complètent et enrichissent *le plus* l'expérience. »

C'est donc par la comparaison de l'ensemble de ses conséquences aux faits d'expérience, de plus en plus nombreux, que la valeur d'une loi peut être établie; mais ce procédé de démonstration n'est pas un procédé d'invention; il ne peut être employé

que lorsque la loi est clairement formulée; il n'en peut suggérer la formule.

Les procédés d'invention ne se codifient pas; l'inventeur d'une loi se laissera suggérer l'énoncé de cette loi par les considérations les plus diverses; l'induction, la généralisation, l'analogie seront, le plus souvent, ses guides préférés.

Mais ces considérations, qui poussent l'inventeur à considérer telle proposition comme l'énoncé d'une loi valable, ne sauraient suffire à convaincre ses contemporains; d'autre part, ceux-ci ne peuvent éprouver la valeur de la loi en soumettant toutes ses conséquences au contrôle des faits; cette épreuve exige des expériences qui ne sont point encore réalisées, que l'avenir de la Science pourra seul fournir; on est alors amené à donner de la loi nouvelle une prétendue *démonstration*.

Une telle démonstration prend pour axiomes un certain nombre, le plus petit possible, de propositions tirées de notre *connaissance instinctive*.

Un esprit prudent doit se tenir grandement en garde contre la valeur logique de semblables démonstrations.

Tout d'abord, il est extrêmement difficile d'énumérer toutes les connaissances instinctives qui sont réellement mises en œuvre dans une telle déduction; presque aucun auteur ne parvient à les expliciter toutes, sans omission ni répétition.

D'autre part, la connaissance instinctive n'est, après tout, qu'un amas, confus et inanalysé, de données expérimentales, acquises à des époques imprécises de notre développement intellectuel.

« Ces connaissances instinctives jouissent d'une confiance toute particulière. Ne sachant plus *comment* nous les avons acquises, nous n'en pouvons plus critiquer le mode d'acquisition. Nous n'avons en rien contribué à leur formation. Elles se présentent à nous avec une puissance que ne possèdent jamais les résultats de nos expériences réfléchies, volontaires, dans lesquels nous sentons toujours notre intervention. Elles nous apparaissent comme des choses libres de subjectivité, étrangères à nous, que nous avons cependant sous la main et qui nous sont ainsi plus proches que les faits isolés dans la nature. C'est à cause de cela que l'on attribue parfois aux connaissances de cet ordre une ori-

gine entièrement différente et qu'on les considère comme existant en nous absolument *a priori,* antérieurement à toute expérience... Cette opinion n'est pas soutenable. Aussi, quelle que soit leur importance dans le processus de développement de la Science, l'autorité des connaissances instinctives doit toujours le céder finalement à celle des principes clairement posés et intentionnellement observés. Comme toutes les autres, les connaissances instinctives sont des connaissances expérimentales. La connaissance instinctive est aussi sujette à l'erreur que la connaissance consciemment acquise. Elle n'a, somme toute, de valeur que dans des domaines qui nous sont très familiers.

» Il vaut bien mieux, pour l'économie de la pensée et l'esthétique de la Science, *reconnaître* un principe directement comme la clef de l'intelligence de *tous* les faits d'une même catégorie, et voir clairement *qu'il les pénètre tous,* que trouver nécessaire une démonstration préalable, boîteuse, rapiécée et basée sur des propositions obscures, dans lesquelles se trouve inclus déjà le principe que l'on veut prouver, mais qui nous sont *par hasard* antérieurement familières.... En fait, cette manie de démonstration introduit dans la Science une sorte de rigueur *fausse et absurde.* Quelques propositions sont tenues pour plus certaines, elles sont regardées comme la base nécessaire et inattaquable des autres propositions, alors qu'en réalité il ne leur revient qu'un degré de certitude au plus égal si pas moindre, et que l'on n'atteint pas même le degré de certitude que la Science *rigoureuse* exige. On trouve souvent, dans les manuels, des exemples de cette fausse rigueur. »

Contre cette fausse rigueur, en étudiant le développement des principes de la Statique, M. E. Mach déploie toutes les ressources d'une impitoyable logique. Cette partie de son livre est peut-être celle qui arrêtera le plus longtemps le penseur.

3. Cependant, lorsqu'on veut enseigner à celui qui aborde une science telle que la Mécanique, une de ces formules économiques qui contiennent, concentrée et condensée, l'essence d'un nombre immense de faits, comment procédera-t-on ? Énoncera-t-on brutalement la formule que l'on a en vue, en se bornant à y joindre

l'affirmation que le développement ultérieur de la théorie la montrera toujours d'accord avec les faits? Selon ce qui précède, cette méthode serait logique; mais la psychologie la plus élémentaire nous montre qu'elle serait déplorable. Dans la loi ainsi présentée, le disciple ne verrait qu'une forme vide de tout contenu; elle lui demeurerait incomprise. Comment donc préparera-t-on son esprit à acquiescer à cette proposition et à en saisir le sens? En reprenant une voie analogue à celle qu'a suivie l'inventeur; en examinant les faits peu nombreux qu'il a d'abord étudiés, en reproduisant la suite d'analyses et d'extensions par laquelle il en a tiré la loi générale. La véritable introduction à l'énoncé d'un principe de Physique est une introduction historique :

« Les éléments fondamentaux des notions que la Mécanique étudie se sont développés presque complètement à propos de recherches sur des cas spéciaux très simples de phénomènes mécaniques. L'analyse historique de ces problèmes particuliers reste d'ailleurs le moyen le plus efficace et le plus naturel de pénétrer les éléments essentiels des principes, et l'on peut même dire que ce n'est que par cette voie qu'il est possible de parvenir à la pleine compréhension des résultats généraux de la Mécanique. »

Depuis peu d'années, notre enseignement secondaire des sciences physiques tend de plus en plus à rejeter toute considération historique et à la regarder comme l'objet d'une curiosité vaine et oiseuse. Ceux qui se sont efforcés de promouvoir cette tendance auraient grand intérêt à méditer l'Ouvrage du professeur Mach; je ne doute pas que cette lecture n'ébranle leur conviction; elle contribuerait, je pense, à leur donner cette conviction tout opposée, à laquelle l'expérience de l'enseignement ou des examens a amené plus d'un professeur : Celui-là n'a pas une compréhension complète et pénétrante d'une loi physique qui ne connaît pas, au moins en gros, les principes erronés que cette loi a remplacés et les efforts qu'elle a dû faire pour les supplanter.

D'ailleurs, M. Mach n'attribue pas seulement à l'étude de l'histoire une importance capitale pour l'intelligence de la science faite; il y voit un guide précieux pour l'inventeur qui veut ouvrir des voies nouvelles :

« Pour la compréhension historique d'une science, il n'y a pas

que la connaissance des idées adoptées et cultivées par les successeurs qui soit importante ; il est très important et très instructif de connaître les pensées passagères des chercheurs, même lorsqu'elles ont été abandonnées, même lorsqu'elles paraissent être des erreurs. L'étude historique du processus de développement d'une science est indispensable, si l'on ne veut pas que l'ensemble des principes qu'elle a réunis ne dégénère peu à peu en un système de choses acquises que l'on ne comprend qu'à moitié, sinon entièrement en un système de purs *préjugés*. Non seulement cette recherche historique fait mieux comprendre l'état actuel de la Science, mais, en montrant qu'il est en partie *conventionnel* et *accidentel*, elle fait ressortir des possibilités nouvelles. De ce point de vue supérieur, auquel on arrive par des chemins divers, on peut embrasser d'un regard plus libre l'ensemble de la Science et reconnaître des voies non encore parcourues. »

4. Quelque importance que le professeur Mach attribue à l'étude historique de la Science, cette étude est pour lui un moyen et non pas un but. Il n'a pas pour objet de faire revivre à nos yeux les idées des premiers chercheurs, de restaurer les premières ébauches des doctrines que leurs successeurs ont adoptées, de suivre dans tous ses détails l'évolution par laquelle ces ébauches se sont peu à peu organisées, différenciées, complétées, pour devenir des théories étendues et détaillées. Il laisse ces recherches à l'historien de profession et au psychologue. S'il fait appel à l'histoire, c'est seulement pour mieux saisir le sens réel et concret des formules *économiques* qui constituent aujourd'hui la Science.

Le livre que nous avons sous les yeux ne se pique donc pas d'être une histoire complète de la Mécanique, où le progrès de chacune des branches de la Science soit minutieusement suivi depuis l'apparition du premier bourgeon jusqu'à la maturité des fruits. Dans la longue suite des transformations qui composent un tel progrès, M. Mach choisit seulement ce qui aide à comprendre le plan définitif : tel un zoologiste qui demanderait seulement à l'embryologie d'éclairer l'anatomie de la forme adulte. En faisant ce choix, il abrège l'exposé des débuts trop anciens et trop confus pour que la Science actuelle en ait gardé la marque, il laisse de côté maint tâtonnement qui n'a pas abouti, maint germe qui a avorté.

Ce droit de choisir, de porter seulement son attention sur certaines phases du développement scientifique, de traiter l'histoire plus en logicien qu'en psychologue, M. Mach le revendique hautement; les divergences entre M. Wohlwill et lui au sujet des idées de Galilée, lui suggèrent les lignes suivantes :

« Certes, pour un historien, toutes les *phases* du développement de son héros sont intéressantes, mais l'*une* d'elles peut s'effacer devant *les autres*. Il faudrait être un très mauvais psychologue et ne guère se connaître soi-même, pour ne pas savoir combien il est difficile de se dégager des opinions reçues et comment, après que l'on s'en est affranchi, les débris des conceptions anciennes flottent encore dans la conscience et provoquent des rechutes à propos de cas particuliers. Il n'en a pas été autrement pour Galilée. Mais le point qui éveille le plus l'intérêt du physicien est précisément le *premier éclair d'une conception nouvelle* et c'est celui-ci qu'il recherchera. C'est ce premier éclair que j'ai cherché et je crois l'avoir trouvé. »

Traitée selon la méthode que revendique M. Mach, l'histoire de la Mécanique paraîtra infiniment intéressante au physicien, à celui qui cherche seulement dans le passé des lumières propres à éclairer le présent. S'ils oublient que tel est, en effet, le but que l'auteur a voulu atteindre, l'historien et le psychologue lui adresseront sans doute des reproches.

Dans son exposé, ils relèveront d'importantes lacunes; au long de l'histoire de la Statique, le nom de Descartes ne se lit nullement; Descartes, cependant, est le premier qui ait nettement distingué les deux notions de force et de travail, qui ait marqué le caractère infinitésimal du principe des déplacements virtuels.

Ils reprocheront surtout aux tableaux historiques tracés par M. E. Mach d'être trop simples, trop clairs, trop parfaitement ordonnés; l'évolution, telle que ces tableaux la retracent, tend trop constamment, trop sûrement au but qu'elle doit atteindre; la marche de l'esprit humain a été, en réalité, plus hésitante, plus tâtonnante; maintes fois, elle s'est égarée dans les inextricables broussailles de problèmes trop complexes; maintes fois, elle a dû rebrousser chemin au bord du précipice d'une question insondable.

Ils reprocheront, enfin, à l'histoire telle que la conçoit M. Mach

d'être trop *subjective;* elle porte trop profondément la marque des préoccupations qui hantent l'esprit de l'historien.

5. Ce dernier reproche, si l'on oubliait que M. Mach se pique d'être physicien et logicien plutôt qu'historien, on le lui adresserait sans doute en lisant le Chapitre qu'il consacre aux *Conceptions théologiques, animiques et mystiques dans la Mécanique.*

Dès les premières lignes de la préface, l'auteur nous présente son Ouvrage comme un « travail d'explication critique animé d'un esprit *antimétaphysique* ».

Les fondements de la Mécanique et de la Physique théorique doivent être, aujourd'hui, entièrement indépendants de tout système métaphysique, *a fortiori* de tout système théologique; ce principe, que M. E. Mach formule nettement et à plusieurs reprises, nul esprit sensé ne pourrait, croyons-nous, en contester la justesse.

Mais l'adhésion générale des hommes de science à ce principe est un fait tout récent; si nous remontons en arrière, si nous reportons nos regards vers le passé, nous reconnaissons que, pendant de longs siècles, la Mécanique et la Physique ont été liées de la manière la plus étroite à la Métaphysique, à la Théologie, voire aux Sciences occultes; pour ne citer qu'un exemple, on ne saurait comprendre les objections élevées contre le système de Newton par les atomistes et les cartésiens sans remonter jusqu'aux discussions métaphysiques de l'École sur la forme et la matière, sur la qualité et la quantité; et l'idée même d'attraction universelle s'est alimentée des sucs que ses premières racines ont puisés au sein des doctrines astrologiques.

Cette action et cette réaction incessantes des sciences philosophiques et théologiques sur la Mécanique et la Physique doivent être constamment présentes à l'esprit de celui qui prétend ressusciter les manières de penser des créateurs de la Science; s'il les perdait un instant de vue, il serait vite égaré au milieu des discordances et des débats sous lesquels les lois de la philosophie naturelle ont poursuivi leur lente évolution.

Mais, bien souvent, ces lois, parvenues à leur forme définitive, se montrent entièrement sevrées de toutes les idées philosophiques et théologiques au sein desquelles elles ont longtemps puisé les

aliments nécessaires à leur développement; l'adulte ne se souvient plus de la matrice où il a pris naissance.

Ceux donc qui cherchent seulement dans l'histoire de la Science physique une connaissance plus complète de son contenu matériel et concret peuvent, presque toujours, rompre les liens nombreux de cette histoire avec l'histoire des systèmes philosophiques et théologiques. Ces liens, M. Mach n'en a gardé que quelques-uns. Quelques anecdotes nous montrent que plus d'un créateur de la Mécanique avaient une foi religieuse; la liste est arrêtée au XVIIIe siècle, et Euler la termine; les noms d'Ampère et de Cauchy auraient permis de la prolonger jusqu'au XIXe siècle. Nous apprenons également que plusieurs des grands novateurs scientifiques, Képler entre autres, n'avaient pas su s'arracher aux superstitions de leurs contemporains. Les liens entre la Science et les idées philosophiques que M. Mach signale à notre attention sont les plus frêles; ce ne sont pas ceux qui ont, par une traction vigoureuse et prolongée, imprimé à la marche de la Mécanique une direction nouvelle et durable. Il les eût brisés ou négligés que son exposition n'y aurait rien perdu en profondeur et en unité.

6. L'*économie intellectuelle*, qui est, selon le professeur Mach, l'objet essentiel de la Science, atteint son suprême degré dans la forme qu'il donne à la Mécanique; il réduit, en effet, cette science à une proposition unique qui est la suivante :

Deux parties de matière dont les dimensions sont très petites déterminent l'une en l'autre des accélérations qui sont toujours directement opposées l'une à l'autre; les grandeurs de ces deux accélérations sont entre elles dans un rapport qui, pour deux parties données de matière, est absolument fixe.

Il est aisé de voir, cependant, que cet énoncé ne suffit pas à lui seul à constituer la Mécanique; il y faut joindre au moins deux autres propositions, dont la première a déjà sollicité l'attention de l'auteur (p. 213); voici cette première proposition :

Soient A, B, C *trois petites parties de matière; si l'on envisage seul le couple* BC, *les accélérations de* B *et de* C *sont entre elles dans le rapport* α; *si l'on considère le couple* CA,

les accélérations de C *et de* A *sont entre elles dans le rapport* β; *si, enfin, on isole le couple* AB, *les accélérations de* A *et de* B *sont entre elles dans le rapport* γ. *Entre les trois nombres* α, β, γ, *on a la relation*

$$\alpha\beta\gamma = 1.$$

Cette relation seule permet d'attacher à chaque petite partie de la matière un nombre invariable, la *masse* de cette particule, de telle sorte que le rapport des accélérations mutuelles de deux particules soit toujours égal au rapport inverse de leurs masses.

La seconde proposition essentielle à la constitution de la Mécanique est la suivante :

Dans un système formé par un certain nombre de particules matérielles, l'accélération de chacune de ces particules peut être regardée comme la résultante géométrique d'accélérations dont chacune est censée engendrée par l'une des autres particules.

La définition de la masse est ainsi reliée par M. Mach à la loi newtonienne de l'égalité de l'action et de la réaction. Cette définition fut indiquée pour la première fois par l'auteur dans une courte communication intitulée : *Ueber die Definition der Masse*. L'idée était trop neuve; elle fut très froidement accueillie; Poggendorff refusa de l'insérer dans ses *Annales* et elle ne parut qu'un an plus tard dans le *Repertorium der Experimental Physik* de Carl. Aujourd'hui, elle est couramment acceptée par un grand nombre de ceux qui enseignent la Mécanique.

7. Si, selon la méthode proposée par Laplace, systématiquement suivie par Poisson et, après lui, par une foule de mécaniciens, on regarde les corps comme formés de masses très petites isolées les unes des autres, les postulats proposés par M. E. Mach suffisent assurément à écrire les équations générales de la Dynamique. Leur caractère suffisant ne nous semble plus aussi certain ni aussi évident si l'on veut, à l'exemple de Lagrange, traiter les corps comme des milieux continus dont les diverses parties se gênent les unes les autres en leurs divers mouvements et constituent des *liaisons* les unes pour les autres.

M. Mach ne dissimule d'ailleurs pas ses préférences pour la méthode de Laplace et de Poisson, qu'il nomme *méthode de Newton;* on ne saurait nier, en effet, que cette méthode ne se rattache très naturellement aux idées émises par Newton. Voici, par exemple, au sujet de la définition des corps solides, des passages que Laplace et Poisson n'eussent pas désavoués :

« Lorsque le volume occupé par une ou plusieurs des masses m_1, m_2, . . . est trop considérable pour que l'on puisse encore parler d'*une* ligne droite joignant deux d'entre elles, la difficulté de principe n'augmente pas. Il suffit alors de partager la masse plus grande en un nombre très grand de parties très petites et de mener les droites joignant ces particules deux à deux. Dans ce cas, il faudra en outre tenir compte des relations mutuelles qui existent entre les parties d'une même grande masse. Pour des masses solides, cette relation consiste en ce que les parties s'opposent à toute variation de leurs distances mutuelles. Toute variation fait naître une accélération proportionnelle à cette variation, qui tend à augmenter la distance si celle-ci a été diminuée, à la diminuer si elle a été augmentée. Tout déplacement relatif de deux de ces particules met ainsi en jeu les forces connues sous le nom d'*élasticité*...

» Aucun corps de la nature ne se trouve parfaitement au repos; au contraire, sous l'apparence du repos sont toujours cachées de petites trépidations et perturbations produites par de petits excès tantôt d'accélérations élastiques, tantôt d'accélérations graves... Le mouvement d'un corps élastique est un mouvement vermiculaire. Pour les corps durs, le nombre des oscillations est si grand et leurs amplitudes si petites qu'elles restent imperceptibles et qu'on peut les négliger... Une suffisante dureté des corps peut nous faire rester dans l'ignorance de ces oscillations. On donne le nom de *corps solides* à ces corps pour lesquels on peut, *a priori,* faire abstraction des déplacements mutuels des parties. »

Aux raisonnements dont nous venons de citer quelques extraits, M. Mach donne la conclusion que voici :

« On peut se convaincre, par les considérations développées dans ce paragraphe, que les principes de Newton suffisent pour résoudre tout problème mécanique, pourvu que l'on prenne soin

d'entrer assez dans les détails. Il faut alors, pour *élucider* un cas quelconque d'équilibre ou de mouvement, *considérer* toutes les accélérations produites par les réactions mutuelles des masses comme effectivement appliquées à celles-ci. On peut reconnaître ce même grand fait dans les phénomènes les plus variés; il donne aux conceptions physiques, d'une part une unité, une homogénéité et une économie fort grandes et, d'autre part, une fécondité auxquelles, avant Newton, il était impossible de songer.

» La Mécanique n'a pas son but unique en *elle-même*. Elle doit aussi résoudre des problèmes divers, soit pour les besoins de la pratique, soit pour le soutien d'autres sciences. Il y a, en général, avantage à résoudre ces problèmes par d'autres méthodes que celles de Newton. Nous avons déjà dit que ces divers procédés sont, au fond, équivalents, mais il serait fort incommode de vouloir constamment en revenir aux conceptions purement newtòniennes, en dédaignant les avantages que peuvent offrir les autres; il suffit d'avoir acquis la conviction que ce retour est toujours possible. Il convient d'ajouter que les conceptions de Newton sont véritablement *les plus satisfaisantes* et *les plus limpides*. Poinsot prouvait un sens élevé de la clarté et de la simplicité scientifiques en voulant les poser comme *seules* bases de la Science. »

Nous ne souscririons pas entièrement à ces jugements du professeur de Vienne; nous ne croyons pas qu'il y ait toujours équivalence entre la méthode de Lagrange et la méthode que Laplace et Poisson ont tirée des principes de Newton; nous pensons que l'extrême économie intellectuelle qui a présidé à la constitution de cette dernière méthode l'a trop appauvrie pour qu'elle puisse fournir une représentation satisfaisante de tous les phénomènes d'équilibre et de mouvement. Mais nous avons assez insisté ailleurs ([1]) sur ces considérations pour qu'il nous soit permis de les abréger ici.

8. Arrivons maintenant à une difficulté singulière que soulèvent les principes de la Dynamique. Newton avait déjà rencontré

([1]) P. Duhem, *L'évolution de la Mécanique*, 1re Partie, Chap. VIII. Paris, 1903.

cette difficulté; bien d'autres penseurs s'y sont heurtés a près lui; il y a une trentaine d'années, M. Carl Neumann et M. E. Mach ont, de nouveau, attiré sur elle l'attention des philosophes et des physiciens.

En premier lieu, il est bien certain que le *mouvement relatif* de deux corps l'un par rapport à l'autre est le seul mouvement que le physicien puisse observer et sur lequel le géomètre puisse raisonner. L'un et l'autre attribuent un sens précis à cette proposition : les deux corps A et B se meuvent l'un par rapport à l'autre; elle signifie que l'ensemble des deux corps A et B n'a pas même configuration aux divers instants de la durée. Mais que l'on ne songe pas à leur demander si c'est le corps A qui se meut, ou le corps B, ou ces deux corps à la fois; cette question, comme toute question relative au *mouvement absolu* d'un corps, n'a pour eux aucun sens; lorsqu'ils parlent du mouvement d'un corps, ils supposent toujours qu'on a fait choix d'un terme de comparaison, d'un trièdre de référence auquel ce mouvement est rapporté.

En second lieu, il est bien certain que la Mécanique ne peut formuler les lois auxquelles obéissent les mouvements d'un certain nombre de corps si elles se bornent à considérer les mouvements relatifs de ces corps. Cette remarque est évidente si l'on considère la proposition fondamentale de la Dynamique telle que la formule M. E. Mach; selon cette proposition, si l'on isole deux petites parties matérielles déterminées, leurs accélérations sont directement opposées et le rapport de ces accélérations a une valeur invariable. Or, pour qui connaît seulement le mouvement relatif des deux particules considérées, il est impossible de parler de l'accélération de chacune de ces deux particules; ce sont là, pour lui, des mots vides de sens. Les deux particules n'ont d'accélérations que si l'on suppose le mouvement de leur ensemble rapporté à un certain trièdre de référence; mais alors ces accélérations, leurs directions, leur rapport, dépendent essentiellement du trièdre de référence que l'on a choisi. Si la proposition précédente est exacte lorsqu'on fait choix d'un certain trièdre de référence, elle devient fausse, en général, lorsqu'on en prend un autre animé, par rapport au premier, d'un mouvement quelconque.

L'énoncé classique de la loi de l'inertie donnerait lieu à des remarques semblables. Un point matériel isolé, dit cette loi, est

animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Pour le géomètre comme pour le physicien, si un point matériel était seul au monde, il serait absurde de parler de son mouvement; quel repère permettrait de reconnaître ce mouvement? On ne peut parler du mouvement d'un point matériel qu'en concevant en même temps l'existence d'un terme de comparaison à partir duquel on l'observe. Mais alors, si le mouvement de ce point est rectiligne et uniforme lorsqu'on le rapporte à un certain terme, il n'est plus en général rectiligne et uniforme pour qui le rapporte à un autre terme en mouvement relativement au premier.

Ces remarques, que l'on pourrait développer, conduisent toutes à cette conclusion : Les énoncés fondamentaux de la Dynamique supposent que tous les mouvements soient rapportés à un même trièdre de référence; supposés exacts par rapport à un certain trièdre, ils le seront encore par rapport à un second trièdre, si le mouvement relatif de ces deux trièdres est un mouvement de translation uniforme; hors ce cas, ils seront généralement faux, si l'on rapporte les mouvements au second trièdre.

La considération du *temps* nous aurait permis de développer des observations semblables à celles que nous venons de faire touchant le mouvement. Ni le géomètre, ni le physicien ne sauraient traiter d'un *temps absolu,* mais seulement du *temps relatif* à une certaine horloge. Tous les énoncés de la Dynamique supposent qu'une certaine horloge ait été choisie. Vrais pour une certaine horloge, ils ne le seront plus en général pour une autre horloge, à moins que l'heure marquée par celle-ci ne soit une fonction linéaire de l'heure lue sur celle-là.

Tout système mécanique, construit selon les principes que Galilée, Huygens et Newton ont formulés, suppose donc le choix d'un trièdre de référence déterminé et d'une horloge déterminée. A cette proposition on peut joindre cette autre qui n'énonce plus qu'une loi approchée : on peut construire un système mécanique simple, et concordant avec l'expérience, en prenant un trièdre de référence auquel l'ensemble des étoiles fixes demeure lié d'une façon presque invariable et une horloge par rapport à laquelle le mouvement diurne est sensiblement uniforme.

Ceux qui voient seulement dans les théories physiques un symbole mathématique propre à figurer la réalité, mais sans relation

de nature avec cette réalité, se contentent aisément de ce qui vient d'être dit; ils admettent sans peine que, pour construire ce symbole, il faille faire appel à un trièdre de référence purement idéal, à une horloge purement idéale; que rien, dans la réalité, ne corresponde à ce trièdre, à cette horloge, ce n'est point pour les scandaliser.

Il n'en va plus de même de ceux qui veulent voir dans les théories physiques, non pas un symbole, mais une intuition de la réalité; ceux-là exigent que le terme de comparaison auquel la Dynamique rapporte les mouvements, que l'horloge sur laquelle elle lit les temps correspondent, non pas approximativement, mais exactement, à des objets réels.

Les uns veulent que ces objets soient réels, mais ils ne les supposent pas matériels; avec Newton, ils admettent l'existence d'un *temps absolu,* d'un *espace absolu;* sur la nature de ce temps et de cet espace, ils discutent en métaphysiciens; tel Clarke, qui fait du temps absolu et de l'espace absolu les attributs de Dieu.

D'autres, plus positivistes, exigent que le terme auquel la Mécanique rapporte les mouvements ait une existence matérielle. Selon M. Carl Neumann, la forme des équations de la Mécanique postule l'existence d'un certain corps, le *corps absolument fixe* ou *corps* α. L'existence de ce corps découle des théories de la Dynamique et des vérifications qu'elles trouvent dans l'expérience, comme l'existence de l'*éther* résulte du succès de l'Optique ondulatoire. M. Budde, poussant plus loin la même conception, croit que ce *corps* α est un milieu où tous les autres corps sont plongés.

« Je n'ai rien à objecter à la manière de voir de Budde, dit M. Mach, mais je pense que les propriétés de ce milieu peuvent être découvertes par un procédé physique quelconque et ne doivent pas être acceptées *ad hoc*. Des propriétés d'un tel milieu nous n'avons aujourd'hui aucune notion suffisante, non plus que des conditions de mouvement des corps qui s'y trouvent plongés. »

9. La Dynamique tout entière est condensée en un très petit nombre de propositions; si cette Dynamique rendait compte de tous les phénomènes que nous présente le monde de la matière,

l'*économie* de la pensée scientifique aurait atteint son plus haut degré.

Cette *explication mécanique* de tous les phénomènes physiques fut longtemps regardée comme l'objet propre de la Science; M. Mach n'hésite pas à regarder comme erronée cette conception de la Physique :

« Quand nous voyons, dit-il, les encyclopédistes du XVIIIe siècle se croire tout proche du but, qui était l'explication physico-mécanique de la nature entière, et Laplace imaginer un génie qui pourrait donner l'état de l'univers à un instant quelconque de l'avenir, s'il connaissait, à un instant initial, toutes les masses qui le composent, avec leurs positions et leurs vitesses, non seulement cette surestimation enthousiaste de la portée des conceptions physiques et mécaniques acquises dans le XVIIIe siècle nous semble bien excusable, mais elle est vraiment pour nous un spectacle réconfortant, noble et élevé, et nous pouvons sympathiser du fond de notre cœur avec cette joie intellectuelle unique dans l'histoire.

» Maintenant qu'un siècle s'est écoulé, et que nous sommes devenus plus réfléchis, cette conception du monde des encyclopédistes nous apparaît comme une *mythologie mécanique* en opposition avec la *mythologie animique* des anciennes religions. »

Le professeur de Vienne reprend ailleurs la même idée; en condamnant les excès du mécanisme, il définit la méthode selon laquelle la Physique doit progresser désormais. Qu'il nous soit permis de citer en entier les deux pages par lesquelles s'ouvre le Chapitre consacré aux *Rapports de la Mécanique et de la Physique;* les pensées qui y sont exprimées nous semblent justes et fortes :

« Il n'existe pas de phénomènes purement mécaniques. Quand deux masses se communiquent des accélérations réciproques, il semble que là, tout au moins, il y ait un pur phénomène de mouvement. Mais à ce mouvement sont, dans la réalité, toujours liées des variations thermiques, magnétiques et électriques qui, dans la mesure où elles se produisent, modifient le phénomène. Inversement, des circonstances thermiques, magnétiques, électriques

et chimiques peuvent déterminer un mouvement. Les phénomènes purement mécaniques sont donc des abstractions, intentionnelles ou forcées, dont le but est une plus grande facilité de l'examen. Il en est de même de toutes les autres catégories de phénomènes physiques. En toute rigueur, tout phénomène appartient à toutes les branches de la Physique, qui n'ont été distinguées l'une de l'autre que pour des raisons conventionnelles, physiologiques ou historiques.

» L'opinion qui fait de la Mécanique la base fondamentale de toutes les autres branches de la Physique, et suivant laquelle tous les phénomènes physiques doivent recevoir une explication *mécanique* est, selon nous, un préjugé. La connaissance la plus ancienne au point de vue historique ne doit pas *rester* la base de la compréhension des faits découverts plus tard. Dans la mesure où un plus grand nombre de phénomènes sont connus et catégorisés, des conceptions directrices entièrement nouvelles peuvent surgir et s'instaurer. Aujourd'hui, il nous est encore impossible de savoir quels sont les phénomènes physiques qui pénètrent *le plus au fond* des choses, ou de savoir si le phénomène mécanique n'est pas précisément le plus superficiel de tous, ou si tous ne sont pas d'une *égale pénétration*. En Mécanique même, on ne considère plus la loi la plus ancienne, celle du levier, comme la base de toutes les autres.

» La conception mécanique de la Nature nous apparaît comme une hypothèse fort explicable historiquement, excusable et peut-être fort utile pour un temps, mais, somme toute, artificielle. Pour rester fidèles à la méthode qui a conduit les chercheurs les plus illustres, Galilée, Newton, Sadi-Carnot, Faraday, J.-R. Mayer, à leurs grandes découvertes, nous devons limiter notre science physique à l'expression des *faits observables*, sans construire des hypothèses *derrière* ces faits, où plus rien n'existe qui puisse être conçu ou prouvé. Nous avons donc simplement à découvrir les dépendances réelles des mouvements de masses, des variations de température, des changements de valeur de la fonction potentielle, des changements d'état chimique, sans nous rien imaginer d'autre sous ces éléments qui sont les caractéristiques physiques directement ou indirectement données par l'observation. »

10. Cette méthode, M. Mach l'a appliquée, en divers Ouvrages, aux phénomènes thermiques [1]; dès 1872, il a donné, touchant l'usage qu'on en pouvait faire en l'étude des phénomènes électriques, quelques indications reproduites au présent Ouvrage; fort justement, l'auteur remarque que la méthode préconisée par lui est celle que Cohn et que M. Hertz ont employée en des Mémoires célèbres; il convient seulement d'observer que M. Mach se bornait à traiter des phénomènes électrostatiques, tandis que ses successeurs ont groupé dans une même théorie ces phénomènes et les effets électromagnétiques.

La Thermodynamique, telle que l'ont conçue Kirchhoff et M. Mach, la Science électrique, telle que la construisent Hertz et Cohn, sont bâties sur un plan semblable à celui que M. Mach impose à la Mécanique. Au début, un petit nombre d'hypothèses ou d'équations sont *postulées* d'emblée dans toute leur généralité; ainsi, à la base de la Thermodynamique, on pose le principe de la conservation de l'énergie et le principe de Carnot-Clausius; à la base de l'Électricité, on inscrit les six équations de Maxwell et l'expression de l'énergie électrique. L'Analyse mathématique tire alors des principes posés une foule de conséquences. Ces conséquences, enfin, sont comparées aux faits d'expérience; la concordance entre ceux-ci et celles-là est la preuve que la théorie est bonne.

Si satisfaisantes que soient les théories ainsi construites, elles présentent un défaut qui ne leur permet pas de satisfaire entièrement le penseur. Elles sont *isolées* les unes des autres. Chacune d'elles, issue de principes autonomes, forme un Chapitre à part, sans lien avec les autres Chapitres dont l'ensemble constitue la Physique.

Ce morcellement de la Science physique ne saurait contenter un philosophe convaincu que « tout phénomène appartient à la fois à toutes les branches de la Physique ». Aussi le professeur de Vienne recommande-t-il de chercher les liens d'*analogie* qui peuvent exister entre les diverses parties de la Physique : « Il est fort utile de comparer entre eux les concepts directeurs dans les divers domaines de la connaissance scientifique ».

---

[1] E. Mach, *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes der Erhaltung der Arbeit*. Prague, 1872. — *Principien der Wärmelehre*. Leipzig, 1896.

Cette recherche même de l'analogie entre les divers Chapitres de la théorie ne lui apparaît pas comme le but dernier à atteindre, mais comme un acheminement vers un idéal plus élevé :

« La poursuite de ces analogies et de ces dissemblances conduit à une *Physique comparée* qui permettra un jour l'expression synthétique de très vastes domaines de faits, sans additions *arbitraires*. On en arrivera alors à une Physique homogène, sans faire appel à l'artifice des théories atomiques. »

L'*économie de la pensée*, dans laquelle M. Mach voit le but logique de la Science, nous presse, en effet, de substituer à l'ancienne Mécanique une science dont les principes, de plus en plus généraux, nous donnent la représentation résumée d'un ensemble de faits de plus en plus vaste. Depuis quelques années, nous voyons se multiplier les tentatives qui ont pour objet l'édification d'une telle *Énergétique*.

Ces tentatives, M. Mach reproche à Hertz de les avoir « traitées beaucoup plus méchamment qu'il ne convient »; il en parle lui-même avec faveur; et, bien qu'il ne se soit pas efforcé de nous donner un projet d'Énergétique, nous pouvons le compter au nombre des précurseurs et des promoteurs de cette doctrine nouvelle : elle est, en effet, l'aboutissant naturel des principes qu'il a posés.

11. M. Mach est un adversaire résolu de la philosophie qui prétend réduire tous les phénomènes du monde matériel au mouvement, de cette philosophie dont Descartes a été le législateur. La réaction qu'il propose contre la philosophie cartésienne va, du reste, plus loin. Entre le *monde de la matière*, dont l'essence est l'*étendue* et le *monde des esprits*, dont l'essence est la *pensée*, la philosophie cartésienne avait tracé un fossé profond comme un abîme; ce fossé, M. Mach entrevoit le temps où il sera comblé :

« Une recherche physique plus circonspecte conduira à l'analyse des sensations. Nous reconnaîtrons alors (et nous commençons actuellement à le faire), que notre sensation de la faim n'est pas essentiellement différente de la tendance de l'acide sulfurique vers le zinc, et que notre volonté n'est pas si différente de la pres-

sion de la pierre sur son support. Nous nous retrouverons ainsi plus près de la nature sans qu'il y ait besoin de nous résoudre en une incompréhensible nébuleuse de molécules, ou de faire de l'univers un système de groupements d'esprits. On ne peut naturellement que conjecturer la *direction* dans laquelle on peut s'attendre à ce qu'une recherche longue et pleine de fatigue conduise vers la lumière. Ce serait faire de la mythologie et non de la science que de vouloir *anticiper* sur le résultat ou essayer de l'introduire, si peu que ce soit, dans les recherches scientifiques actuelles. »

Le passage que nous venons de citer eût été favorablement accueilli par Leibniz ; car, selon lui, les phénomènes que nous présentent les corps « ne consistent pas seulement dans l'étendue et son changement tout nud », mais « il faut nécessairement y reconnaître quelque chose qui aye du rapport aux âmes ». Ce passage eût été, surtout, salué par les anciens scolastiques comme un retour à leurs doctrines préférées ; pour eux, en effet, comme pour M. Mach, la force qui entraîne le fer vers l'aimant, *altération* engendrée par la présence de l'aimant en la *forme substantielle* du fer, n'était pas essentiellement différente de la sympathie ou de l'appétit qui nous sollicite vers une personne ou une chose, car cette passion n'est qu'une *altération* engendrée par la présence de l'objet dans l'âme, *forme substantielle* de l'homme.

M. Mach subit donc, comme tant d'autres, la poussée de ce grand courant qui fait dériver la pensée scientifique vers des doctrines que l'on croyait naguère abandonnées sans retour.

Arrêtons cette analyse, trop longue pour ce *Bulletin*, trop courte pour embrasser les pensées, amples et multiples, que suggère la lecture du livre de M. Mach. Ce livre a été écrit pour empêcher la Mécanique de dégénérer en une suite de formules exactes et précises, mais sèches et stériles. Dans l'enseignement français, pour des causes qu'il est inutile d'énumérer, car tout le monde les connaît, la Mécanique, peu à peu vidée de tout contenu réel, se trouve réduite à une forme rigide, mais morte ; dans l'In-

troduction qu'il a écrite pour le présent Ouvrage, M. E. Picard n'hésite pas à qualifier la Dynamique enseignée aujourd'hui de « Science hiératique et figée ». Que les maîtres et les étudiants lisent et méditent la *Mécanique* du professeur Mach; ils y trouveront les principes de résurrection qui, sur les ossements desséchés de ce squelette, feront renaître la chair, vivante et palpitante.

P. Duhem.

MÉLANGES.

SUR LES THÉORÈMES DE JACOBI ET LIOUVILLE;

Par M. N. Saltykow.

1. Il s'agit, dans la Note qui va suivre, des deux théorèmes classiques concernant l'intégrale générale des équations canoniques

$$(1)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

H représentant une fonction quelconque des variables t, q_1, $q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pour former l'intégrale générale du système (1), Jacobi considère une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles corrélative

$$(2)\qquad p + H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

les variables $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ y désignant les dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction z par rapport aux variables $t, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Quant à Liouville, il part d'un système des n intégrales en involution des équations canoniques (1). Or ces deux points de départ différents n'introduisent pourtant aucune distinction essentielle dans la théorie étudiée.

Soit, en effet, l'intégrale complète de l'équation (2)

$$(3) \qquad z = V(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) + b,$$

$b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ étant $n+1$ constantes arbitraires et le déterminant fonctionnel

$$(4) \qquad D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_n}\right)$$

ne s'annulant pas. Les équations

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

étant résolubles par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *définissent n intégrales en involution du système canonique* (1)

$$(5) \quad F_i(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc le cas de Jacobi se réduit à celui de Liouville. Inversement, comme il est bien connu, on obtient par une quadrature l'intégrale complète de l'équation (2), moyennant les n intégrales en involution du système (1) résolubles par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Par conséquent, les deux théorèmes étudiés sont au fond identiques, car l'intégrale complète (3) et les intégrales (5) résolubles par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, constituent des éléments équivalents au point de vue d'intégration des équations (1). Or, de plus, Liouville étudie encore un second cas, en introduisant une nouvelle hypothèse relative à la résolution des intégrales données du système (1); mais ce dernier se ramène d'ailleurs au premier théorème par une transformation des équations (*voir* ma Note dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 17 août 1903).

Les démonstrations bien connues des théorèmes en question consistent à faire voir que les formules données *a priori* représentent précisément les équations intégrales requises. Or nous nous proposons de modifier, dans les lignes suivantes, ce mode de démonstration, en cherchant à calculer les intégrales demandées, sans savoir leur forme *a priori*. Il est aisé de donner plusieurs démonstrations de ce genre. Certes la plus simple est celle que

M. G. Darboux a appliquée aux équations différentielles de la Dynamique dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (IIe Partie, p. 480).

2. En effet, comme on vient de le voir, la connaissance de l'intégrale complète (3) entraîne celle des n intégrales (5) du système (1), résolubles par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Il suffit alors, pour achever l'intégration du système (1), de former de ses n premières équations n relations intégrables, moyennant les intégrales connues (5). On y parvient aisément, en vertu des identités que l'on obtient, en différentiant l'identité

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

par rapport aux quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k\, \partial b_s} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Moyennant les équations à intégrer, ces dernières identités nous donnent n équations suivantes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s\, \partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s\, \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les premiers membres sont des dérivées exactes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial b_s}\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc les équations intégrales requises deviennent

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant n constantes arbitraires. Il va sans dire que les équations obtenues sont distinctes, car, étant indépendantes des $p_1, p_2, \ldots, p_n$, elles sont de plus résolubles par rapport aux variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$, en vertu de l'hypothèse faite sur le déterminant (4).

3. Nous allons à présent exposer encore une autre démonstra-

tion s'appliquant sans distinction dans les deux cas étudiés par Liouville. Précisons d'abord les propriétés caractéristiques des intégrales cherchées. Remarquons, en premier lieu, comme les fonctions

$$(6) \qquad p + \mathrm{H}, \quad \mathrm{F}_1, \quad \mathrm{F}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{F}_n$$

sont en involution, que les $n+1$ équations aux dérivées partielles de la fonction f

$$(p + \mathrm{H}, f) = 0,$$
$$(\mathrm{F}_i, f) = \begin{cases} 0 & (i = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

forment un système intégrable. On en conclut qu'*il existe n intégrales du système* (1)

$$f_s(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

dont chacune est conjuguée avec l'une des intégrales distinctes (5) *et en involution avec toutes les autres.*

Ce point établi, il est aisé de résoudre notre problème en remarquant que toute fonction f_s est définie par les équations

$$(7) \qquad \begin{cases} (p + \mathrm{H}, f_s) = 0, \\ (\mathrm{F}_i, f_s) = \begin{cases} 0 & (i = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n, \\ 1 & (i = s). \end{cases} \end{cases}$$

Supposons d'abord que les intégrales (5) sont résolubles par rapport aux $p_1, p_2, \ldots, p_n$, le déterminant fonctionnel

$$(8) \qquad \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n}{p_1, p_2, \ldots, p_n}\right)$$

étant distinct de zéro. Transformons ensuite le système (7), en introduisant, au lieu des $p_1, p_2, \ldots, p_n$, comme nouvelles variables, les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$. En désignant par θ_s la fonction transformée f_s, le système (7) devient, en vertu des propriétés des fonctions (6),

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

D'autre part, les valeurs des variables $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$, en fonctions des quantités

$$t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n,$$

définies par les équations (1) et (5), les vérifient identiquement et l'on obtient, en différentiant ces dernières identités par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_n$, les identités nouvelles

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

Nous avons donc, en retranchant ces dernières égalités des précédentes,

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour toutes les valeurs des indices s de 1 à n. Moyennant l'hypothèse faite sur le déterminant (8), il en résulte

$$(9) \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

pour tous les s de 1 à n. Comme les valeurs $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ définies par les équations (1), (5) satisfont deux à deux à toutes les identités de la forme

$$\frac{\partial p_r}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_r},$$

on obtient, en différentiant ces dernières par rapport à $b_1, b_2, \ldots, b_n$, de nouvelles égalités démontrant que le système (9) est complètement intégrable. Donc les fonctions θ_s sont définies, à des

constantes arbitraires près, par les quadratures suivantes

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dq_1 + \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial b_s} dq_n \right)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces dernières formules deviennent, si l'on revient à l'intégrale complète (3),

$$\theta_s = \frac{\partial V}{\partial b_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Par conséquent, pour avoir les fonctions f_s, il reste à effectuer la transformation inverse des variables, en remplaçant les b_1, b_2, ..., b_n par leurs valeurs F_1, F_2, ..., F_n.

4. La démonstration exposée s'applique au cas mentionné de Liouville. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que les équations (5) sont résolubles par rapport aux variables p_1, p_2, ..., p_{n-m}, q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, ..., q_n, le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_{n-m}, F_{n-m+1}, \ldots, F_n}{p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}, q_{n-m+1}, \ldots, q_n}\right)$$

ne s'annulant pas. En introduisant b_1, b_2, ..., b_n comme nouvelles variables, au lieu des p_1, p_2, ..., p_{n-m}, q_{n-m+1}, ..., q_n, les équations (7) deviennent

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial q_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial q_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_{n-m+r}} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

D'autre part, on a les identités suivantes

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} - \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial q_{n-m+r}} \frac{\partial q_{n-m+r}}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial q_{n-m+r}} \frac{\partial q_{n-m+r}}{\partial b_s} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

Il en résulte les égalités

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right)$$
$$- \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial q_{n-m+r}}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial q_{n-m+r}}{\partial b_s}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s}\right) - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial q_{n-m+r}}\left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} - \frac{\partial q_{n-m+r}}{\partial b_s}\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour toutes les valeurs des s de 1 à n. On a donc les équations

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \qquad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = -\frac{\partial q_{n-m+r}}{\partial b_s}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-m, \; r = 1, 2, \ldots, m),$$

pour toutes les significations de l'indice s de 1 à n. Comme les intégrales (5) restent en involution, de même, quand on répartit les variables en deux *classes canoniques* correspondant à chacune des deux lignes suivantes

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_{n-m}, \quad -p_{n-m+1}, \quad -p_{n-m+2}, \quad \ldots, \quad -p_n,$$
$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_{n-m}, \quad q_{n-m+1}, \quad q_{n-m+2}, \quad \ldots, \quad q_n,$$

il en résulte que les équations dernièrement écrites forment un système complètement intégrable, et l'on en tire par des quadratures, à des constantes arbitraires près,

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dq_1 + \ldots + \frac{\partial p_{n-m}}{\partial b_s} dq_{n-m}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial q_{n-m+1}}{\partial b_s} dp_{n-m+1} - \frac{\partial q_n}{\partial b_s} dp_n\right)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

En d'autres termes, si l'intégrale de la différentielle exacte

$$dz = p\,dt + p_1\,dq_1 + \ldots + p_{n-m}\,dq_{n-m} - q_{n-m+1}\,dp_{n-m+1} - \ldots - q_n\,dp_n$$

est représentée par l'équation

$$z = U(t, q_1, q_2, \ldots, q_{n-m}, p_{n-m+1}, \ldots, p_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, -b),$$

b désignant une constante arbitraire, on a les formules

$$\theta_s = \frac{\partial U}{\partial b_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et les équations intégrales requises deviennent

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} = a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant n constantes arbitraires.

Considérons, par exemple, le système canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et l'équation aux dérivées partielles corrélative

$$p + H = 0,$$

en y désignant

$$H = \frac{q_2 q_3 - q_1}{t} p_1 + \frac{q_1 q_3}{t} \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{q_3^2}{t} \frac{p_1 p_3}{p_2}.$$

Notre système admet trois intégrales en involution

$$\frac{t p_2}{p_1} = b_1, \qquad t\left(1 - \frac{p_2}{q_3 p_1}\right) = b_2, \qquad \frac{t p_2^2}{q_3 p_1} = b_3,$$

et l'on obtient

$$p = \frac{b_1^2 p_3 - b_3(b_1 q_2 + b_2 q_1)}{b_1(t - b_2)^2},$$

$$p_1 = \frac{b_3 t}{b_1(t - b_2)}, \qquad p_2 = \frac{b_3}{t - b_2}, \qquad q_3 = \frac{b_1}{t - b_2},$$

$$U = \frac{b_3(b_1 q_2 + t q_1) - b_1^2 p_3}{b_1(t - b_2)} + b.$$

Par conséquent, les formules

$$\frac{\partial U}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial b_2} = a_2, \qquad \frac{\partial U}{\partial b_3} = a_3$$

fournissent les intégrales cherchées

$$-(q_1 p_1 + q_3 p_3)\frac{p_1}{t p_2} = a_1,$$

$$(q_1 p_1 + q_2 p_2 - q_3 p_3)\frac{q_3 p_1}{t p_2} = a_2,$$

$$(q_1 p_1 + q_2 p_2)\frac{q_3 p_1}{t p_2^2} = a_3.$$

Si l'on prend pour point de départ les deux premières intégrales données et la dernière de celles qui viennent d'être trouvées, formant de même trois intégrales en involution résolubles par rapport à p_1, q_2, q_3, on a

$$U' = \left(\frac{1}{b_1} t q_1 - a_3 t - b_2 a_3\right) p_2 - \frac{b_1 p_3}{t - b_2}.$$

Alors les formules

$$\frac{\partial U'}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial U'}{\partial b_2} = a_2, \qquad \frac{\partial U'}{\partial a_3} = b;$$

définissent les trois autres intégrales qui sont précisément celles que l'on connaît déjà.

5. La démonstration dernièrement exposée gagne plus de simplicité, à cause de symétrie des calculs, si l'on part d'une équation aux dérivées partielles la plus générale

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

et du système généralisé des équations canoniques correspondant

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dq_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial F}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial F}{\partial q_n}}.$$

Effectivement, soient les n intégrales en involution du dernier système

$$F_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

F_0 et b_0 désignant conditionnellement F et b, les valeurs b, b_1, b_2, ..., b_{n-1} étant n constantes arbitraires. Les équations définissant les $n-1$ intégrales requises deviennent

$$(F_i, f_s) = \begin{cases} 0 & (i = 0, 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, n-1), \\ 1 & (i = s), \end{cases}$$

pour tous les s de 1 à $n-1$. En supposant

$$D\left(\frac{F, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}}{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n}\right) \neq 0,$$

introduisons b, b_1, b_2, ..., b_{n-1} comme nouvelles variables, au lieu des p_1, p_2, ..., p_n. On arrive aisément à deux séries des

égalités suivantes

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0 & (i \neq s), \\ 1 & (i = s). \end{cases}$$

Leur différence nous donne les équations

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

pour toutes les valeurs s de 1 à $n-1$. Moyennant l'inégalité précédente, il en résulte les équations requises

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; s = 1, 2, \ldots, n-1).$$

6. Il va sans dire que toutes les considérations que nous venons de développer dans cette Note s'appliquent à la démonstration des théorèmes analogues traités dans les Œuvres de Jacobi, ainsi qu'à leur généralisation sur les systèmes des équations simultanées que j'ai étudiées dans mon Mémoire *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. C. Jordan).

De plus, les mêmes méthodes conduisent à une démonstration des théorèmes indiqués dans ma Note *Sur le problème de S. Lie* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 août 1903).

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BAIRE (R.). — Sur les fonctions de variables réelles. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris [1]. In-4°, 122 pages. Milan, Rebeschini; 1899.

Le beau travail de M. Baire, dédié à MM. Dini et Volterra, qui avaient accueilli l'auteur avec une extrême bienveillance pendant le séjour qu'il a fait en Italie en 1898, a été une importante contribution à la théorie des fonctions. Le résultat si simple et si précis qu'il a obtenu relativement aux fonctions développables en séries de polynomes, les remarques subtiles et profondes qu'il a faites sur les fonctions qui satisfont à certaines équations aux dérivées partielles, ont frappé tous les mathématiciens. Les problèmes qui l'ont conduit à ces résultats, les notions qu'il a été amené à introduire ont d'ailleurs un intérêt propre, et c'est par leur examen qu'il convient de commencer.

Voici, tout d'abord, une distinction en deux catégories des ensembles linéaires de points : un tel ensemble sera dit de la *première* ou de la *seconde catégorie* suivant qu'il peut, ou non, être obtenu par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles linéaires, dont chacun est non dense dans tout intervalle. Cette distinction s'étend d'ailleurs en se rappelant qu'un intervalle est un ensemble parfait, et en observant que, si l'on se donne un ensemble parfait e_1, on peut définir les ensembles e, contenus dans e_1, qui sont denses ou non denses par rapport à e_1; e sera dense par rapport à e_1, dans une certaine portion de droite, si son dérivé contient tous les points de e_1 qui appartiennent à cette portion de droite; si cette condition ne se trouve vérifiée pour aucun segment de droite, l'ensemble e sera non dense par rapport à e_1. Dès lors on peut définir les ensembles de première ou de seconde catégorie par rapport à un ensemble parfait donné. Un

[1] La thèse de M. Baire a été soutenue le 24 mars 1899; elle a paru en 1900 dans les *Annali di Matematica*.

ensemble parfait, un intervalle par exemple, est de seconde catégorie par rapport à lui-même. Les ensembles dénombrables, les ensembles non denses sont de la première catégorie.

Voici maintenant des définitions qui se rapportent à la théorie des fonctions : que le lecteur veuille bien se reporter aux définitions classiques de la borne supérieure, de la borne inférieure et de l'oscillation d'une fonction définie dans un ensemble e. Il est clair que ces définitions peuvent être présentées comme il suit :

Soient M un nombre quelconque et E l'ensemble (contenu dans e) des valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) > M$; soit, en désignant par ε un nombre positif quelconque, E_1 l'ensemble (contenu dans e) des valeurs de x pour lesquelles on a

$$f(x) > M - \varepsilon.$$

M sera la borne supérieure de $f(x)$, dans l'ensemble e, s'il n'y a pas de points dans E et s'il y en a toujours dans E_1, quel que soit le nombre positif ε : or il est clair qu'on pourra parvenir à d'autres nombres, analogues à cette borne supérieure, en imposant aux ensembles E, E_1 d'autres conditions (n° 68) : par exemple, on parviendra à un nombre M_1, en imposant à E la condition d'être dénombrable, et à E_1 la condition de ne pas être dénombrable, quel que soit ε; à un nombre M_2, en imposant à E la condition d'être de première catégorie et à E_1 la condition d'être de seconde catégorie. M_1 et M_2 sont en quelque sorte les bornes supérieures de la fonction, quand on néglige soit les ensembles dénombrables, soit les ensembles de première catégorie.

Des considérations toutes pareilles s'appliquent à la borne inférieure, susceptible de trois significations m, m_1, m_2 qui correspondent aux nombres M, M_1, M_2; il en résulte trois significations ω, ω_1, ω_2 pour l'oscillation de la fonction : de là on passe naturellement aux trois significations du maximum, du minimum ou de l'oscillation en un point x; la notation

$$[M(x), m(x), \omega(x)]$$

concernera le sens classique de ces mots; la notation

$$[M_1(x), m_1(x), \omega_1(x)]$$

se rapportera au cas où l'on néglige les ensembles dénombrables,

enfin la notation

$$[M_2(x), m_2(x), \omega_2(x)]$$

au cas où l'on néglige les ensembles de première catégorie. Si l'on a $\omega(x) = 0$, la fonction est continue au point x; si les points x, pour lesquels on a

$$\omega(x) = 0,$$

forment un ensemble dense partout dans e, la fonction, conformément à l'usage adopté par les géomètres italiens, est dite *ponctuellement discontinue* dans e; la continuité au point x_0 implique les égalités

$$f(x_0) = M(x_0) = m(x_0).$$

Si l'on a seulement $f(x_0) = M(x_0)$, la fonction (x) est dite *semi-continue supérieurement* pour $x = x_0$; si l'on avait seulement $f(x_0) = m(x_0)$, elle serait dite de même *semi-continue inférieurement* pour $x = x_0$. Ces définitions, qui avaient été entrevues par P. du Bois-Reymond, jouent un rôle essentiel dans les recherches de M. Baire : les fonctions $M(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $\omega(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ sont semi-continues supérieurement; les fonctions $m(x)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$ sont semi-continues inférieurement. L'étude que l'auteur a faite des fonctions qui jouissent de la semi-continuité supérieure ou inférieure trouve donc ici son application. Au reste, il y a là un mode de raisonnement que M. Baire a systématiquement employé non seulement dans sa thèse, mais dans diverses communications ultérieures.

Je passe aux trois questions, se ramenant d'ailleurs l'une à l'autre, dont l'étude constitue le Chapitre II.

On sait qu'une fonction de x, y peut être continue séparément par rapport à la variable x, ou par rapport à la variable y sans être une fonction continue par rapport à l'ensemble (x, y) : tel est le cas pour la fonction $\frac{xy}{x^2+y^2}$, si on lui attribue la valeur 0 pour $x = 0$, $y = 0$. A quelles conditions la fonction $f(x, y)$ est-elle assujettie si l'on sait seulement de la fonction $f(x, y)$ qu'elle est continue, tant par rapport à x que par rapport à y? C'est la question I.

Une fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à l'ensemble (x, y) pour tous les points intérieurs à un contour fermé C;

pour les points de (C) on suppose seulement la continuité le long de la normale. Quelle est la nature de la fonction $f(x,y)$ sur le contour (C)? C'est la question II. Elle équivaut à la suivante : quelles sont les fonctions qui sont développables en séries de fonctions continues?

M. Baire montre que les fonctions $f(x,x)$ de la première question, les fonctions $f(x,y)$ sur le contour (C) de la seconde question, fonctions qui dépendent évidemment d'une seule variable, sont des fonctions ponctuellement discontinues par rapport à tout ensemble parfait; réciproquement, une fonction ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait peut être obtenue comme une fonction $f(x,y)$ de la première question ou comme une fonction $f(x,y)$ sur le contour C de la seconde question.

Ultérieurement [1], M. Baire a repris les raisonnements qui l'avaient conduit à ces résultats, et les a modifiés profondément de manière à les rendre applicables à l'étude des fonctions de plusieurs variables : la condition nécessaire et suffisante reste la même, ainsi que M. Lebesgue [2] l'avait reconnu de son côté. M. Lebesgue, qui avait fait une étude approfondie du Mémoire de M. Baire, et qui m'a entretenu à diverses reprises de ses recherches sur ce sujet, m'a dit qu'il était parvenu à reconnaître simplement, *a priori*, l'identité des fonctions qui répondent aux questions I et II.

Quoi qu'il en soit, ces fonctions sont dites *de classe* 1, les fonctions continues étant regardées comme étant de la classe 0. Les fonctions dérivées qui ne sont pas continues sont de la classe 1. Les fonctions de la classe 1 sont représentables par une série de fonctions de la classe 0. Une série convergente, dont les termes sont de la classe 1, et dont la somme n'est pas elle-même une fonction de la classe 1, est, par définition, une fonction de la classe 2. Telle est la fonction, imaginée par Lejeune-Dirichlet, qui est égale à 0 ou à 1, suivant que x est rationnel, ou non. On conçoit ainsi la formation d'une échelle de classes, dont chacune correspondrait à un nombre entier, ou même à un nombre trans-

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, 1900.
(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1899.

fini : toutefois l'existence effective de fonctions appartenant à ces diverses classes n'est nullement démontrée : dans sa thèse, M. Baire n'a pu donner d'exemples au delà de la classe 2. Depuis, d'après une communication orale de M. Baire à M. Lebesgue, M. Volterra aurait formé un exemple d'une fonction de la classe 3, et M. Baire aurait obtenu un procédé général pour la formation de telles fonctions : mais l'existence de fonctions de classe 4 reste entièrement douteuse.

Pour ce qui est des fonctions de classe 2, M. Baire montra dans sa thèse que, si l'on considère une telle fonction sur un ensemble parfait quelconque G, il existe des point de G où l'oscillation de la fonction sur G est nulle, l'oscillation étant déterminée, comme on l'a expliqué plus haut, en négligeant les ensembles de première catégorie par rapport à G.

Signalons dans le Chapitre IV le résultat suivant auquel M. Volterra était parvenu de son côté, mais sans l'avoir publié : les fonctions de deux ou trois variables continues seulement par rapport à chacune d'elles sont ponctuellement discontinues par rapport à l'ensemble des variables.

Le dernier Chapitre traite d'un problème fort curieux. Le changement de variables, tel qu'on le fait d'habitude, suppose essentiellement la continuité des dérivées : en gardant cette supposition, il est certain qu'il n'y a pas d'autres fonctions que celles de la forme $\varphi(x-y)$ qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

Cette conclusion subsiste-t-elle quand on ne suppose rien de plus que ce qui est nécessaire pour que cette équation ait un sens? La réponse, en général, est douteuse : elle est toutefois affirmative si l'on suppose que la fonction f est continue par rapport au couple de variables x, y. Notons, en passant, la notion de fonction *ponctuellement variable* (n° 98), analogue à la fonction ponctuellement discontinue, que l'auteur est amené à introduire dans ses recherches sur ce sujet. Ces recherches sont étendues à l'équation

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

L'auteur termine en donnant un exemple de fonction non

continue par rapport à l'ensemble des trois variables x, y, z qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Cette fonction reste constante sur les parallèles à la droite définie par les équations $x = y = z$. J. T.

ZEUTHEN (H.-G.). — FORELOESNINGER OVER MATHEMATIKENS HISTORIE, II. 16de OG 17de AARHUNDREDE. In-8°, VI-612 pages. Copenhague, Höst et Sön, 1903.

ZEUTHEN (H.-G.). — GESCHICHTE DER MATHEMATIK IM XVI. UND XVII. JAHRHUNDERT. Gr. in-8°, VI-434 pages. Leipzig, B.-G. Teubner, 1903.

Ce Livre, qui vient de paraître à la fois en danois et en allemand, fait suite à l'*Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge* que le même auteur a publiée en danois (1893), allemand (1895) et français (1902) (*Bulletin*, mai 1896, p. 105-108; novembre 1902, p. 313-319). De même que dans le Volume précédent, l'auteur s'est efforcé avant tout de démêler l'évolution successive des différentes idées et méthodes, d'en illustrer l'apparence et la portée à leurs différents degrés de développement et d'élucider la connexion des différents fils entre eux. Afin de pouvoir s'abandonner à ce but dans la partie principale du Livre, et en même temps renvoyer aux rapports personnels des différents auteurs, on y a fait précéder un aperçu historique et biographique.

Le plan ressort du reste de la Table des Matières que voici :

I. *Aperçu historique et biographique.*

II. *L'analyse des quantités finies.* — 1. La résolution algébrique des équations du troisième et du quatrième degré. 2. Les symboles algébriques. 3. La théorie générale des équations algébriques. 4. La Trigonométrie et sa combinaison avec l'Algèbre. 5. Calculs numériques avant les logarithmes. 6. L'invention et le calcul des logarithmes. 7. La théorie des nombres, équations indéterminées et fractions continues avant Fermat. 8. Les théorèmes de Fermat sur les nombres entiers. 9. Coefficients binomiaux, com-

binaisons et calcul de probabilité. 10. Géométrie, applications de la projection centrale. 11. Travaux de Fermat appartenant à l'Algèbre et à la Géométrie analytique; coordonnées. 12. La *Géométrie* de Descartes. 13. L'analyse des quantités finies après Descartes.

III. *L'origine et le premier développement du Calcul infinitésimal.* — 1. La Mécanique au commencement des temps modernes. 2. Intégration avant le Calcul intégral : *a*. Kepler; *b*. Cavalieri, Torricelli et Grégoire de Saint-Vincent : *c*. Fermat, Pascal; *d*. Wallis; *e*. Applications, rectification, centres d'oscillation. 3. Approximations infinies, séries. 4. Problèmes qu'on résout à présent par des différentiations : *a*. Méthode de Torricelli et de Roberval, détermination de tangentes faites d'une manière semblable par Descartes; *b*. Méthodes de Descartes et Hudde; *c*. Méthode de Fermat, règles de Huygens et de Delluse. 5. La cycloïde, les applications mécaniques qu'en fait Huygens, développées. 6. Méthode inverse des tangentes; théorème sur l'inversion de Barrow. 7. Relations entre Barrow et Newton, l'application que fait celui-ci du théorème sur l'inversion. 8. Le développement en séries de Newton, son extension de la méthode des coefficients indéterminés. 9. Résultats trouvés par Newton au moyen de développements en séries et de l'intégration. 10. Méthode de fluxion de Newton. 11. Les *Principes* de Newton. 12. Leibniz jusqu'à la fondation du Calcul différentiel. 13. Commencement d'une nouvelle ère dans l'histoire des Mathématiques.

MÉLANGES.

DE QUELQUES POINTS CONCERNANT LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

PAR M. J. DOLBNIA.

1. La méthode que nous avons exposée au sujet de la réduction des intégrales abéliennes [1] donne la possibilité d'obtenir, avec une extrême simplicité, quelques résultats concernant la

---

[1] *Bulletin des Sciences mathém.*, 2e série, t. XXVII, juin 1903.

théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Les résultats que nous avons obtenus à l'aide de la méthode précitée sont indiqués en partie par Halphen dans le Mémoire *Sur la multiplication complète dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par* $\sqrt{-23}$ (¹), ainsi que dans ses *Fragments relatifs à la transformation* (²). Néanmoins, la méthode proposée ne sera peut-être pas sans intérêt, tant pour sa simplicité que parce que certains de ces résultats, apparemment, n'ont pas encore attiré l'attention des mathématiciens.

Prenons l'intégrale elliptique

$$(1) \qquad \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = u.$$

Il faut satisfaire à l'équation

$$\int_{\infty}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2 y - \bar{g}_3}},$$

où

$$\bar{g}_2, \quad \bar{g}_3$$

sont les invariants inconnus, à l'aide de la substitution

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = y,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont les polynomes de degrés i, k.

Nous poserons dorénavant

$$x = \wp(u, g_2, g_3) = \wp u,$$
$$y = \wp(u, \bar{g}_2, \bar{g}_3) = \bar{\wp} u;$$

les racines du polynome

$$4x^3 - g_2 x - g_3$$

seront désignées par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3,$$

et les demi-périodes correspondantes de l'intégrale (1) par

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega';$$

(¹) *Journal de Jordan*, 4ᵉ série, t. V.

(²) *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. III, p. 226 et suiv.

les racines de l'équation

$$4y^3 - \overline{g_2}y - \overline{g_3} = 0$$

seront désignées par

$$\overline{e_1}, \quad \overline{e_2}, \quad \overline{e_3}.$$

et les demi-périodes correspondantes de l'intégrale

$$(3) \qquad \int_x^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2}y - \overline{g_3}}}$$

par

$$\overline{\omega}, \quad \overline{\omega'}, \quad \overline{\omega} + \overline{\omega'}.$$

L'équation (1) nous montre que, aux environs du point $x = \infty$, nous aurons un développement de x avec la partie principale u^{-2}. L'équation (2) nous montre qu'aux environs du point $x = \infty$ a lieu un développement de x avec la partie principale $u^{-\frac{2}{i-k}}$; d'où il suit que

$$i - k = 1.$$

Considérons d'abord le cas où i est un nombre impair, et posons

$$i = 2n + 1, \qquad k = 2n.$$

De l'équation (2) il résulte que, lorsque $u = 0$, la partie droite de l'équation devient ∞; conséquemment, la partie gauche devient aussi ∞; et cela est possible, outre le cas $x = \infty$, aussi à condition que x soit une racine de l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

dont le degré est $2n$. En désignant par x_j une des racines simples du polynome $\varphi(x)$, nous aurons, au voisinage du point $x - x_j = 0$, un développement du binome $(x - x_j)$ avec la partie principale u^2; par conséquent, $x = x_j$ est un des points de ramification, c'est-à-dire

$$x_j = e_j, \qquad \int_x^{x_j} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \omega_j.$$

Comme x est une fonction monodrome de l'argument u, $\varphi(x)$ peut renfermer seulement des facteurs de deux espèces : ou des facteurs simples $(x - e_j)$ ou des facteurs doubles $(x - x_k)^2$.

Et comme le degré du polynome $\varphi(x)$ égale $2n$, nous devons avoir, ou

$$(1) \qquad \varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - x_1)^2 \ldots (x - x_{n-1})^2,$$

ou

$$(2) \qquad \varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2.$$

Nous verrons bientôt que la première des deux formes indiquées ne peut avoir lieu, et qu'en conséquence le polynome $\varphi(x)$ doit être de la forme

$$\varphi(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2,$$

où, parmi les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

il n'y a aucun point de ramification.

2. L'équation

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \overline{e_1} = \psi(x) - \overline{e_1} = 0$$

a $(2n + 1)$ racines. Nous les désignerons par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{2n+1}.$$

Développons maintenant la fraction

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) = \overline{\wp} u$$

en série au voisinage du point

$$x - \xi_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n + 1.$$

Comme

$$\psi(\xi_i) = \overline{e_1} = \overline{\wp}(\overline{\omega}), \qquad \overline{\wp'}(\overline{\omega}) = 0,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} &\psi(\xi_i) + (x - \xi_i)\psi'(\xi_i) + \tfrac{1}{2}(x - \xi_i)^2 \psi''(\xi_i) + \ldots \\ &= \overline{e_1} + \tfrac{1}{2}(u - \overline{\omega})^2 \wp''(\overline{\omega}) + \ldots \end{aligned}$$

Deux cas seuls sont possibles :

1° Lorsque $\psi'(\xi_i) \neq 0$;
2° Lorsque $\psi'(\xi_i) = 0$.

Dans le premier cas, $x = \xi_i$ est un des points de ramification : dans le second cas, $x = \xi_i$ est une racine double de l'équation

$$\psi(x) - \overline{e_1} = 0.$$

Comme x est une fonction monodrome de u, nous aurons, en général,

$$\psi''(\xi_i) \neq 0;$$

par conséquent, le polynome

$$f(x) - \overline{e_1}\,\varphi(x)$$

peut avoir des facteurs de deux espèces seulement :

1° Ou $(x - e_i)$;
2° Ou $(x - \xi_i)^2$.

Et comme le degré de ce polynome est $(2n + 1)$, il peut avoir seulement deux formes :

$$(1)\quad f(x) - \overline{e_1}\,\varphi(x) = (x - e_1)(x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 \ldots (x - \xi_n)^2.$$

$$(2)\quad f(x) - \overline{e_1}\,\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi_1)^2 \ldots (x - \xi_{n-1})^2.$$

Il faut en dire autant des polynomes

$$f(x) - \overline{e_2}\,\varphi(x), \quad f(x) - \overline{e_3}\,\varphi(x),$$

c'est-à-dire chacun d'eux peut avoir deux formes :

$$(1)\quad f(x) - \overline{e_2}\,\varphi(x) = (x - e_2)(x - \xi'_1)^2(x - \xi'_2)^2 \ldots (x - \xi'_n)^2.$$

$$(2)\quad f(x) - \overline{e_2}\,\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi'_1)^2(x - \xi'_2)^2 \ldots (x - \xi'_{n-1})^2.$$

$$(1)\quad f(x) - \overline{e_3}\,\varphi(x) = (x - e_3)(x - \xi''_1)^2(x - \xi''_2)^2 \ldots (x - \xi''_n)^2.$$

$$(2)\quad f(x) - \overline{e_3}\,\varphi(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - \xi''_1)^2 \ldots (x - \xi''_{n-1})^2.$$

Et comme les polynomes

$$f(x) - \overline{e_1}\,\varphi(x), \quad f(x) - \overline{e_2}\,\varphi(x), \quad f(x) - \overline{e_3}\,\varphi(x)$$

n'ont pas de facteurs communs, une seule combinaison est

possible

$$(4)\qquad \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2(x-e_1)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2} = \overline{\mathrm{p}}\,u - \overline{e_1},$$

$$(5)\qquad \frac{(x-\xi'_1)^2(x-\xi'_2)^2\ldots(x-\xi'_n)^2(x-e_2)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2} = \overline{\mathrm{p}}\,u - \overline{e_2},$$

$$(6)\qquad \frac{(x-\xi''_1)^2(x-\xi''_2)^2\ldots(x-\xi''_n)^2(x-e_3)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2} = \overline{\mathrm{p}}\,u - \overline{e_3}.$$

Comme

$$\varphi(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2$$

est un carré parfait, en posant

$$\varphi(x) = (\theta x)^2,$$

nous obtiendrons

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{(\theta x)^2};$$

d'où

$$\psi'(x) = \frac{f'(x)\,\theta(x) - 2f(x)\,\theta'(x)}{(\theta x)^3}.$$

Au lieu de l'équation

$$\psi'(x) = 0,$$

nous aurons

$$f'(x)\,\theta(x) - 2f(x)\,\theta'(x) = 0.$$

Le degré de cette équation est $3n$, et ses racines sont comprises dans le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_n, \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots, & \xi'_n, \\ \xi''_1, & \xi''_2, & \ldots, & \xi''_n. \end{array}$$

3. Posons

$$\begin{array}{llll} x_1 = \mathrm{p}(\alpha_1), & x_2 = \mathrm{p}(\alpha_2), & \ldots, & x_n = \mathrm{p}(\alpha_n), \\ \xi_1 = \mathrm{p}(\beta_1), & \xi_2 = \mathrm{p}(\beta_2), & \ldots, & \xi_n = \mathrm{p}(\beta_n), \\ \xi'_1 = \mathrm{p}(\beta'_1), & \xi'_2 = \mathrm{p}(\beta'_2), & \ldots, & \xi'_n = \mathrm{p}(\beta'_n), \\ \xi''_1 = \mathrm{p}(\beta''_1), & \xi''_2 = \mathrm{p}(\beta''_2), & \ldots, & \xi''_n = \mathrm{p}(\beta''_n). \end{array}$$

Alors

$$(7)\qquad \frac{(x-\mathrm{p}\beta_1)^2(x-\mathrm{p}\beta_2)^2\ldots(x-\mathrm{p}\beta_n)^2(x-\mathrm{p}\omega)}{(x-\mathrm{p}\alpha_1)^2(x-\mathrm{p}\alpha_2)^2\ldots(x-\mathrm{p}\alpha_n)^2} = \overline{\mathrm{p}}\,u - \overline{e_1}.$$

De l'équation (4), on voit que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{\wp} u = \infty,$$

et pour

$$x = \xi_1, \quad x = \xi_2, \quad \ldots, \quad x = \xi_n, \quad x = e_1,$$

il vient

$$y = \wp u = \bar{\xi}_1.$$

D'où il suit que les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \omega$$

sont de la forme

$$(2k+1)\omega,$$

k étant un nombre entier. En posant

$$\omega = (2i-1)\bar{\omega},$$

nous aurons

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2i-1}. \tag{8}$$

D'autre part, pour

$$x = \infty, \quad x = x_1, \quad x = x_2, \quad \ldots, \quad x = x_n,$$

nous aurons

$$y = \bar{\wp} u = \infty;$$

par conséquent, les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

c'est-à-dire les intégrales

$$\int_\infty^{x_i} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \alpha_i$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

sont les périodes de l'intégrale

$$\int_\infty^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

Par conséquent les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

ont la forme suivante

$$\alpha_k = 2k\bar{\omega},$$

k étant un nombre entier. Donc

$$(9) \qquad \beta_k = \frac{(2k-1)\omega}{2i+1}, \qquad \alpha_k = \frac{2k\omega}{2i+1}.$$

En outre, il est évident que

$$\frac{2k-1}{2i+1} < 1, \qquad \frac{2k}{2i+1} < 1.$$

Parmi les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \omega, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n,$$

il n'y en a point qui soient égaux entre eux. De plus, les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \omega,$$

ainsi que

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

forment les progressions arithmétiques avec la raison $2\bar{\omega}$; donc nous avons

$$\beta_1 = \frac{\omega}{2n+1}, \qquad \beta_2 = \frac{3\omega}{2n+1}, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = \frac{(2n-1)\omega}{2n+1},$$

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1}, \qquad \alpha_2 = \frac{4\omega}{2n+1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{2n\omega}{2n+1}.$$

Par cette raison

$$\bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_1 = \frac{(\mathrm{p}u - e_1)\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{\omega}{2n+1}\right)^2\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2\omega}{2n+1}\right)^2 \cdots \left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2n-1}{2n+1}\omega\right)^2}{\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2\omega}{2n+1}\right)^2\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{4\omega}{2n+1}\right)^2 \cdots \left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2n\omega}{2n+1}\right)^2}.$$

ou abréviativement

$$(1) \qquad \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_1 = (\mathrm{p}u - e_1)\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)}\right)^2.$$

4. La formule (5) montre que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{\mathrm{p}}u = \infty,$$

et, pour $x = \xi'_1$, il vient

$$y - \bar{p}u = \overline{e_2}.$$

Si l'on change x de $x = \infty$ à $x = \xi'_1$, ensuite de $x = \xi'_1$ à $x = x_1$, alors y passe deux fois par l'infini.

D'où il résulte que l'argument α_1 satisfaisant à l'équation

$$x_1 = p(\alpha_1)$$

doit être défini par la formule

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1} - 2k\omega - 2k'\omega' = 2\overline{\omega'}.$$

D'où il suit que

$$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n-1} + k\omega - k'\omega'.$$

k, k' étant des entiers.

Dans l'équation (10) qui définit la demi-période $\overline{\omega'}$ de l'intégrale

$$\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2}y - \overline{g_3}}}$$

doit être exclue une multiple des périodes 2ω, $2\omega'$; conséquemment pour les nombres entiers k, k' sont possibles seulement les valeurs 0, 1. Donc nous aurons les cas suivants :

(1°) $$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n+1}, \qquad k = k' = 0.$$

Ce cas se rapporte à la formule (I) et se confond avec l'égalité (8).

(2°) $$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n-1} + \omega, \qquad k = 1, \qquad k' = 0.$$

Dans ce cas

$$\overline{\omega'} = \frac{(2n-2)\omega}{2n+1} = \frac{2\omega}{2n+1},$$

ce qui ne peut avoir lieu, car alors

$$\xi'_1 = x_1.$$

(3°) $$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n+1} + \omega', \qquad k = 0, \qquad k' = 1.$$

(4°) $$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n+1} + \omega + \omega', \qquad k = 1, \qquad k' = 1.$$

Dans ce cas

$$\overline{\omega}' = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

En posant

$$\overline{\omega}' = \frac{\omega}{2n-1} + \omega',$$

nous aurons

$$\overline{\omega} + \omega = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Ainsi les trois demi-périodes de l'intégrale

$$\int_x^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$$

sont parfaitement définies par les formules

$$\overline{\omega} = \frac{\omega}{2n+1}, \qquad \overline{\omega}' = \frac{\omega}{2n-1} + \omega', \qquad \overline{\omega} + \overline{\omega}' = \frac{2\omega}{2n-1} - \omega'.$$

Maintenant il est évident que nous obtiendrons encore deux formules

$$(\mathrm{II}) \qquad \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e}_2 = (\mathrm{p}u - e_2) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega - \omega'\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n-1}\right)} \right)^2,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e}_3 = (\mathrm{p}u - e_3) \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n-1} - \omega'\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n-1}\right)} \right)^2.$$

Des formules (I), (II), (III) nous aurons

$$\overline{\mathrm{p}}'u = \mathrm{p}'u \prod_{k=1}^{n} \frac{\left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega\right)\right]\left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n-1} + \omega'\right)\right]\left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega - \omega'\right)\right]}{\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{2k\omega}{2n-1}\right)^3}$$

5. Des formules précédentes on déduit plusieurs relations dont nous indiquerons la suivante. Nommons

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n - a x^{n-1} + \ldots,$$
$$(x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_n) = x^n + b x^{n-1} + \ldots.$$

Alors

$$\psi x - e_1 = \left(\frac{x^n + b x^{n-1} + \ldots}{x^n + a x^{n-1} + \ldots}\right)^2 (x - e_1).$$

D'où

$$\psi'(x) = \left(\frac{x^n + bx^{n-1} + \dots}{x^n - ax^{n-1} + \dots}\right)$$
$$\times \Big\{ (x^n + bx^{n-1} + \dots)(x^n - ax^{n-1} + \dots)$$
$$+ 2(x - e_1)\Big[(x^n - ax^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}\,bx^{n-2} + \dots)$$
$$- (x^n + bx^{n-1} + \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}\,ax^{n-2} + \dots)\Big]\Big\}.$$

Comme les racines de l'équation

$$(x^n + bx^{n-1} + \dots)(x^n - ax^{n-1} - \dots)$$
$$+ 2(x - e_1)\Big[(x^n + ax^{n-1} - \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}\,bx^{n-2} + \dots)$$
$$- (x^n + bx^{n-1} - \dots)(nx^{n-1} + \overline{n-1}\,ax^{n-2} - \dots)\Big] = 0$$

sont évidemment

$$\xi'_1, \quad \xi'_2, \quad \dots, \quad \xi'_n,$$
$$\xi''_1, \quad \xi''_2, \quad \dots, \quad \xi''_n,$$

alors

$$\xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_n + \xi''_1 + \xi''_2 + \dots + \xi''_n$$
$$= -3a + b = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n);$$

donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left[\wp\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega\right)\right] + \sum\left[\wp\left(\frac{2k\omega}{2n-1} + \omega'\right)\right] \\ &\qquad + \sum\left[\wp\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega + \omega'\right)\right] = 3\sum\left[\wp\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Un cas particulier de cette formule se rencontre dans le Mémoire de Halphen : *Sur la multiplication complexe,* etc. Là se déduit cette formule pour $n = 1$, ce qui correspond à la transformation du troisième degré.

6. En posant

$$(x - \xi'_1)(x - \xi'_2)\dots(x - \xi'_n) = x^n + b'x^{n-1} + \dots,$$
$$(x - \xi''_1)(x - \xi''_2)\dots(x - \xi''_n) = x^n + b''x^{n-1} + \dots,$$

et, additionnant les équations (4), (5), (6), nous obtiendrons

$$= y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$
$$= \frac{(x^n + bx^{n-1} + \dots)^2(x - e_1) + (x^n + b'x^{n-1} + \dots)^2(x - e_2) + (x^n + b''x^{n-1} + \dots)^2(x - e_3)}{3(x^n + ax^{n-1} + \dots)^2},$$

ou

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}(b + b' + b'')x^{2n} + \ldots}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \ldots},$$

$$\frac{f(x) - \overline{e_1}\varphi(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}\overline{e_1}\right)x^{2n} + \ldots}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \ldots}$$

$$= \frac{(x^n + bx^{n-1} + \ldots)(x - e_1)}{x^{2n} + 2ax^{2n-1} + \ldots}.$$

Par conséquent

$$\frac{x^{2n+1} + \frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}\overline{e_1}\right)x^{2n} + \ldots}{x^{2n} + 2bx^{2n-1} + \ldots} = x - e_1.$$

D'où il suit

$$\frac{2}{3}\left(b + b' + b'' - \frac{3}{2}e_1\right) - 2b + e_1 = 0.$$

Mais

$$b = -\sum \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right),$$

$$b' = -\sum \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right),$$

$$b'' = -\sum \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right).$$

D'après l'équation (10), nous aurons

$$\overline{e_1} = e_1 + 2\sum\left[\mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right) - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]$$

De même nous obtiendrons

$$\overline{e_2} = e_2 + 2\sum\left[\mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right) - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\overline{e_3} = e_3 + 2\sum\left[\mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega + \omega'\right) - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Un cas particulier de ces formules pour $n = 1$ se rencontre chez Halphen.

7. Avant de passer au cas général de transformation du degré pair, arrêtons-nous sur la transformation des deuxième et quatrième degrés, où tous les calculs peuvent être achevés.

Transformation du deuxième degré. — Soumettons l'intégrale

$$\int_\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = u$$

à la transformation d'après la formule

$$\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x + \gamma} = \bar{\mathfrak{p}}\, u = y.$$

à la condition que

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2} y - \overline{g_3}}}.$$

En faisant maintenant

$$x + \gamma = 0,$$

nous voyons que

$$u = 0$$

et que $(x + \gamma)$ se développe en série avec la partie principale u^{-2}; par conséquent

$$x + \gamma = 0$$

est un des points de ramification, soit

$$x + \gamma = x - e_1.$$

Il est évident que nous devons avoir simultanément

$$\bar{\mathfrak{p}}\, u - \overline{e_1} = \frac{x^2 + (\alpha - \overline{e_1})x + \beta + \overline{e_1} e_1}{x - e_1} = \frac{(x - e_2)(x - e_3)}{x - e_1},$$

$$\bar{\mathfrak{p}}\, u - \overline{e_2} = \frac{x^2 + (\alpha - \overline{e_2})x + \beta + e_1 \overline{e_2}}{x - e_1} = \frac{(x - \xi_1)^2}{x - e_1},$$

$$\bar{\mathfrak{p}}\, u - \overline{e_3} = \frac{x^2 + (\alpha - \overline{e_3})x + \beta + e_1 \overline{e_3}}{x - e_1} = \frac{(x - \xi_2)^2}{x - e_1}.$$

De ces équations, nous trouvons

$$\alpha - \overline{e_1} = e_1, \qquad \beta + e_1 \overline{e_1} = e_2 e_3.$$

$$\alpha^2 - 2\overline{e_2}\alpha + \overline{e_2^2} = 4\beta + 4 e_1 \overline{e_2},$$

$$\alpha^2 - 2\overline{e_3}\alpha + \overline{e_3^2} = 4\beta + 4 e_1 e_3.$$

D'où

$$\alpha = -e_1, \qquad \overline{e_1} = -2e_1,$$
$$\beta = 2e_1^2 + e_2 e_3 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3),$$
$$\overline{e_2} = e_1 \pm 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$
$$\overline{e_3} = e_1 \mp 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$
$$\overline{\mathrm{p}}u = \frac{x^2 - e_1 x + 2e_1^2 + e_2 e_3}{x - e_1} = \varphi(x).$$

Comme, d'après ce qui précède, ξ_1, ξ_2 sont les racines de l'équation

$$\varphi'(x) = 0,$$

pour les trouver nous avons l'équation

$$\xi^2 - 2e_1\xi - e_1^2 - e_2 e_3 = 0,$$

d'où

$$\xi_1 = e_1 - \sqrt{(e_1 - e_3)(e_1 - e_3)} = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$
$$\xi_2 = e_1 - \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right).$$

Par conséquent

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_1} = \frac{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\omega')(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\overline{\omega + \omega'})}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\omega},$$
$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_2} = \frac{\left(\mathrm{p}u - \mathrm{p}\frac{\omega}{2}\right)^2}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\omega},$$
$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_3} = \frac{\left[\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right)\right]^2}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\omega}.$$

Ces résultats concordent parfaitement avec la théorie ci-dessus exposée.

8. *Transformation du quatrième degré.* — Pour la transformation du quatrième degré, nous avons la formule

$$\frac{x^4 - a x^3 + b x^2 - c x - d}{x^3 + r x^2 + s x + t} = \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_i},$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Comme, d'après ce qui précède, le numérateur et le dénominateur de cette fraction peuvent contenir seulement des facteurs

simples ou doubles, et comme les facteurs simples doivent être de la forme

$$x - e_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3,$$

sont possibles deux transformations du quatrième degré

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_1 = \dfrac{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_2 = \dfrac{(x - x'_1)^2 (x - x'_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_3 = \dfrac{(x - x''_1)^2 (x - x''_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_1 = \dfrac{(x - x_1)^2 (x - e_2)(x - e_3)}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_2 = \dfrac{(x - \xi_1)^2 (x - \xi_2)^2}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_3 = \dfrac{(x - \xi'_1)^2 (x - \xi'_2)^2}{(x - x_2)^2 (x - e_1)}. \end{cases}$$

Examinons d'abord la transformation (A). Comme pour $x = e_1$ et pour $x = e_3$ nous avons

$$y = \bar{\mathrm{p}}u = \infty,$$

l'intégrale

$$\int_{e_1}^{e_3} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \omega'$$

sera une période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

par conséquent

$$\omega' = 2\overline{\omega'}, \qquad \overline{\omega'} = \frac{\omega'}{2}.$$

Comme ensuite pour $x = \infty$ et $x = e_1$ nous avons

$$y = \bar{\mathrm{p}}u = \infty,$$

l'intégrale

$$\int_{\infty}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \omega$$

sera une période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2 y - \overline{g}_3}};$$

par conséquent

$$\omega = 2\overline{\omega}, \qquad \overline{\omega} = \frac{\omega}{2}.$$

Il est facile de voir que

$$\int_{\infty}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\infty}^{\overline{e}_1} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2 y - \overline{g}_3}} = \overline{\omega} = \frac{\omega}{2},$$

donc

$$x_1 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Comme l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = v$$

est égale à la période de l'intégrale

$$\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2 y - \overline{g}_3}},$$

on aura

$$v = 2\overline{\omega} \qquad \text{ou} \qquad v = 2\overline{\omega}'.$$

Si l'on prend

$$v = 2\overline{\omega},$$

on aura

$$x_2 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2} + \omega\right) = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2}\right) = x_1,$$

ce qui ne peut avoir lieu; donc

$$x_2 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right).$$

Par cette raison

$$(11) \qquad \begin{cases} \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e}_1 = \dfrac{\left(x - \mathrm{p}\dfrac{\omega}{2}\right)^2 \left[x - \mathrm{p}\left(\dfrac{\omega}{2} + \omega'\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e}_1 = \dfrac{(x^2 - 2e_1 x - e_1^2 - e_2 e_3)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Comme

$$\int_{\infty}^{x'_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\infty}^{\bar{e}_2} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2 y - \bar{g}_3}} = \bar{\omega} = \frac{\omega'}{2},$$

nous avons

$$x'_1 = \mathrm{p}\frac{\omega'}{2}, \qquad x'_2 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right),$$

donc

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_2 = \dfrac{\left[x - \mathrm{p}\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right]^2 \left[x - \mathrm{p}\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_2 = \dfrac{(x^2 - 2e_3 x - e_3^2 - e_1 e_2)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Comme

$$\int_{\infty}^{x''_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\infty}^{\bar{e}_3} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2 y - \bar{g}_3}} = \bar{\omega} + \bar{\omega}' = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

on aura

$$x''_1 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right), \qquad x''_2 = \mathrm{p}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

donc

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_3 = \dfrac{\left[x - \mathrm{p}\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right)\right]^2 \left[x - \mathrm{p}\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right)\right]^2}{(x - e_1)(x - e_3)(x - e_2)}, \\ \bar{\mathrm{p}}u - \bar{e}_3 = \dfrac{(x^2 - 2e_2 x - e_2^2 - e_1 e_3)^2}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}. \end{cases}$$

Des équations (11), (12), (13) nous déduirons

$$3\bar{\mathrm{p}}u = \frac{3x^3 + \frac{3}{2} g_2 x^2 + 6 g_3 x + \frac{3}{16} g_2^2}{x^3 - \frac{1}{4} g_2 x - \frac{1}{4} g_3}$$

d'où

$$\bar{\mathrm{p}}u = 4\mathrm{p}(2u).$$

Si l'on prend ici

$$u = \frac{\omega}{2},$$

nous obtiendrons

$$\bar{e}_1 = 4e_1.$$

En posant successivement

$$u = \frac{\omega'}{2}, \qquad u = \frac{\omega + \omega'}{2},$$

nous aurons

$$\overline{e_2} = 4e_2, \qquad \overline{e_3} = 4e_3.$$

donc

$$\overline{g_2} = 4^2 g_2, \qquad \overline{g_3} = 4^3 g_3,$$

$$\mathrm{p}\left(\frac{u}{\frac{1}{2}}, g_2, g_3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{p}(u, 4^2 g_2, 4^3 g_3).$$

Cette formule s'obtient de la formule d'homogénéité

$$\mathrm{p}\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}}, \mu^2 \overline{g_2}, \mu^3 \overline{g_3}\right) = \mu \mathrm{p}(u, \overline{g_2}, \overline{g_3}),$$

en posant

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{2}.$$

Tel est le caractère de la transformation du quatrième degré que nous venons d'examiner.

La transformation du quatrième degré (B), étant un cas particulier de la transformation générale du degré pair $2n$, il est inutile de l'examiner spécialement.

9. *A priori* sont possibles deux transformations du degré pair $2n$. *La première transformation* se définit par les formules

$$(14) \quad \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_1} = \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-e_1)}$$

$$(15) \quad \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_2} = \frac{(x-\xi'_1)^2(x-\xi'_2)^2\ldots(x-\xi'_n)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-e_1)},$$

$$(16) \quad \overline{\mathrm{p}}u - e_3 = \frac{(x-\xi''_1)^2(x-\xi''_2)^3\ldots(x-\xi''_{n-1})^2(x-e_2)(x-e_3)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-e_1)}.$$

La seconde transformation se définit par les formules

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_1} = \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}.$$

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_2} = \frac{(x-\xi'_1)^2(x-\xi'_2)^2\ldots(x-\xi'_n)^2}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)},$$

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_3} = \frac{(x-\xi''_1)^2(x-\xi''_2)^2\ldots(x-\xi''_n)^2}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-2})^2(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}.$$

Arrêtons-nous à *la première transformation*. Posons

$$x_1 = \mathrm{p}\alpha_1, \qquad x_2 = \mathrm{p}\alpha_2, \qquad \ldots \qquad x_{n-1} = \mathrm{p}\alpha_{n-1},$$
$$\xi_1 = \mathrm{p}\beta_1, \qquad \xi_2 = \mathrm{p}\beta_2, \qquad \ldots \qquad \xi_n = \mathrm{p}\beta_n.$$

Pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{p}\,u = \infty,$$

par conséquent les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}, \quad \omega$$

sont les périodes de l'intégrale

$$\int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g}_2 y - \overline{g}_3}};$$

c'est pourquoi tous sont compris dans la formule $2k\overline{\omega}$. En posant

$$\omega = 2r\overline{\omega},$$

nous aurons

$$\overline{\omega} = \frac{\omega}{2r},$$

r étant un entier.

Pour

$$x = \xi_1, \qquad x = \xi_2, \qquad \ldots, \qquad x = \xi_n,$$

nous avons

$$y = \bar{p}\,u = \overline{e}_1;$$

donc les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

sont tous compris dans la formule

$$(2k+1)\overline{\omega} = \frac{(2k+1)\omega}{2r},$$

donc

$$\alpha_k = \frac{2k\omega}{2r}, \qquad \beta_k = \frac{(2k+1)\omega}{2r},$$

où, évidemment, on peut prendre

$$\alpha_k, \quad \beta_k,$$

dans les limites o et ω.

Comme les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}, \quad \omega, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

sont tous différents, conformément au n° 3, il est nécessaire

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n}, \qquad \alpha_2 = \frac{4\omega}{2n}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{n-1} = \frac{2(n-1)\omega}{2n},$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{2n}, \qquad \beta_2 = \frac{3\omega}{2n}, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = \frac{2n-1}{2n}\omega.$$

et nous obtiendrons

$$\text{(IV)} \qquad \overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_1} = (\mathrm{p}u - e_1) \prod_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n}\omega\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n}\right)} \right)^2.$$

10. La formule (16) montre que, pour $x = \infty$, nous avons

$$y = \overline{\mathrm{p}}u = \infty,$$

et pour

$$x = \xi'_1, \qquad x = \xi'_2, \qquad \ldots, \qquad x = \xi'_l$$

nous aurons

$$y = \overline{\mathrm{p}}u = \overline{e_2}.$$

Si l'on change x de $x = \infty$ à $x = \xi'_1$, ensuite de $x = \xi'_1$ à $x = x_1$, alors y passe deux fois par l'infini.

D'où il résulte que l'argument α_1 satisfaisant à l'équation

$$X_1 = \mathrm{p}(\alpha_1)$$

doit être défini par la formule

$$\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n} - 2k\omega + 2k'\omega' - 2\overline{\omega'}.$$

d'où

$$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n} + k\omega + k'\omega',$$

où pour les nombres entiers k, k' sont possibles seulement les valeurs 0 et 1.

Pour $k = k' = 0$, nous aurons

$$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n}.$$

Ce cas se rapporte à la formule (IV).

Pour $k = 1$, $k' = 0$, nous obtiendrons

$$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n} + \omega = \frac{(2n-1)\omega}{2n}.$$

Ce cas se rapporte à la formule (IV).

Pour $k = 0$, $k' = 1$, nous avons

$$\overline{\omega'} = \frac{\omega}{2n} + \omega'.$$

Nous avons évidemment les trois demi-périodes suivantes

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2n}, \qquad \omega' = \frac{\omega}{2n} + \omega', \qquad \bar{\omega} + \bar{\omega'} = \frac{\omega}{n} + \omega'.$$

Par conséquent

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_2 = (\wp u - e_1) \prod_1^n \left(\frac{\wp u - \wp\left(\frac{2k-1}{2n}\omega + \omega'\right)}{\wp u - \wp \frac{2k\omega}{2n}} \right)^2,$$

$$\bar{\wp} u - \bar{e}_3 = \frac{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)}{\wp u - e_3} \prod_1^n \left(\frac{\wp u - \wp\left(\frac{k\omega}{n} + \omega'\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{k\omega}{n}\right)} \right)^2.$$

11. Sans nous arrêter davantage sur la transformation de la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = y,$$

où le degré du numérateur surpasse d'une unité le degré du dénominateur, je veux montrer qu'on peut avoir les formules de transformation aussi pour le cas où le degré du numérateur égale celui du dénominateur.

Qu'il s'agisse de satisfaire à l'équation

$$(17) \qquad \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\bar{e}_1}^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \bar{g}_2 y - \bar{g}_3}} = u$$

par la substitution

$$(18) \qquad \frac{f_\alpha(x)}{\varphi_\beta(x)} = \bar{\wp} u - \bar{e}_1.$$

De l'équation (17) on voit que, pour $x = \infty$, nous aurons

$$y = \bar{\wp} u = \bar{e}_1.$$

L'équation (18) donne, pour $x = \infty$, un développement de x avec la partie principale

$$u^{-\frac{2}{\alpha - \beta}};$$

d'où il suit que

$$\beta - \alpha = 1.$$

Posant

$$\beta = 2n + 1, \qquad \alpha = 2n.$$

et en raisonnant, d'après ce qui précède, nous aurons les trois formules suivantes

$$(19)\qquad \bar{\mathrm{p}}u - e_1 = \frac{(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_n)^2}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2(x-e_1)},$$

$$(20)\qquad \bar{\mathrm{p}}u - \overline{e_2} = a\frac{(x-\xi'_1)^2(x-\xi'_2)^2\ldots(x-\xi'_n)^2(x-e_2)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2(x-e_1)},$$

$$(21)\qquad \bar{\mathrm{p}}u - e_3 = b\frac{(x-\xi''_1)^2(x-\xi''_2)^2\ldots(x-\xi''_n)^2(x-e_3)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2(x-e_1)},$$

où

$$a = \overline{e_1} - \overline{e_2}, \qquad b = \overline{e_1} - \overline{e_3}.$$

Nommons maintenant

$$\begin{array}{llll}
x_1 = \mathrm{p}\alpha_1, & x_2 = \mathrm{p}\alpha_2, & \ldots\ldots & x_n = \mathrm{p}\alpha_n, \\
\xi_1 = \mathrm{p}\beta_1, & \xi_2 = \mathrm{p}\beta_2, & \ldots\ldots & \xi_n = \mathrm{p}\beta_n, \\
\xi'_1 = \mathrm{p}\beta'_1, & \xi'_2 = \mathrm{p}\beta'_2, & \ldots\ldots & \xi'_n = \mathrm{p}\beta'_n, \\
\xi''_1 = \mathrm{p}\beta''_1, & \xi''_2 = \mathrm{p}\beta''_2, & \ldots\ldots & \xi''_n = \mathrm{p}\beta''_n.
\end{array}$$

L'équation (19) montre que pour

$$x = \infty, \qquad x = \xi_1, \qquad x = \xi_2, \qquad \ldots\ldots \qquad x = \xi_n,$$

nous obtiendrons

$$y = \bar{\mathrm{p}}u = e_1;$$

par conséquent les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots\ldots \quad \beta_n$$

sont tous compris dans la formule

$$\beta_i = 2k\overline{\omega}.$$

Posant

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad \ldots, \qquad x = x_n, \qquad x = e_1,$$

nous aurons

$$y = \bar{\mathrm{p}}u = \infty.$$

D'où, d'après l'équation (17), nous concluons que les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_n, \quad \omega$$

sont composés d'un nombre impair de demi-périodes $\overline{\omega}$, donc

$$\alpha_k = (2k+1)\overline{\omega}; \qquad \omega = (2r+1)\overline{\omega},$$

$$\omega = \frac{\omega}{2r+1}.$$

Et comme les arguments

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n; \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \omega$$

sont tous différents, conformément au n° 3, il est nécessaire

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{2n+1}, \qquad \alpha_2 = \frac{3\omega}{2n+1}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \frac{(2n-1)\omega}{2n+1},$$

$$\beta_1 = \frac{2\omega}{2n+1}, \qquad \beta_2 = \frac{4\omega}{2n+1}, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = \frac{2n\omega}{2n+1}.$$

Et nous obtiendrons

$$\text{(VII)} \qquad \overline{\wp} u - e_1 = \frac{1}{\wp u - e_1} \prod \left(\frac{\wp u - \wp \frac{2k\omega}{2n+1}}{\wp u - \wp \frac{2k-1}{2n+1}\omega} \right)^2.$$

L'équation (20) montre que les arguments

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

doivent être déterminés par l'équation

$$\alpha_k - \alpha_{k-1} = \frac{2\omega}{2n+1} + 2k\omega + 2k'\omega' = 2\overline{\omega'};$$

d'où

$$\omega' = \frac{\omega}{2n+1} + k\omega + k'\omega',$$

où k, k' ont deux valeurs, 0 et 1. Posant

$$k = 1, \qquad k' = 0,$$

nous avons

$$\omega' = \frac{2n\omega}{2n+1},$$

ce qui se confond avec le cas précédent. Nous avons seulement deux cas nouveaux

$$\overline{\omega'_1} = \frac{\omega}{2n+1} + \omega',$$

$$\overline{\omega'_2} = \frac{\omega}{2n+1} + \omega + \omega',$$

c'est-à-dire on peut prendre

$$\overline{\omega'_2} = \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Ayant en vue que

$$\overline{\omega_2} = \overline{\omega'_1} + \overline{\omega},$$

nous concluons que les demi-périodes de l'intégrale

$$\int_{e_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \overline{g_2}y - \overline{g_3}}}$$

seront

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega}{2n+1} + \omega', \quad \frac{2\omega}{2n+1} + \omega'.$$

Par conséquent

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_2} = (\overline{e_1} - \overline{e_2}) \frac{\mathrm{p}u - e_2}{\mathrm{p}u - e_1} \prod_1^n \left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k\omega}{2n+1} + \omega'\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right)} \right)^2,$$

$$\overline{\mathrm{p}}u - \overline{e_3} = (\overline{e_1} - \overline{e_3}) \frac{\mathrm{p}u - e_3}{\mathrm{p}u - e_1} \prod_1^n \left(\frac{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n-1}\omega + \omega'\right)}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}\left(\frac{2k-1}{2n+1}\omega\right)} \right)^2.$$

18 juillet 1903

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abhandlungen *zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von Mor. Cantor. 13. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 14 m.

Contenu : M. Curtze, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. der Renaissance (en deux parties). 2e partie avec 117 fig. dans le texte.

Ibid. 15 Heft. In-8°. 3 m.

Contenu : Paul Sauerbeck, Einleitung in die analytische Geometrie der

höheren algebraischen Curven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves. VI-166 p. avec 76 fig.

ANNALS *of the astronomical Observatory of Harvard College.* Vol. 37. Part II : *Observation of* 58 *variable stars of long period during the years* 1890-1901, by O.-C. Wendell and E.-C. Pickering. In-4°, 282 p. London, Wesley. 15 sh.

GRASSMANN'S (HERM.). — *Gesammelte mathematische u. physikalische Werke,* herausgeg. von Frdr. Engel. 2. Bd. 2. Thl. Gr. in-8°. Leipzig. Teubner. 14 m.

HAMBERGER (M.). — *Gedächtnissrede auf Immanuel Lazarus Fuchs.* Avec portrait. Gr. in-8°, 16 p. Leipzig, Teubner. 1 m.

HOEFER (F.). — *Histoire des Mathématiques, depuis leur origine jusqu'au commencement du* XIXe *siècle.* 5e édit. In-16°, III-609 p. avec fig. Paris, Hachette et Cie. 4 fr.

HOLZMÜLLER (GUST.). — *Elemente der Stereometrie.* 4 Thl. In-8°, XI-311 p. avec 89 fig. Leipzig, Göschen. 9 m.; relié, 9 m. 80 pf.

LAMBERT'S (J.-H.). — *Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen* (1761, 71, 72). Publié en allemand par J. Bauschinger. In-8°, 149 p. avec 35 fig. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. N° 133.) Cart. 2 m. 40 pf.

LOBATSCHEFSKIJ (N.-J.). — *Pangeometrie.* (Kasan, 1856.) Traduit et publié par H. Liebmann. In-8°, 95 p. avec 30 fig. (Ostwald's Klassiker de exakt. Wissensch. N° 130). Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m. 70 pf.

MANDL (JUL.). — *Graphische Darstellung von mathematischen Formeln.* Gr. in-8°, 65 p. avec fig. et 4 planches. Wien, Seidel und Sohn. 6 m.

PFAFF (JOH.-FRDR.). — *Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integrieren* (1815). Traduite du latin et publiée par G. Kowalewski. In-8°, 84 p. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. N° 129). Cart. 1 m. 40 pf.

POINCARÉ (H.). — *La Science et l'Hypothèse.* Paris, Flammarion. 3 fr. 50 c.

PORTIG (GUST.). — *Das Weltgesetz des kleinsten Kraftaufwandes in den Reichen der Natur u. des Geises.* 1. Bd. : *In der Mathematick, Physick u. Chemie.* Gr. in-8°, XII-332 p. Stuttgart, Kielmann. 8 m.

REYNOLDS (O.). — *On an inversion of ideas as to the structure of the universe.* In-8°, 44 p. London, Clay. 1 sh. 6 d.

SCHERING (ERNST). — *Gesammelte mathematische Werke.* Herausgeg.

v. Rob. Haussner u. Karl Schering. 1. Bd. Gr. in-4°, VIII-412 p. avec portrait. Berlin, Mayer et Müller. 25 m.

SERRET (J.-A.). — *Lehrbuch der Differential-und Integral-Rechnung.* Deutsch bearb. von Axel Harnack. 2. Aufl. 3. Bd. 1. Lfg. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 6 m.

STEPHANSEN (M.-A.-E.). — *Ueber partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung, die ein intermediäres Integral besitzen.* In-8°. Christiana, Cammermeyer. 2 kr. 50 ö.

TEUBNER'S (B.-G.). — *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathemat. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* IV. Bd. 2. Abthlg. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 7 m. 20 pf.

Contenu : O. Stolz u. J.-A. Gmeiner, theoretische Arithmetik. 2. Abthlg. Avec 19 fig. dans le texte.

Ibid. Bd. IX, 1 u. X, 1. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 26 m.

Contenu : IX, 1. Eman. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung u. ihre Anwendung. 1. Hälfte, 12 M. — X, 1. Paul Bachmann, Niedere Zahlentheorie. 1. Thl. relié 14 M.

VERÖFFENTLICHUNG *des königl. preuss. geodätischen Institutes.* Neue Folge. N° 9. In-8°. Berlin, Stankiewicz. 15 m.

Contenu : Bestimmung der Polhöhe u. der Intensität der Schwerkraft in der Nähe des Berliner Meridians von Arkona bis Elsterwerda. III-302 p. avec 2 planches.

WERTHEIM (GUST.). — *Anfangsgründe der Zahlenlehre. Mit den Bildnissen von Fermat, Lagrange, Euler u. Gauss.* Gr. in-8°, XII-427 p. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 9 m.

WHITTACKER (E.-T.). — *Course of modern Analysis. Introduction to the general theory of infinite series and of analytic functions.* In-8°. 392 p. London, Clay. 12 sh. 6 d.

FARADAY (MICH.). — *Experimental-Untersuchungen über Elektricität.* (Aus d. *Philos. Trans.*, f. 1838.) Herausgeg. von A.-J. v. Oettingen. 14, u. 15. Reihe. in-8°, 48 p. avec 2 fig. Leipzig, Engelmann. (Ostwald's Klassiker d. exakt. Wissensch. N° 131.) Cart. 80 pf.

ENCYKLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* 3. Bd. : *Geometrie.* Redig. von W.-Fr. Meyer. 3 Thl. 1. Heft. Gr. in-8°, 183 p. avec 5 fig. Leipzig, Teubner. 5 m. 40 pf.

1re Partie —

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LAMÉ (G.). — EXAMEN DES DIFFÉRENTES MÉTHODES EMPLOYÉES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE. 1 vol. in-4°, 124 pages. Paris, Vve Courcier, 1818; réimpression *fac simile*, A. Hermann, 1903.

M. Hermann se plaît à réimprimer de temps en temps quelque livre rare, qui, bien entendu, a d'autres mérites que sa rareté. Il faut lui en savoir gré. Je me figure que plus d'un lecteur trouvera grand plaisir à lire cette brochure que Lamé a publiée en 1818, alors qu'il était « élève ingénieur au Corps Royal des Mines » : ils y retrouveront quelques-unes des belles propositions de Géométrie auxquelles le nom de Lamé est resté attaché, mais ils se plairont surtout aux réflexions qui sont semées partout, qui dénotent un esprit vraiment critique, et un sens naturel des choses de l'enseignement qui étonne chez un homme aussi jeune et qui, sans doute, n'avait jamais professé; plus d'un lecteur, dont l'enseignement est le métier, en fera son profit, et lors même qu'il connaîtrait souvent, des problèmes que l'auteur traite et dont beaucoup sont aujourd'hui classiques, quelque solution plus simple, s'émerveillera de la façon dont sont présentées celles que Lamé propose. Pour ce qui est des digressions philosophiques ou pédagogiques qui abondent dans ce petit livre, je ne puis m'empêcher de citer la façon dont Lamé en parle, dans sa préface :

« Quant aux réflexions qu'il contient, dit-il, j'avoue qu'elles m'ont été suggérées, pour la plupart, par les problèmes que j'y ai fait entrer, tandis qu'au contraire des réflexions générales auraient dû me conduire au choix des exemples. Il aurait fallu du temps et beaucoup de talent pour faire disparaître l'apparence de cette inversion, et je ne possédais ni l'un ni l'autre. »

Cette modestie, sous laquelle se cache un peu d'impertinence juvénile, est fort plaisante. J. T.

OCAGNE (M. D'). — EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE DES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA NOMOGRAPHIE. 1 vol. in-4°, 62 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Le *Traité de Nomographie* de M. Maurice d'Ocagne [1] intéresse les mathématiciens et les techniciens. C'est surtout aux premiers que s'adresse le présent Mémoire, où l'auteur a moins en vue les applications pratiques que les principes de cette branche spéciale des Mathématiques appliquées, qu'il a tant contribué à développer, et à laquelle il a donné un nom. Dans son *Traité*, l'auteur part des cas les plus simples pour s'élever peu à peu aux problèmes généraux; dans le présent Mémoire, au contraire, le problème de la représentation nomographique des équations est posé dans ses termes les plus généraux, et c'est l'étude de ce problème qui conduit aux méthodes d'un usage courant dans la pratique. Une telle exposition a l'avantage de la brièveté et fait pénétrer le lecteur plus avant dans le fond des choses.

Elle a donné l'occasion à M. d'Ocagne de revenir sur un point important, la classification des nomogrammes; dans celle qu'il propose, les nomogrammes sont réduits à vingt types canoniques, dont un à un seul plan et les dix-neuf autres à deux plans. L'auteur y est parvenu en « étudiant tous les modes de répartition des éléments sans cote, ou constants, entre les divers contacts dont la simultanéité définit le mode d'emploi du nomogramme ». Chacun de ces types est représenté par un schéma fort simple, et leur ensemble par un Tableau d'une lecture facile. Si, ensuite, on considère m plans superposés, on peut immédiatement décomposer le nomogramme ainsi constitué en une suite de $m - 1$ nomogrammes à deux plans rentrant dans les dix-neuf types canoniques de nomogrammes à deux plans.

Signalons encore les développements relatifs à cette notion du *genre nomographique* dont l'origine est due à M. Soreau, et que M. d'Ocagne a introduite ici même [2], en rendant compte du travail de M. Soreau. Enfin il convient de louer la belle exécution

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXIII, p. 17[illegible].

(2) Tome XXVI$_1$ (1902), p. 67.

des figures qui illustrent le texte : on aura certainement plaisir à regarder, par exemple, le nomogramme à points alignés de l'équation du troisième degré, à coefficients quelconques. Un nomogramme analogue peut, grâce à l'emploi de la transformation de Tschirnhausen, s'appliquer à la résolution de toutes les équations algébriques, jusqu'au septième degré, inclusivement ([1]).

J. T.

FOUËT (A.). — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Ire Partie (Chapitres I à V). 1 vol. in-8°, 330 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

Ces *Leçons,* si l'on en juge par le développement de la première Partie, semblent devoir former un Ouvrage considérable; elles sont fort intéressantes, et, bien qu'*élémentaires,* conduisent souvent le lecteur jusqu'à ces régions, récemment explorées, où se trouve aujourd'hui la frontière de la Science : l'auteur souhaite sans doute que quelques-uns de ses lecteurs contribuent, pour leur part, à reculer cette frontière; aussi a-t-il multiplié les renvois bibliographiques, qui permettront à ceux dont il a éveillé la curiosité de la satisfaire; les notes abondent dans son livre; outre les simples renvois, on y trouve des résumés, des indications, des vues suggestives; aussi bien, celles-ci ne manquent pas dans le texte, rédigé d'une façon large et claire, et l'on sent chez l'auteur, outre la maîtrise du sujet, le goût des vues d'ensemble et de la réflexion philosophique; les citations non plus ne manquent pas, et M. Fouët s'est plu à recueillir ces phrases qui jaillissent parfois sous la plume des grands mathématiciens et qui caractérisent tout un ordre de pensées.

([1]) Je profite du présent compte rendu pour signaler l'omission, dans la liste des Mémoires insérés dans le compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens qui a été publié dans le *Bulletin* (t. XXVII, p. 131), de la Note de M. Maurice d'Ocagne *Sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'Art du Calcul* (*calcul graphique et calcul nomographique*).

Ces *Leçons* sont élémentaires, non parce qu'elles se bornent aux éléments de la Science, mais parce qu'elles y remontent continuellement; on est même parfois un peu étonné, en passant d'un Chapitre où l'on est allé assez loin, de revenir, dans le Chapitre suivant, à un point de départ qui semble devoir être très familier au lecteur, ou aux éléments de quelque théorie dont on a déjà utilisé les résultats. Je dépasserais de beaucoup ma pensée en disant qu'on ne se rend pas bien compte des connaissances que M. Fouët suppose chez son lecteur : peut-être a-t-il cru utile, toutes les fois que l'occasion s'offrait à lui, de ramener le lecteur à ces principes qui doivent être toujours présents à l'esprit, mais qui disparaissent parfois et s'oublient sous l'amas des connaissances formelles; à vrai dire, l'utilité d'une continuelle revision apparaît à tous ceux qui ont l'habitude de l'enseignement. Au reste les questions élémentaires sont traitées largement, sans pédantisme, et l'on ne s'y attarde point.

Il me reste à faire connaître rapidement les matières contenues dans l'Introduction, et les cinq Chapitres qui forment le Livre I.

Après une esquisse du développement de l'idée de fonction, dont on pourrait dire parfois qu'elle est trop large, si elle était autre chose qu'une esquisse, et où s'introduisent déjà les idées de connexion et d'hyperespace, M. Fouët donne un aperçu de la théorie des ensembles, qui contient la définition des idées et des termes essentiels; il signale différents types remarquables de fonctions, s'arrête sur les notions de continuité, de limite, de convergence uniforme, sur celle de dérivée, de fonction harmonique, de représentation conforme, de fonction analytique, et termine son Introduction par des notions importantes sur les groupes. Cette Introduction est comme une sorte de vue d'ensemble sur beaucoup de sujets qui seront développés et repris en détail dans le cours du livre, et dont elle suppose en partie la connaissance.

Dans le premier Chapitre, l'auteur étudie d'abord en détail quelques fonctions algébriques simples et la représentation conforme à laquelle elles donnent lieu, la transformation homographique en particulier, de manière à conduire à la notion du groupe fuchsien et du groupe modulaire; puis il arrive à la définition de la fonction algébrique en général, étudie les singularités, les systèmes circulaires, définit le groupe de monodromie, et termine

par quelques pages sur la surface de Riemann propre à représenter une fonction algébrique donnée.

Le Chapitre suivant est consacré aux séries et produits infinis (simples). Le sujet est repris au début, et l'on traite successivement des séries à termes numériques, des séries dont les termes sont des fonctions d'une variable, de la convergence uniforme, de l'intégration, de la dérivation des séries; on développe ensuite les propositions fondamentales concernant les séries entières; après quoi l'auteur passe aux produits infinis, aux séries trigonométriques, aux séries divergentes en tant qu'elles peuvent servir à la définition d'une fonction; on explique en particulier quelques-uns des résultats importants obtenus par M. Borel. On traite enfin des transcendantes élémentaires : fonctions exponentielle, circulaires, logarithmique, fonctions circulaires inverses, fonctions eulériennes, série hypergéométrique.

Le troisième Chapitre se rapporte aux fonctions définies par des séries multiples; l'auteur conserve la même division que dans le précédent Chapitre : c'est-à-dire qu'il débute par une étude générale des séries multiples, dont il applique les résultats à des transcendantes classiques. La convergence de la série d'Eisenstein est fondée sur la règle de Cauchy, où intervient la considération d'une intégrale multiple. Les séries entières à plusieurs variables sont naturellement l'objet d'une étude spéciale. Les propriétés fondamentales des fonctions σ, $\wp$, ζ de Weierstrass, des fonctions ϑ à un ou plusieurs arguments contituent une application naturelle et intéressante des théories générales.

Dans le Chapitre IV, M. Fouët traite des fonctions définies par les intégrales. Ici encore, il reprend les choses au début, à la définition de l'intégrale définie, au sens de Riemann, ou plutôt de l'intégrale par excès et par défaut de M. Darboux, passe de là aux intégrales multiples, aux intégrales curvilignes, aux intégrales prises entre des limites imaginaires. On y notera, relativement au théorème de Cauchy, cette démonstration de M. Goursat qui suppose seulement l'existence de la fonction dérivée; les conséquences classiques de ce théorème se déroulent dans la suite du Chapitre.

Le dernier Chapitre a pour titre : « Le prolongement analytique d'après Weierstrass ». Après avoir développé la notion de la chaîne d'éléments de fonction et la notion de fonction analytique,

au sens de Weierstrass, M. Fouët s'occupe des coupures artificielles ou essentielles, de la représentation, dans un domaine borné, par une série de polynomes, d'une fonction holomorphe dans ce domaine, de la représentation d'une branche de fonction dans une *étoile,* enfin des extensions possibles que l'on peut donner à la notion de prolongement analytique. J. T.

ESTANAVE (E.). — Essais sur la sommation de quelques séries trigonométriques. 1 vol. in-8°, 112 pages. Paris, Hermann, 1903.

En cherchant à satisfaire à des équations aux dérivées partielles du type

$$\alpha \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma \frac{\partial^4 z}{\partial y^2} = p,$$

où α, β, γ désignent des constantes et p une fonction arbitrairement donnée de x et de y par une série de la forme

$$\sum_i \sum_j A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi x}{b},$$

M. Estanave parvient à plusieurs identités contenant la fonction arbitraire p, d'où il déduit la valeur d'un très grand nombre de séries trigonométriques remarquables par la simplicité du terme général. Plusieurs de ces séries sont bien connues, il n'y en avait pas moins intérêt à en déduire la sommation d'un procédé uniforme. A leur tour, en particularisant convenablement la variable, ces séries engendrent des séries numériques intéressantes. C'est là un procédé dont M. Glaisher, dans le *Messager of Mathematics* ou le *Quarterly Journal,* a donné de beaux et nombreux exemples.

Signalons, parmi les séries que traite M. Estanave, celles qui suivent; elles suffiront à donner au lecteur quelque idée de la nature de ses recherches; la sommation en est étendue aux

valeurs naturelles de n

$$\sum \frac{\sin nz}{n^{2p+1}},$$

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)z}{(2n-1)^{2p+1}},$$

$$\sum \frac{\sin(2n-1)z}{(2n-1)[m^2+(2n-1)^2]^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et d'autres analogues où les sinus sont remplacés par des cosinus, des sinus ou des cosinus élevés au carré, etc.

Ce Mémoire se termine par diverses Notes où l'on remarquera la démonstration très simple d'une relation qui exprime le $p^{\text{ième}}$ nombre d'Euler linéairement au moyen des p premiers nombres de Bernoulli. J. T.

ROUCHÉ (E.) et LÉVY (L.). — ANALYSE INFINITÉSIMALE A L'USAGE DES INGÉNIEURS. Tome second. Calcul intégral : Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations. 1 vol. in-8° de l'*Encyclopédie industrielle* (Lechalas). 648 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Ce second volume, comme le premier, s'adresse à ce public d'ingénieurs, nombreux en France, qui ont reçu une forte instruction mathématique, qui, même dans leur métier, ne se désintéressent pas de la Science, qui peuvent sans doute avoir besoin de retrouver dans un livre les éléments théoriques de la solution d'un problème pratique, qui sont bien aises d'y rencontrer des applications concrètes, dont la nature leur est familière et qui peuvent leur servir de modèle, mais qui ne seront pas fâchés de trouver à côté des indications sur quelque théorie élevée, dont peut-être ils n'auront pas à se servir. Faut-il s'étonner s'il y a des ingénieurs auxquels un barême ne suffit pas et qui ont, pour ainsi dire, besoin de jouissances scientifiques, lorsqu'on rencontre des ingénieurs au premier rang des savants? Ce volume d'une Encyclopédie industrielle où l'on traite de l'inversion des intégrales hyper-

elliptiques et de la réduction des intégrales abéliennes, de la transcendance des nombres e et π, caractérise un intéressant état d'esprit. Notons toutefois que les auteurs ont su se borner et écarter des développements très importants sans doute, comme les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles, mais qui ne doivent assurément pas grossir un livre de cette nature, ou prendre la place de ces procédés d'intégration dont le lecteur a surtout besoin.

Les deux premiers Chapitres se rapportent aux intégrales indéfinies et définies; on y trouvera en particulier les procédés classiques pour le calcul des fonctions primitives, d'intéressants exemples de détermination d'intégrales définies, la notion d'intégrale curviligne et la condition sous laquelle on peut affirmer qu'une intégrale ne dépend pas du chemin parcouru. Je demande la permission, à propos de l'un des points les plus élémentaires de ces théories, de faire une observation purement pédagogique, qui n'a rien de spécial au livre de MM. Rouché et Lévy, qui m'est simplement revenue à l'esprit en le lisant. Les auteurs insistent avec raison sur les précautions qu'il y a lieu de prendre, dans la pratique, lorsque dans une intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

on fait une substitution telle que $x = \varphi(t)$. Je n'entends nullement parler ici des difficultés relatives aux discontinuités; mais j'ai souvent observé que les commençants, dans l'application de la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

étaient arrêtés par la détermination des limites α, β de l'intégrale du second membre, qui correspondent aux limites a, b de l'intégrale du premier membre. On fonde habituellement la démonstration de cette formule sur la notion de fonction primitive et sur la règle de dérivation qui se rapporte aux fonctions de fonction. Dès lors, ne serait-il pas bon de faire remarquer explicitement qu'on peut choisir arbitrairement α parmi les racines de l'équation $a = \varphi(t)$, β parmi les racines de l'équation $b = \varphi(t)$,

si l'on est certain que t variant de α à β, la fonction $\varphi'(t)$ reste continue, et que la fonction $\varphi(t)$ reste comprise entre des limites A et B telles que $f(x)$ soit continue lorsque x varie entre A et B? Il n'importe pas que $\varphi(t)$ varie dans un sens ou dans un autre et sorte ou non des limites a, b de l'intégrale du premier nombre, en sorte que l'attention doit se porter essentiellement sur les valeurs de t qui rendent discontinus l'un des facteurs $f[\varphi(t)]$, $\varphi'(t)$. Il est naturel de choisir, comme on le recommande souvent, un couple α, β tel que t variant de α, β, la fonction $\varphi(t)$ varie de a à b en croissant toujours ou en décroissant toujours; mais cela n'est point nécessaire. Je demande encore une fois pardon de cette digression; et je reviens au livre de MM. Rouché et Lévy.

Le troisième Chapitre se rapporte à l'intégration des fonctions d'une variable imaginaire; il contient les propositions principales qui résultent immédiatement du théorème fondamental de Cauchy et divers exemples importants de détermination d'intégrales définies.

Les auteurs traitent ensuite des polynomes de Legendre, de cette formule de Lagrange auquel l'un d'eux a consacré jadis un beau Mémoire, des fonctions eulériennes et de la formule de Stirling. L'étude sommaire des polynomes de Legendre est nécessitée par le rôle qu'ils tiennent dans la méthode des quadratures de Gauss, qui trouvera sa place un peu plus loin, dans les applications géométriques. Peut-être MM. Rouché et Lévy auraient-ils pu consacrer quelques lignes à la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, dont ils n'étaient pas loin, et qui ne semble pas dénuée d'intérêt pratique. A ce point de vue, les séries trigonométriques ne pouvaient être passées sous silence, et les auteurs en disent ce qu'il est indispensable de savoir; ils ajoutent un mot sur les séries de polynomes.

Outre les règles essentielles relatives à l'évaluation des intégrales doubles, les applications aux intégrales eulériennes, aux intégrales de Fresnel, signalons les notions sur les intégrales de surface, la formule de Green dans le plan, la formule de Stokes. Le théorème de Gauss sur l'intégrale

$$\int \frac{\cos(n, r)}{r^2} d\tau$$

trouvera sa place dans le Chapitre suivant sur les applications géométriques. Notons encore, dans ce même Chapitre, le paragraphe concernant la courbure totale d'un triangle formé par des arcs de géodésiques. J'ai déjà dit que c'était là aussi que les auteurs avaient parlé des quadratures approchées.

Après avoir traité des intégrales triples, les auteurs ont reproduit ou résumé, en vingt-sept pages, les formules les plus usuelles concernant le calcul des intégrales. Un Tableau de ce genre est chose fort pratique; rien n'est plus insupportable que de recommencer l'un de ces calculs de réduction qu'on a déjà fait vingt fois, et où l'agacement de ne pas avoir sous la main la formule dont on a besoin est une cause d'erreurs.

Le Chapitre IX est consacré au potentiel et à quelques théories voisines; on y trouvera en particulier les formules d'Ostrogradski et de Green, les conditions de Dirichlet pour qu'une fonction soit un potentiel, des notions sur les fonctions de Laplace et les développements en série de ces fonctions, le théorème de Vaschy sur les champs de force.

Le Chapitre suivant contient un résumé de la théorie des fonctions elliptiques, sur lesquelles on sait que l'un des auteurs a écrit un petit Traité fort pratique. On trouvera dans ce Chapitre les définitions et propositions essentielles sur les fonctions sn, cn, dn, p, ζ, σ, θ.

Les six Chapitres qui suivent se rapportent aux équations différentielles, ordinaires, simultanées, aux dérivées partielles. Je laisse de côté les propositions classiques sur l'intégration ou la réduction d'un certain nombre d'équations différentielles ordinaires, pour signaler dans le Chapitre consacré aux équations linéaires les nombreux et intéressants exemples d'équations particulières qui appartiennent au type de Fuchs; deux de ces exemples sont dus à M. Jean Résal; signalons aussi les détails sur les équations de Bessel, de Riccati, de Lamé.

La théorie élémentaire des équations aux dérivées partielles du premier ordre est traitée d'une façon claire et intéressante; les auteurs insistent sur le cas de deux variables indépendantes; ils expliquent toutefois la méthode de Jacobi et les propriétés fondamentales des crochets de Poisson.

Le Chapitre sur les équations aux dérivées partielles du second

ordre ne contient naturellement pas de théories générales : on y trouvera d'intéressants développements sur les équations des cordes vibrantes, de Laplace, de Liouville, de Monge, d'Ampère, des télégraphistes. La fin de ce Chapitre est due à M. Picard : celui-ci a résumé, sous une forme pratique, quelques-uns des beaux résultats qu'on lui doit sur l'usage de la méthode des approximations successives pour la détermination approchée des intégrales d'une équation aux dérivées partielles qui satisfont à certaines conditions aux limites.

Enfin le Volume se termine par une exposition élémentaire du calcul des variations. Les auteurs n'ont pas manqué d'insister comme il convenait sur les exemples et les applications.

Je souhaite que la courte analyse qui précède suffise au lecteur pour se rendre compte de ce qu'il pourra trouver dans le Livre de MM. Rouché et Lévy. Quant aux qualités de la rédaction et de l'exposition, le nom des auteurs suffit à le renseigner. J. T.

DASSEN (C.). — ÉTUDE SUR LES QUANTITÉS MATHÉMATIQUES. GRANDEURS DIRIGÉES. QUATERNIONS. 1 vol. in-8°, IV-133 pages, Paris, Hermann, 1903.

Cette *Étude* a été composée sur l'invitation de la *Société scientifique argentine*, en vue d'un Volume qu'elle se proposait de publier pour commémorer le 30e anniversaire de sa fondation. Elle peut être regardée comme une suite au travail de l'auteur sur la *Métaphysique des concepts mathématiques fondamentaux*, dont le *Bulletin* a rendu compte : la philosophie et l'histoire y tiennent une large place. On y trouvera le développement de l'idée de nombre, la théorie des opérations sur les nombres positifs, l'introduction des nombres négatifs considérés comme représentant des quantités susceptibles de deux sens opposés, des nombres imaginaires regardés comme représentant des vecteurs dans un plan, enfin des quaternions, considérés aussi au point de vue géométrique. Tout ce développement est présenté sous une forme élémentaire et mêlé de renseignements historiques, souvent

intéressants et parfois peu connus. Peut-être quelques modes de raisonnements auraient-ils pu être laissés dans l'oubli; mais les positivistes, auxquels d'ailleurs je ne suis pas bien sûr qu'il faille rattacher M. Dassen, aiment à répéter que la philosophie est l'histoire des erreurs de l'esprit humain; il faut donc, si l'on veut philosopher, tenir compte de ces erreurs.

Au point de vue philosophique, M. Dassen est de ceux qui attribuent à l'expérience la plus large part dans la formation des concepts mathématiques; il insiste beaucoup sur le rôle utilitaire de la Science, et en cela il se rattache sûrement à Auguste Comte, qui faisait moins de cas de la vérité pour elle-même que pour son utilité sociale; cette utilité mesurait pour lui et limitait la valeur de la Science et j'ai lu quelque part que la découverte de Neptune ne l'intéressait nullement. Si même on acceptait théoriquement cette doctrine, il me semble qu'elle est pratiquement ruinée par l'histoire du développement de la Science et de ses applications. Les découvertes les plus utiles ont été faites en se proposant pour but, non l'utilité, mais la connaissance et la coordination des faits; de cette connaissance est résultée souvent la solution d'une question pratique, à laquelle l'auteur n'avait nullement pensé avant sa découverte, qui peut-être lui aurait échappé s'il s'était tout d'abord acharné à résoudre le problème pratique, s'il s'était laissé hypnotiser par ce que ce problème avait d'angoissant. Ce n'est pas leur intérêt pratique qui rend les faits intelligibles, et leur coordination logique est indifférente à nos inquiétudes, à nos besoins et à nos souffrances. De là suit la nécessité de laisser à celui qui cherche toute liberté dans la recherche et la spéculation. Ce n'est ni l'utilité immédiate, ni la conformité à nos habitudes d'esprit, c'est l'histoire qui juge la valeur pratique des doctrines scientifiques, et encore faut-il ajouter que l'histoire n'est jamais finie. Il ne faut point limiter et prétendre diriger la curiosité scientifique, ni dire qu'elle est vaine, puisque ses bienfaits pratiques sont très évidents.

C'est dans l'enseignement que la doctrine utilitaire reprend ses droits, parce qu'on ne peut tout apprendre, que la vie est courte, et que les nécessités pratiques guettent la plupart de ceux auxquels s'adresse cet enseignement; encore, faut-il faire une réserve spéciale pour le degré qui s'adresse à ceux qui veulent s'initier, non

plus à la science faite, mais à la science en formation, et une réserve générale, puisque, à aucun degré, la coordination logique des idées ne doit être sacrifiée, si l'on ne veut point se réduire à un recueil de recettes. Au reste le livre de M. Dassen a un caractère trop scientifique pour qu'on soit bien assuré que l'auteur souscrirait volontiers à ces dernières réserves. J. T.

LAURENT (H.). — PETIT TRAITÉ D'ÉCONOMIE POLITIQUE MATHÉMATIQUE, rédigé conformément aux préceptes de l'École de Lausanne. 1 vol. petit in-8°, 60 pages, Schmid, 1902.

Ce petit Traité est agréable à lire pour les personnes qui ont quelques connaissances mathématiques, précisément parce que l'auteur y parle le langage auquel elles sont habituées; elles auront plaisir à savoir, au bout de quelques pages, ce qu'est l'*ophélimité* de M. Walras, les théorèmes fondamentaux que le savant professeur de Lausanne a déduits de cette notion, la formule de M. Pareto sur la répartition des revenus, la répercussion des variations de l'escompte sur le prix des métaux précieux, les principes de la théorie du change, etc. On lira d'ailleurs avec amusement et profit les réflexions que l'auteur a mises à la fin de son livre sur les banques, les opérations de Bourse, l'impôt, la civilisation, le progrès, la statistique et la population, l'instruction publique, le socialisme, la prévoyance, etc. : les unes sont instructives, d'autres feront réfléchir le lecteur, lors même qu'elles choqueraient ses habitudes d'esprit; si parfois elles prêtent à rire, c'est que M. Laurent l'a voulu expressément. Il faut le féliciter de sa bonne humeur, qu'il puise sans doute dans la certitude qu'il a de la vérité de sa doctrine; mais je ne voudrais pourtant pas insinuer que les économistes, lorsqu'ils sont solennels, sérieux ou simplement ennuyeux, ne croient point ce qu'ils disent. J. T.

BOREL (E.). — Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France, recueillies par M. *L. Zoretti*, 1 vol. in-8°, VI-122 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Fidèle à la méthode qui assure le succès des *Nouvelles Leçons sur la Théorie des fonctions*, M. Borel reprend, au début de son livre, celles des théories classiques ou des propositions déjà développées dans quelqu'un de ses livres antérieurs, qui sont essentielles pour l'intelligence des théories nouvelles qu'il a en vue dans celui-ci. Sans doute, ceux qui n'ont pas encore lu les *Nouvelles Leçons* feront bien de les lire dans l'ordre où elles ont été publiées; mais cela n'est point nécessaire, et, si l'on veut intervertir cet ordre, on sera tout au plus amené parfois à consulter quelque autre volume que celui dont on a entrepris la lecture, pour compléter une démonstration ou approfondir un théorème. Toutefois cette méthode, grâce au talent et à la richesse d'idées de l'auteur, n'implique presque pas de redites; et, dès les premières pages, dans un sujet qu'il croit posséder à fond, le lecteur est intéressé par la nouveauté, soit de l'exposition, soit des réflexions qui l'accompagnent. M. Zoretti, qui a recueilli ces leçons, à qui l'on doit même deux des Notes qui terminent le Volume, a su conserver la manière et le style du maître.

Après avoir rappelé les principales propriétés des fonctions analytiques et de leurs singularités, l'auteur donne du théorème de M. Mittag-Leffler, sur la représentation d'une fonction uniforme admettant une infinité de pôles, en nombre fini dans toute région bornée du plan, une démonstration extrêmement simple, et en déduit immédiatement le théorème de Weierstrass sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires; il s'occupe ensuite des propriétés de la série de Taylor qui représente une fonction méromorphe, pour montrer les renseignements que peut fournir cette série sur les pôles qui se trouvent sur le cercle de convergence. On sait assez que ces résultats, d'une importance capitale, sont dus à M. Hadamard; ce n'est pas toutefois la méthode de ce géomètre qu'expose M. Borel; il substitue à cette méthode une autre plus simple, qui, à la vérité, ne va pas aussi loin, mais qui

suffit à établir ceux des résultats de M. Hadamard qui seront utilisés dans la suite; elle est d'ailleurs présentée d'une façon très lumineuse.

Une application, que les lecteurs du *Bulletin* connaissent déjà [1], concerne les fonctions méromorphes, dans un cercle de rayon supérieur à 1 et susceptibles d'être représentées, dans ce cercle, par un développement de Taylor à coefficients entiers; elles sont le quotient de deux polynomes à coefficients entiers. Signalons en passant cette remarque incidente : étant donné un développement quelconque en série de Taylor, on peut lui substituer un développement à coefficients rationnels représentant une fonction ayant mêmes singularités que la première dans tout le plan.

On sait aussi que M. Hadamard a su tirer parti des résultats généraux qu'il avait obtenus, pour obtenir des renseignements importants sur les zéros d'une fonction entière en considérant, conformément à une observation de Cauchy, le développement de Taylor de l'inverse de cette fonction; c'est un point que développe encore M. Borel et dont il donne une intéressante application aux racines de l'équation.

$$e^x = P(x),$$

où $P(x)$ désigne un polynome.

C'est ensuite à ce théorème de M. Picard sur les fonctions entières, théorème dont il a fait une étude si profonde, que s'attache M. Borel, pour l'étendre aux fonctions méromorphes. Comme il a toutefois besoin des inégalités qui relient le module maximum d'une fonction entière à son ordre, il profite de l'occasion pour exposer la méthode si simple par laquelle M. Lindelöf établit ces inégalités. Quant à l'extension du théorème de M. Picard, elle consiste dans l'énoncé que voici :

Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre ρ et une autre fonction méromorphe quelconque $\varphi(z)$ d'ordre inférieur, parmi les équations

$$f(z) = \varphi(z),$$

il n'y en a pas en général d'exceptionnelles, et, s'il y en a, il y en a deux au plus.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XVIII$_1$, 1894, p. 22.

L'*ordre* d'une fonction méromorphe, mise sous la forme du quotient de deux fonctions entières, c'est celui des ordres de ces deux fonctions qui est le plus grand. Une équation de la forme précédente est *exceptionnelle* si l'exposant de convergence de la suite de ses racines est inférieur à ρ; cet exposant de convergence est, en général, égal à ρ.

L'ordre d'une fonction méromorphe f se conserve lorsque l'on substitue à cette fonction une transformée homographique.

$$\frac{af-b}{cf-d},$$

où a, b, c, d sont des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ.

Lorsque, parmi les transformées homographiques de la fonction f ne figure aucune fonction entière, il ne peut y avoir d'équation exceptionnelle. Lorsque, parmi ces transformées, figure une fonction entière pour laquelle le cas exceptionnel de M. Picard ne se présente pas, il y a parmi les équations de la forme considérée une équation exceptionnelle et une seule; enfin, dans le dernier cas possible, celui où une transformée homographique est une fonction entière qui se trouve dans le cas d'exception de M. Picard, il y a deux équations exceptionnelles et deux seulement.

D'une façon plus particulière si $G(z)$ est une fonction méromorphe, et si les trois équations

$$G(z)=a,$$
$$G(z)=b,$$
$$G(z)=c,$$

où a, b, c sont trois constantes distinctes, ont chacune un nombre limité de racines, $G(z)$ se réduit à une fraction rationnelle.

Le dernier Chapitre est consacré à l'étude des séries de fonctions rationnelles, et, spécialement, des *séries canoniques*, c'est-à-dire de celles dont chaque terme est une fraction rationnelle à un seul pôle dont le numérateur est de degré inférieur au dénominateur et qui, conformément à la règle bien connue, est diminuée d'un polynome obtenu en prenant les premiers termes du développement de la fraction suivant les puissances de la variable, de manière que la série soit convergente. D'ordinaire, afin de simplifier l'écriture, M. Borel se borne au cas où chaque pôle est simple, en

sorte que les fractions qui figurent dans les développements qu'il considère sont du type

$$\frac{A_n}{z - a_n}.$$

Un des résultats importants de ce Chapitre consiste à montrer que, sous certaines conditions très larges, une fonction méromorphe, qui est le quotient de deux fonctions entières $G(z)$, $F(z)$ d'ordre ρ, peut être regardée comme la somme de deux termes dont l'un est une série canonique et l'autre une fonction entière d'ordre au plus égal à ρ. Il faut, pour cela, que les zéros du dénominateur $F(z)$ ne se rapprochent pas indéfiniment deux par deux.

Dans l'étude de cette proposition intervient la considération de l'aire extérieure à un ensemble de petits cercles dont chacun entoure un pôle de la fonction, tel que l'aire totale de tous ces petits cercles exclus, ou même la somme de leurs rayons soit finie. Cette considération s'applique à l'étude de sommes

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

lors même qu'elles ne représentent plus une fonction méromorphe et que la distribution des points a_n est quelconque, par exemple sur un segment AB de l'axe des quantités réelles; en faisant intervenir la proposition dont l'auteur a déjà montré plusieurs fois la portée, d'après laquelle les points, appartenant à une suite de segments dont chacun est contenu dans AB et dont la somme est moindre que AB, ne peuvent épuiser tous les points de AB, l'auteur montre comment la somme précédente peut être convergente en des points extérieurs aux petits segments qui entourent les points a_n.

Cette méthode, sous des conditions convenables, s'applique à des fonctions méromorphes de la forme précédente, en excluant les aires intérieures à de petits cercles qui entourent les pôles, de manière à mettre en évidence l'existence de contours, dits *courbes de convergence,* sur lesquels la série est uniformément convergente, et pour lesquels subsiste la formule de Cauchy

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \sum A_n.$$

bien que le contour C puisse traverser des régions où la fonction cesse d'être analytique.

On remarquera encore l'étude de la décomposition en éléments simples dans le cas où la distribution des pôles est quelconque, étude fondée sur la formule

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z^m\Phi(z)(z-x)} = \frac{F(x)}{x^m\Phi(z)} - \sum \frac{F(a_n)}{a_n^m\Phi'(a_n)}\,\frac{1}{x-a_n} + R,$$

où R est le résidu relatif au pôle o, en supposant que, pour une puissance convenable de m, l'intégrale du premier membre tende vers zéro quand les contours C_k, qui s'enveloppent mutuellement, s'éloignent indéfiniment. Une complication, que l'auteur parvien à lever, concerne le cas où l'on suppose que l'exposant m varie avec C_k. On retrouve ainsi, d'une part, la formule de M. Mittag-Leffler; d'autre part, cette décomposition d'une fonction méromorphe d'ordre ρ en une série canonique, et une fonction entière d'ordre au plus égal à ρ dont il a été déjà question.

Quatre Notes terminent l'Ouvrage. La Note I et la Note III ont été rédigées par M. Zoretti : l'une se rapporte aux résultats nouveaux obtenus par M. Lindelöf sur les relations entre l'ordre de grandeur d'une fonction entière et ses zéros, l'autre à une formule due à M. Helge von Koch sur la somme des résidus des pôles d'une fonction méromorphe, situés à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine.

Quant aux deux Notes de M. Borel, l'une concerne un important résultat qu'ont obtenu, séparément, M. Pierre Boutroux et M. Lindelöf, d'après lequel il est possible de former des fonctions de genre $p-1$ dont la somme soit une fonction de genre p; l'autre se rapporte aux recherches de M. Maillet, à ces nombreuses et intéressantes extensions des propriétés des fonctions entières ou méromorphes à ces fonctions qu'il appelle *quasi-entières* ou *quasi-méromorphes*. J. T.

WOELFFING (E.). — MATHEMATISCHER BÜCHERSCHATZ, *systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des* 19. *Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften.* In zwei Teilen. I. Teil : *Reine Mathematik.* 1 vol. in-8°, XXXVI-416 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

Il nous suffira évidemment de signaler à nos lecteurs cette intéressante publication bibliographique. L'auteur, en donnant les titres des Ouvrages les plus importants publiés au cours du XIXe siècle, nous apporte évidemment un très utile complément à ce qui concerne les Mathématiques dans le *Catalogue of scientific papers,* où les Mémoires contenus dans les périodiques sont seuls indiqués. Le but qu'il voulait atteindre le mettait en présence d'un écueil redoutable : l'innombrable quantité des *tirages à part* qui paraissent aujourd'hui et qui sont souvent mis dans le commerce comme les Traités proprement dits. Il est certain qu'il y a dans sa publication bien des articles qui figurent déjà dans le *Catalogue;* mais, comme dit le proverbe, abondance de biens ne nuit pas.

Le nouvel Ouvrage, accompagné de Tables commodes, est précédé d'une intéressante esquisse historique sur les ressources bibliographiques qui sont à la portée des mathématiciens. Il sera suivi d'une publication analogue relative aux Mathématiques appliquées, c'est-à-dire au Calcul des Probabilités; au Calcul numérique, graphique et géométrique; au Dessin et à la Géométrie descriptive, à la Mécanique, à la Physique mathématique et à l'Astronomie.

L'auteur demande instamment qu'en vue de la nouvelle édition, chaque lecteur lui signale les erreurs ou omissions qu'il pourrait avoir remarquées. C'est surtout en Bibliographie qu'il est difficile de parvenir du premier coup à la perfection. C'est là surtout que la méthode des approximations successives peut trouver son emploi. G. D.

BAUER (G.). — VORLESUNGEN ÜBER ALGEBRA; 1 vol. in-8°, VI-376 pages. Teubner, 1903.

Cette publication, entreprise par le *Mathematischer Verein* de Münich, est un hommage rendu par ses élèves à un maître vénéré, dont on a fêté le quatre-vingtième anniversaire en novembre 1900. Le beau portrait de M. G. Bauer, qui orne le frontispice du livre, donne l'impression d'une vieillesse singulièrement vigoureuse, et d'une intelligence que l'âge n'a diminuée en rien. On a dit avec raison qu'il fallait avoir quelque reconnaissance à ceux qui vieillissent ainsi : par leur bel exemple, ils entretiennent, chez ceux qui sont venus après eux, une secrète espérance qui les réconforte.

Il est impossible, en regardant ce portrait, de ne pas s'émerveiller à la pensée de l'extraordinaire mouvement scientifique dont M. G. Bauer a été le témoin éclairé ; malgré le caractère élémentaire de ces leçons d'Algèbre, combien de découvertes faites du vivant de l'auteur y ont pénétré ! combien de théories, qui sont aujourd'hui classiques, et dont l'origine ne préoccupe plus les étudiants, ont dû garder pour lui cet air de jeunesse et de nouveauté que nous attribuons, malgré nous, à tout ce que nous avons vu naître.

Est-ce à cette impression persistante, ou au louable désir de faciliter les choses aux commençants qu'il faut attribuer quelques sacrifices que l'auteur a consentis plus volontiers que d'autres n'auraient fait, et qui seraient sans doute très défendables si seulement le lecteur était prévenu d'une façon plus explicite ? Il eût été, à ce qui me semble, préférable d'avertir celui-ci des difficultés qui subsistent dans les démonstrations adoptées pour établir le théorème fondamental de l'Algèbre, ou l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques générales, à partir du cinquième degré : la grande simplicité de ces démonstrations a l'avantage de donner à l'étudiant une initiation facile dans ces questions, dont l'intérêt et l'importance lui apparaissent immédiatement, sans qu'il soit rebuté par l'appareil compliqué dont il est vrai que ces démonstrations doivent être étayées pour qu'elles soient parfaitement solides.

Au reste, le goût de la simplicité se montre dans le livre tout entier, dont la lecture est facile et agréable, et dont on ne manquera pas d'apprécier la clarté.

Il est divisé en quatre sections. La première comprend les propriétés élémentaires des polynomes et des fractions rationnelles, la théorie des fonctions symétriques, de l'élimination et de la transformation des équations. La seconde se rapporte à la résolution algébrique des équations, aux éléments de la théorie de Galois, des équations binomes et des équations abéliennes, ainsi qu'à quelques propositions de la théorie des nombres, indispensables pour les études qu'on vient d'énumérer. La troisième est consacrée à la résolution numérique des équations; on y notera, en dehors des propositions classiques qu'il est inutile de rappeler, l'exposition de la méthode de Graeffe. Dans la quatrième, enfin, se trouve développée la théorie des déterminants et de leurs principales applications. Deux Notes concernent l'une les fractions continues, l'autre la déduction d'une formule qui donne la somme des puissances semblables d'une équation du second degré.

J. T.

STOFFAES. — Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques. 2e édition, entièrement refondue. In-8°, VII-536 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

La première édition du *Cours de Mathématiques supérieures* de M. l'abbé Stoffaes date de 1891; le succès qu'il a obtenu montre qu'il répondait à un besoin réel. Au reste, d'autres livres ont paru depuis dont les auteurs se sont aussi préoccupés de mettre rapidement les étudiants en possession des connaissances mathématiques nécessaires pour l'étude de la Physique: dans un grand nombre de Facultés, des Cours de mathématiques ont été institués, à la même intention, et, cette année même, une chaire magistrale est créée à la Faculté des Sciences de Paris, sous le titre de *Mathématiques générales,* pour marquer l'importance que l'on attache avec raison à un enseignement de cette nature.

La réaction contre l'abus des *Mathématiques spéciales* s'accentue.

On doit savoir gré à M. l'abbé Stoffaes d'avoir été l'un des premiers à procurer aux étudiants le moyen d'éviter des études préliminaires, longues et souvent inutiles. La nouvelle édition de son livre a été complétée sur plusieurs points. Signalons, en particulier, l'addition d'un paragraphe (d'ailleurs indispensable) sur les intégrales curvilignes, qui a été rédigé par M. R. d'Adhémar.

J. T.

KÖNIG (J.). — EINLEITUNG IN DER ALLGEMEINE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GRÖSZEN. Aus dem ungarischen übertragen vom Verfasser. 1 vol. in-8°, VI-564 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

Cette *Introduction à la théorie générale des grandeurs algébriques* réalise dans l'exposition des principes fondamentaux un progrès qui, à bien des égards, semble définitif, d'autant qu'elle n'emprunte aucune donnée étrangère à la pure Algèbre, ni le nombre irrationnel, ni la continuité, ni rien de la théorie des fonctions : on reste là dans le domaine du fini et M. König a pu écrire à la première page de son livre : un *nombre algébrique,* dans le sens le plus général du mot, est un concept dont le contenu peut être décrit au moyen d'un nombre fini de nombres entiers positifs. Cette définition, sans doute, est trop large et l'objet même du Livre est de la préciser ; elle doit cependant rester devant l'esprit du lecteur, qui, en poursuivant l'étude du Livre, se débarrasse peu à peu de ses anciennes habitudes d'esprit pour s'assimiler la façon de penser de l'auteur, et se convainc de plus en plus que celui-ci ne l'a pas trompé. Les mathématiciens mettent leur orgueil à bâtir les palais les plus vastes avec le moins de matériaux qu'il est possible ; la pauvreté et l'uniformité de la matière font la richesse de ces palais, qui semblent d'autant plus somptueux que leurs longues galeries sont plus vides, et qu'aucun objet étranger n'empêche la lumière d'en faire valoir les infinies perspectives.

Qu'il fût possible de réduire à ce minimum les concepts de l'Algèbre, c'est ce dont on ne doutait guère depuis que Kronecker avait publié sa *Festschrift,* pour le Jubilé du doctorat de Kummer; au reste, M. König caractérise modestement son œuvre en lui donnant pour but la vulgarisation des vues de l'illustre algébriste; mais plus d'un avait reculé devant ce travail; il faut féliciter M. König de l'avoir entrepris et mené à bien; la profondeur des vues de Kronecker n'en ressort que mieux, maintenant que les plus importantes lacunes sont comblées.

L'auteur a introduit quelques mots nouveaux, avec discrétion d'ailleurs; la terminologie de Kronecker, qu'il convient de respecter, est très rigide dans sa précision, il était nécessaire d'introduire quelques concepts plus généraux, ne fût-ce que pour éviter d'inutiles répétitions: tels sont au début les concepts de domaine holoïde ou orthoïde (*holoïder, orthoïder Bereich*). Un ensemble de grandeurs (*Grössen*), dont on ne précise pas d'ailleurs la nature, qui peuvent être en nombre fini ou infini, constitue un domaine holoïde quand ces grandeurs sont susceptibles d'être ajoutées et multipliées de manière que les résultats de ces opérations, qui obéissent d'ailleurs aux lois de l'addition et de la multiplication ordinaires, appartiennent à l'ensemble, qui, en outre, doit contenir tous les nombres entiers. Il est proprement holoïde s'il y a dans le domaine des grandeurs α, β telles que l'équation

$$\alpha\xi = \beta$$

ne soit vérifiée par aucune grandeur du domaine; lorsque cette équation admet une solution pour α autre que 0, le domaine est dit improprement *holoïde* ou *orthoïde*. Un domaine proprement holoïde donne lieu à une théorie de la divisibilité, à la notion des *unités,* qui sont les diviseurs de 1, à la notion des éléments (absolument) équivalents dont chacun divise l'autre, des diviseurs propres d'une grandeur du domaine, qui ne sont ni une unité ni cette grandeur, des grandeurs irréductibles, qui n'admettent point de diviseur propre, des grandeurs premières (*Primgrössen*) π, telle que le produit $\alpha\beta$ de deux grandeurs du domaine ne puisse être divisible par π sans que l'un des facteurs soit divisible par π, du plus grand commun diviseur (α, β) de deux gran-

deurs α, β qui divise ces deux grandeurs, et qui en outre divise tout commun diviseur de α, β. Le domaine holoïde est *complet* si un couple d'éléments quelconques admet un plus grand commun diviseur.

Les premières pages du Livre de M. König, où sont développées ces notions, étonnent au premier abord, chez un disciple de Kronecker, par ce caractère de spéculation purement logique, que le maître n'aimait pas : on sait assez qu'il rejetait dédaigneusement hors des mathématiques toute spéculation qui n'aboutit pas entièrement, toute solution dont l'existence est logiquement démontrée mais qu'on ne sait pas obtenir explicitement: On se convainc bien vite, en poursuivant la lecture, que M. König est resté fidèle à l'esprit de la doctrine de Kronecker ; à plusieurs reprises, il insiste sur ce qu'il ne considère que des domaines holoïdes qui, d'une part, sont bien définis, et où, d'autre part, on *sait réaliser* les opérations dont il parle : ainsi il est bien entendu que, s'il s'agit d'un domaine proprement holoïde dont α, β sont deux grandeurs, on devra être en possession d'un procédé qui permette de reconnaître, au moyen d'un nombre fini d'opérations qu'on sait effectuer, s'il y a une grandeur ξ du domaine pour laquelle on ait $\alpha\xi = \beta$ et de déterminer cette grandeur, d'un procédé qui permette de reconnaître s'il y a un plus grand commun diviseur à α, β et de déterminer ce plus grand commun diviseur, de reconnaître encore si une grandeur est irréductible. Cette hypothèse une fois faite bien explicitement, on ne sort pas de cette doctrine étroite qui n'accorde une valeur mathématique aux raisonnements que lorsqu'ils aboutissent à des résultats explicites, si même on ne raisonne sur des éléments qui ne sont spécifiés que par certaines propriétés qu'on leur attribue, propriétés sur lesquelles sont exclusivement fondées les démonstrations ; l'avantage qu'il y a à porter l'attention non, en quelque sorte, sur la matière des éléments que l'on considère, mais uniquement sur celles des propriétés qui interviennent dans les démonstrations, propriétés auxquelles ces démonstrations donnent une nouvelle forme, est évident ; l'économie qui en résulte est double ; d'une part, l'attention n'est pas divisée ; d'autre part, en changeant le contenu des éléments, dont on garde les propriétés, on n'a point à recommencer les raisonnements. Au reste, si l'on

veut bien y réfléchir, c'est l'essence même du raisonnement mathématique, que de faire abstraction de la matière des éléments sur lesquels on raisonne : il suffit, par exemple, de prendre le mot *matière* dans son sens propre, et de penser à la Géométrie.

Il est toutefois nécessaire, pour que le lecteur ne soit pas rebuté par cette abstraction, et qu'il n'éprouve pas la fatigante sensation de mâcher à vide, qu'il puisse, à chaque instant, mettre un contenu réel sous les énoncés : c'est la raison pour laquelle M. König, dès les premières pages de son Livre, interrompt ses raisonnements pour donner un exemple d'un domaine proprement holoïde, qui ne soit pas *complet*, au sens qui a été précisé plus haut ; au début, le lecteur est suffisamment soutenu et guidé par le souvenir des propriétés des nombres entiers, ou des polynomes; mais, s'il ne possède que les éléments de l'Arithmétique et de l'Algèbre, il est troublé par cette distinction des domaines holoïdes en domaines complets et incomplets, précisément parce qu'il ne connaît aucun exemple d'un domaine holoïde qui soit incomplet : l'auteur se hâte de lui en fournir un. Après avoir expliqué en quelques lignes comment est constitué le domaine des entiers complexes de la forme $a + b\sqrt{-k}$ où k est un nombre naturel et a, b des entiers ordinaires, et comment se font les opérations fondamentales dans ce domaine, il s'arrête à montrer, d'après M. Dedekind, comment, par exemple, en prenant $k = 5$, les nombres 9 et $3(1 - 2\sqrt{-5})$, dont les diviseurs communs sont 1, 3 et $2 - \sqrt{-5}$, n'ont pas de plus grand commun diviseur, puisque aucun des trois nombres 1, 3, $2 - \sqrt{-5}$ n'est divisible par les deux autres.

Parmi les mots nouveaux introduits par M. König dans les éléments, signalons encore celui-ci : le domaine de congruence (*Kongruenz beirech*) désigne un domaine holoïde qui fait partie d'un domaine holoïde donné [A]; on choisit d'abord parmi les éléments de ce domaine [A] un système de modules

$$(M_1, M_2, \ldots, M_h).$$

Les grandeurs du domaine de congruence, que détermine ce système de modules, sont celles qui peuvent être mises sous la forme

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots + \alpha_h M_h,$$

en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ des grandeurs quelconques du domaine [A].

Si l'on considère un domaine holoïde [A] et m indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les polynomes ou plutôt les formes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dont les coefficients sont des grandeurs de [A] constituent un nouveau domaine holoïde $[A, x_1, x_2, \ldots, x_m]$. Il convient toutefois de s'arrêter un peu sur le sens du mot *forme,* que M. König emploie, comme faisait Kronecker, sans se préoccuper de l'homogénéité, et qui doit être soigneusement distingué d'une fonction entière, quoique l'écriture pour représenter l'une ou l'autre soit la même ; il n'est point question ici de rien qui ressemble à des valeurs numériques attribuées soit aux indéterminées soit à la forme ; la forme n'est autre chose que le complexe de ses coefficients à chacun desquels est attaché le système des exposants qui affectent les diverses indéterminées dans le monome que ce coefficient multiplie symboliquement ; les indéterminées ne sont là que pour faciliter le dessin qui figure ce complexe : quand aux règles d'addition et de multiplication des grandeurs du domaine

$$[A, x_1, x_2, \ldots, x_m],$$

elles sont les règles élémentaires de l'algèbre pour l'addition et la multiplication des polynomes : ces règles pourraient très bien s'exprimer sans l'introduction des indéterminées, mais on voit assez la commodité qu'apporte cette introduction.

J'ai insisté sur ces notions et définitions, en raison même de leur caractère élémentaire, pour essayer de caractériser le mode d'exposition de M. König, qu'il serait difficile de suivre ici dans tout son développement, et pour donner au lecteur l'impression de l'ordre d'idées dans lequel il se meut ; j'ajouterai que le mode de raisonnement qui revient le plus souvent dans son Livre est l'*induction complète,* dont M. König a su faire, à plusieurs reprises, un emploi singulièrement heureux : ce mode de raisonnement comporte une parfaite sécurité par la certitude même où l'on est de ne point apporter dans la démonstration d'éléments étrangers à la question.

Je me contenterai, dans ce qui suit, d'exposer rapidement la suite des idées en insistant à l'occasion sur quelques points que

M. König a signalés lui-même dans sa Préface, et où sa contribution personnelle est particulièrement importante.

La notion de forme qui vient d'être rappelée conduit à la théorie des formes symétriques, des formes réduites, de la divisibilité. Signalons le théorème que voici, qui est dû à Kronecker :

Soient

$$F_j = \sum A_\sigma^{(j)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_m^{\sigma_m} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

k formes non nulles des indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *avec des coefficients appartenant au domaine holoïde* $[A]$, *soit*

$$F = F_1 F_2 \ldots F_k = \sum C_g x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_m^{\sigma_m},$$

leur produit, et soit enfin

$$P_i = A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \ldots A_{i_k}^{(k)},$$

le produit de k coefficients pris respectivement dans les formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$.

Il y a une suite de formes $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$ *à coefficients numériques entiers, entières et homogènes par rapport aux grandeurs* $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k-1)}$, *et une suite de formes* $L_{i,\sigma}^{(s)}$, *à coefficients numériques entiers, linéaires et homogènes par rapport aux grandeurs* C_g *telles que l'on ait*

$$H_s P_i = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\nu} L_{i,\sigma}^{(s)} H_\sigma \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Il résulte immédiatement de ce théorème que chaque produit P_i vérifie une identité de la forme

$$P_i^\nu + A_1^{(i)} P_i^{\nu-1} + \ldots + A_k^{(i)} P_i^{\nu-k} + \ldots + A_\nu^{(i)} = 0,$$

où $A_k^{(i)}$ est une forme, à coefficients numériques entiers, entière et homogène, de degré k, par rapport aux coefficients C_g de la forme produit ; naturellement les coefficients numériques de $A_k^{(i)}$ changent avec l'indice i.

Cette proposition se présente dans l'exposition de M. König comme ayant un caractère fondamental : et son importance appa-

raîtra dans le dernier Chapitre, pour un point difficile de la théorie des entiers algébriques; pour me borner à une conséquence immédiate, il en résulte, lorsque le domaine holoïde [A] est complet, que le plus grand commun diviseur des coefficients C_g coïncide avec le plus grand commun diviseur des produits P_i. La démonstration par induction du théorème de Kronecker que donne M. König est extrêmement simple; elle a pour point de départ le cas particulier du théorème où l'on ne considère que le produit de deux formes à une indéterminée, et le théorème, dans ce cas particulier, se ramène de suite à une proposition de M. Dedekind, en vertu de laquelle les produits tels que

$$P_r = a_0^{r_0} a_1^{r_1} \ldots a_m^{r_m},$$

où $r_0, r_1, \ldots, r_m$ sont des entiers non négatifs dont la somme est égale au nombre $n+1$, sont des formes linéaires à coefficients numériques entiers des déterminants du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre tirés du Tableau à $n+1$ colonnes et à $m+n+1$ lignes

$$\begin{matrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m & a_{m-1} & \ldots & \vdots \\ 0 & a_m & \ldots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_m, \end{matrix}$$

par la suppression de m lignes: cette proposition à son tour s'établit très brièvement par induction.

Au théorème de Kronecker se rattache étroitement la notion de la *forme des résolvantes* (*Resolventenform*), introduite par M. König, qui est l'extension à un système quelconque de formes de la notion du résultant (pour deux formes à une indéterminée) et qui s'exprime d'une façon linéaire et homogène au moyen des formes du système.

Je laisse de côté le Chapitre où M. König développe les propositions fondamentales de la théorie des grandeurs algébriques, et en particulier de la théorie de Galois, quoiqu'il convienne de signaler l'extrême clarté que prennent ces propositions du point de vue où il s'est placé, débarrassées qu'elles sont de tout élément

à apparence transcendante. La notion de l'adjonction, en particulier, se présente d'une façon purement formelle qui ne laisse place à aucune difficulté.

L'un des progrès essentiels réalisés par M. König consiste dans l'établissement d'une théorie générale de l'élimination : elle repose essentiellement sur la méthode d'élimination de Kronecker et sur cette *forme des résolvantes* dont il a été question plus haut : l'auteur parvient à une séparation très nette de l'ensemble des solutions d'un système de k équations $F_j = 0$ à m inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de façon à caractériser le degré de multiplicité de ces solutions. Cette théorie générale de l'élimination est suivie d'une exposition purement algébrique des propriétés des déterminants fonctionnels. Le problème de l'élimination, dans le sens spécial du mot, est ensuite repris de deux façons.

Lorsque l'on considère $m+1$ formes générales à m indéterminées

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, \ldots, m+1),$$

l'existence d'une forme irréductible $R(a)$ entière et à coefficients numériques entiers des coefficients a des formes F_i qui soit congrue à 0 suivant le système de modules $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$, résulte de la théorie générale de l'élimination : toutefois l'étude directe de cette résultante $R(a)$ mérite d'autant plus d'être faite qu'elle conduit à un procédé de formation par récurrence, s'appuyant au début sur les propriétés du déterminant de Sylvester; on peut signaler, à propos de cette étude, le paragraphe qui se rapporte aux équations homogènes, la signification précise attribuée au théorème de Bézout, et l'étude approfondie du discriminant d'un système de formes, ainsi que des solutions multiples.

Les deux Chapitres consacrés à ce que l'auteur appelle les *équations linéaires diophantiques* ne sont pas moins importants.

Soit A un système holoïde (proprement holoïde ou orthoïde) et $[A, x_1, \ldots, x_m]$ le domaine des formes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dont les coefficients sont des grandeurs de A. Soient

$$F_{i,0}, \quad F_{i,1}, \quad \ldots, \quad F_{i,l} \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

des formes appartenant au domaine $[A, x_1, \ldots, x_m]$, on se pro-

pose de déterminer des formes

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_l,$$

appartenant au même domaine, telles que l'on ait

$$F_{i,0} = F_{i,1} X_1 + F_{1,2} X_2 + \ldots + F_{i,l} X_l.$$

Le problème comprend deux cas essentiellement distincts suivant que A est un domaine orthoïde, ou que A est le domaine des nombres entiers. Après avoir exposé cette théorie des systèmes de modules ou de diviseurs (plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs systèmes de modules, système premier de modules, chaînes de diviseurs, etc.) qui constitue une extension si importante et si curieuse de la divisibilité, l'auteur distingue les deux cas signalés plus haut, qui doivent être traités séparément, de points de vue distincts, et qui conduisent d'ailleurs à des interprétations d'ordres très différents. Le problème posé est résolu dans les deux cas par une suite finie d'opérations élémentaires. L'étude du cas algébrique (A orthoïde) permet, entre autres résultats, d'étendre à l'espace à n dimensions le théorème de M. Nœther. Mais le résultat essentiel de cette théorie des équations diophantiques linéaires consiste dans la solution complète de ce problème important :

Étant donnés deux systèmes de diviseurs, reconnaître si l'un est contenu dans l'autre et, en particulier, si ces deux systèmes sont équivalents.

Toutes ces théories aboutissent en quelque sorte à la conclusion du Livre : les grandeurs et les formes algébriques entières.

Si l'on adjoint au domaine $[A, x_1, \ldots, x_m]$ une racine α de l'équation

$$F(z) = F_0 z^m + F_1 z^{m-1} + \ldots + F_m = 0,$$

dont les coefficients appartiennent à ce même domaine, dans lequel elle est supposée irréductible, on forme un domaine d'espèce (*Guttungsbereich*), Γ', qui contient toutes les grandeurs de la forme

$$\frac{G_0 + G_1 \alpha + \ldots + G_{m-1} \alpha^{m-1}}{H},$$

où $G_0, G_1, \ldots, G_{m-1}, H$ sont des formes du domaine $[A, x_1, \ldots, x_m]$, dont la dernière n'est pas nulle. Il n'est pas, comme on sait, bien difficile de définir les éléments de Γ que l'on doit regarder comme des grandeurs algébriques entières et de démontrer que ces éléments constituent un domaine holoïde $[\Gamma]$, mais l'extension à ces grandeurs algébriques entières de la théorie ordinaire de la divisibilité est impossible parce que, en général, le domaine $[\Gamma]$ n'est pas *complet*. M. König montre comment on peut comprendre ce domaine $[\Gamma]$ dans un domaine plus étendu $[\mathcal{G}]$, proprement holoïde, qui, lui, est complet et dans lequel on sait effectivement trouver le plus grand commun diviseur. Les éléments de $[\mathcal{G}]$ qui ne sont pas contenus dans $[\Gamma]$, et qui méritent le nom de *grandeurs*, puisqu'ils sont susceptibles d'être *ajoutés* et multipliés de manière que les lois ordinaires de l'addition et de la multiplication soient respectées, sont les *idéaux* du domaine $[\Gamma]$ et c'est l'étude de ces idéaux que poursuit M. König, de manière à montrer que la divisibilité dans le domaine $(\mathcal{G})$ est aussi simple que la théorie de la divisibilité des nombres entiers. Il donne, pour déterminer dans tous les cas le système fondamental, une méthode nouvelle et fort simple. Il donne de même une méthode pour pousser jusqu'au bout, *dans tous les cas*, la décomposition d'une grandeur entière en primidéaux.

Devant l'importance des résultats obtenus par M. König, il n'y a pas lieu de s'étonner que l'Académie des Sciences de Hongrie ait voulu les publier dans la langue de l'Auteur, et il faut remercier celui-ci de les avoir, par cette traduction allemande, rendus accessibles aux mathématiciens qui ne connaissent pas la langue madgyare. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

London. *Mathematical Society : Proceedings*. Vol. 34. In-8°. London. Hodgson. 20 sh.

Riemann's (Bernh.) *Gesammelte mathematische Werke*. Nachträge :

herausgeg. von M. Noether u. W. Wirtinger. Gr. in-8°, VIII-116 p. avec 9 fig. Leipzig, Teubner. 6 m.

SCHOUTEN (G.). — *Inleiding tot de studie der eliptische functien van Weierstrass.* In-8°. Delft, Waltman jr. 3 fl. 90 c.

BJERKNES (V.). — *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C.-A. Bjèrknes' Theorie.* 2. Bd. In-8°, XVI-316 p. avec fig. et 2 planches. Leipzig, Barth. 10 m.; relié, 11 m. 50 pf.

POINCARÉ (H.). — *Cours de Physique mathématique. Figures d'équilibre d'une masse fluide.* In-8°, 215 p. avec fig. Paris, Naud.

ANNALES *de l'Observatoire de Paris,* publiées sous la direction de M. Lœwy. (Mémoires.) T. XXIII. In-4°, XI-503 p. Paris, Gauthier-Villars.

— (Observations). 1898. In-4°, X-547 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

BARNES (E.-W.). — *A Memoir on Integral Functions.* In-4°. London, Dulau. 4 sh. 6 d.

CATALOGUE *de l'Observatoire de Paris. Étoiles observées aux instruments méridiens de* 1837 *à* 1881. T. IV. In-4°, VII-637 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

— *Positions observées des étoiles* (1835-1881). T. IV. In-4°, 544 p. Paris, Gauthier-Villars. 40 fr.

CONNAISSANCE *des temps ou des mouvements célestes, pour le méridien de Paris,* publiée par le Bureau des Longitudes. 4 vol. in-8° avec cartes. Année 1902, VIII-930 p.; 1903, VIII-941 p.; 1904, VIII-947 p.; 1905, VIII-922 p. Paris, Gauthier-Villars. Chaque vol. 4 fr.

FREGE (G.). — *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* 2e volume. In-8°, XV-266 p. Iéna, Pohle. 12 m.

GERNET (N.). — *Untersuchung zur Variationsrechnung.* (Thèse.) Gr. in-8°, 76 p. avec 7 fig. Göttingen, Vandenhoeck et Ruprecht. 1 m. 80 pf.

JEANS (J.-H.). — *On the equilibrium of rotating liquid cylinders.* In-4°, 38 p. London, Dulau. 2 sh.

SALMON (G.). — *Traité de Géométrie analytique (courbes planes).* Traduit de l'anglais par O. Chemin. 2e tirage. In-8°, XIX-667 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXVII; 1903. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ANDOYER (H.). — Théorie de la Lune..... 80-81
BACHMANN (P.). — Niedere Zahlentheorie. Erster Theil..... 55-58
BAIRE (B.). — Sur les fonctions de variables réelles..... 293-298
BAUER (G.). — Vorlesungen über Algebra..... 344-345
BOREL (E.): — Leçons sur les fonctions méromorphes professées au Collège de France..... 338-342
BURKHARDT (H.). — Algebraische Analysis..... 207-208
CAPELLI (A.). — Istituzioni di Analizi algebrica..... 85-87
COMPTE RENDU du deuxième Congrès international des Mathématiciens. 131-134
BIANCHI (L.). Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellitiche..... 5-29
BOCCARDI (J.). — Guide du calculateur..... 51-54
CZUBER (E.). — Wahrscheinlichkeitrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung..... 141-143
DASSEN (C.). — Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions..... 335-337
ESTANAVE (E.). — Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques..... 330-331
FERRERS (N.). — Mathematical Papers of the late George Green..... 237-256
FOUET (A.). — Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques..... 327-330
FREYCINET (DE). — De l'expérience en Géométrie..... 135-138

Pages.

FRICKE (R.). — Haupsätze der Differential- und Integral Rechnung als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen 42

GEISSLER (K.). — Die Grunsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie 45-46

GERNET (N. v.). — Untersuchung der Variationsrechnung. Ueber eine Methode in der Variationsrechnung 256-257

GODEFROY (M.). — Traité élémentaire des séries 42-45

GRANDJEAN (G.). — Sur le régime permanent graduellement varié qui se produit à la partie amont des tuyaux de conduite et sur l'établissement du régime uniforme dans les tuyaux 29-31

GREEN (G.). — *Voir* FERRERS.

HENSEL (K.) et LANDBERG (G.). — Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale 165-282

HERONIS ALEXANDRINI opera quæ supersunt omnia 87-92

HUMBERT (G.). — Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique, T. I. 100-107

JOUFFRET (E.). — Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions. 205-207

KÖNIG (J.). — Einleitung in der allgemeinen Theorie der algebraischen Grösen 346-355

KÖNIGSBERGER (L.). — Hermann von Helmholtz 143-144

KONEN (H.). — Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ 47-51

LAMÉ (G.). — Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie 325

LAURENT (H.). — Petit Traité d'Économie politique mathématique 337

LEBESGUE. — Intégrale, longueur, aire 59-61

LORIA (GINO). — Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. 91-97

LUTKEMEYER. — Ueber den analytischen Character der Integrale von partiellen Differentialgleichungen 61-65

MACH (E.). — La Mécanique. Étude historique et critique de son développement 261-283

MULLER (H.) et HUPE (A.). — Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen 97-100

OCAGNE (M. D'). — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie 326-327

ROST (G.). — Theorie der Riemann'schen- Theta-Funktion 210-213

ROUCHÉ (E.) et LÉVY (L.). — Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs 331-335

SAPOLSKY (L.). — Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen cubischen Zahlkörper 208-210

SNYDER (V.) et HUTSCHINSON (J.). — Differential und Integral Calculus. 54-55

STOFFAES. — Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques 345-346

STOLZ (O.) et GMEINER (J.). — Theoretische Arithmetik, II. Abtheilung 117-121

TANNERY (J.) et MOLK (J.). — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. T. IV 37-41

ZEUTHEN (H.). Forelœsninger over Mathematikens Historie, II. 16de og 17de Aahrundrede. — Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrundert 298-299

VALLÉE-POUSSIN (DE LA). — Cours d'Analyse infinitésimale. T. I 121-126

Pages.
WHITAKER (E.). — A course of modern Analysis 127-131
WOELFING (E.). — Mathematischer Bucherschatz 343
WOLF (C.). — Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793 69-78

MÉLANGES.

DOLBNIA (J.). — De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques 299-322
DOLBNIA (J.). — Recherches analytiques sur la réduction des intégrales abéliennes 144-161
GOURSAT (E.). — Sur quelques développements de $\frac{1}{1-x}$ en séries de polynomes 226-232
LA CHESNAIS (P.-G.). — La représentation proportionnelle 107-114
LEBESGUE (H.). — Sur la représentation analytique à partir de $z = x + iy$ des fonctions continues de x et de y 82-84
LELIEUVRE. — Sur une équation fonctionnelle 31-36
LERCH (M.). — Extrait d'une lettre à M. Darboux 161-164
LINDELÖF (E.). — Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor 213-232
MANSION (P.). — Sur la représentation proportionnelle 203-204
POINCARÉ (P.). — Extrait d'une lettre 115
SALTYKOW (N.). — Sur les théorèmes de Jacobi et de Liouville 283-294
STÄCKEL (P.). — Sur la représentation sphérique des surfaces 139-140

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVII.

32844 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1902 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVII. — ANNÉE 1903.

(XXXVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique par un comité de rédaction composé des Maîtres de Conférences de l'École.

Troisième série, Tome XVIII; 1901 [1].

Picard (*Ém.*). — L'œuvre scientifique de Charles Hermite. (9-34).

Mangeot (*S.*). — Sur les surfaces symétriques par rapport au cône de révolution. (35-38).

Une figure est dite avoir la symétrie *absolue* par rapport à une surface lorsque tous les points de la figure qui sont sur une même normale quelconque de la surface sont deux à deux symétriques par rapport au point d'incidence de la normale.

L'auteur cherche les surfaces (S) qui ont la symétrie absolue par rapport au cône représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tang}^2 \frac{k\pi}{m},$$

où m et k sont deux entiers donnés, premiers entre eux.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVI_2, p. 150.

Posant

$$u = z + i\sqrt{x^2+y^2}, \qquad v = z - i\sqrt{x^2+y^2},$$

et, si m est impair,

$$\varphi = uv, \qquad \chi = \frac{y}{x}, \qquad \psi = u^m + v^m,$$

ou, si m est pair,

$$\varphi = uv, \qquad \chi = x\,\frac{u^{\frac{m}{2}} - v^{\frac{m}{2}}}{2i\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \psi = y\,\frac{u^{\frac{m}{2}} - v^{\frac{m}{2}}}{2i\sqrt{x^2+y^2}},$$

il trouve que les surfaces (S) peuvent être représentées par l'équation

$$f(\varphi, \chi, \psi) = 0,$$

où f est une fonction arbitrairement choisie de φ, χ, ψ. Les courbes qui possèdent la symétrie absolue par rapport au cône sont les intersections des surfaces (S) deux à deux ou les sections de ces surfaces par les plans méridiens du cône.

Nielsen (*Niels*). — Recherches sur les séries de fonctions cylindriques dues à MM. C. Neumann et W. Kapteyn. (39-75).

Ce travail procède des *Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel* que M. Kapteyn a publiées dans le même Recueil en 1893, et où est déterminé le champ de convergence de la série remarquable

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + 2\sum_{n=0}^{n=\infty} J^n(nx).$$

M. Kapteyn a démontré, en outre, qu'une fonction holomorphe aux environs de zéro peut être développée en série de la forme

$$(\beta) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^n(nx).$$

La première Partie du Mémoire de M. Nielsen a pour objet de généraliser ce théorème et de déterminer le champ de convergence de la série

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}[(\nu+n)x],$$

où ν désigne une constante qui peut recevoir n'importe quelle valeur autre que celles des entiers négatifs. C'est à de pareilles séries que l'auteur donne le nom de *série kapteynienne de première espèce*. Il introduit aussi les séries de la forme

$$(\delta) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\mu+n}[(\mu+\nu+2n)x]\, J^{\nu+n}[(\mu+\nu+2n)x],$$

qu'il appelle *series kapteyniennes de deuxième espece*.

Il établit des relations entre les développements d'une fonction en séries kapteyniennes et ceux que Carl Neumann avait antérieurement obtenus, savoir

$$(\varepsilon) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x),$$

$$(\zeta) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu+\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\mu+n}(x) J^{\nu+n}(x).$$

M. Nielsen désigne ces séries par les noms de *séries neumanniennes* de première et de seconde espèce; les relations qu'il obtient lui permettent d'arriver très simplement aux développements en séries *kapteyniennes* d'un grand nombre de fonctions pour lesquelles les séries *neumanniennes* sont connues.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, l'auteur fait voir comment on peut obtenir immédiatement les séries (δ) et (ζ) pour lesquelles on a, soit $\mu + \nu = 0$, soit $\mu + \nu = 1$, à l'aide des séries (γ) et (ε) où l'on fait $\nu = 0$.

Michel (*Ch.*). — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel (77-126).

Ce Mémoire a été analysé dans une autre partie du Recueil (*Bulletin*, t. XXV_2, 1re Partie, p. 138-139).

Lindeberg (*J.-W.*). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$. (127-142).

Les résultats que l'auteur expose assez sommairement dans ces pages, après les avoir résumés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (5 juin 1900), sont développés d'une manière complète dans une Thèse présentée à l'Université d'Helsingfors. Ils procèdent des travaux de M. Picard sur l'intégration de l'équation

$$\Delta u = fu + \omega.$$

Après avoir rappelé la méthode de M. Picard, M. Lindeberg montre comment on peut établir le théorème que voici :

Soient S *une aire simplement connexe, limitée par un contour* s, *régulièrement analytique, et* Φ_s, f *deux fonctions assujetties aux conditions suivantes :*

La fonction Φ_s, *définie sur* s, *est finie et continue, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres par rapport à l'arc* s;

La fonction f *est continue, positive et non nulle dans* S *et sur* s; *elle possède des dérivées partielles des trois premiers ordres, finies et continues dans* S, *le contour compris.*

Cela posé, on peut trouver une fonction $U(x, y)$ *et une seule, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre dans* S, *le contour compris, admettant des dérivées partielles du second ordre finies et continues dans* S *et satisfaisant aux conditions*

$$\Delta U = fU$$

dans S,

$$\frac{dU}{dn} = \Phi_s$$

sur s.

En terminant, l'auteur prouve que la fonction f étant multipliée par une constante positive α, qu'on fait tendre vers zéro, l'intégrale U, sous la condition

$$\int_s \Phi_s \, ds \neq 0,$$

tend uniformément vers l'infini.

Bachelier (*L.*). — Théorie mathématique du jeu. (143-210).

« La théorie du jeu, dit l'auteur dans son Introduction, constitue encore aujourd'hui la plus belle étude du calcul des probabilités, auquel elle a donné naissance. Le calcul des probabilités, bien que nécessairement abstrait, ne comporte pas de difficultés insurmontables. Ses progrès toutefois ont été lents et peu de théories mathématiques ont donné lieu à un aussi grand nombre d'interprétations erronées. La théorie du jeu, présentée sous une forme irréprochable depuis quelques années, comportait de nombreuses lacunes que cette étude vient en partie combler. Les problèmes réellement importants, ceux qui, à toutes les époques, ont attiré l'attention des géomètres, sont relatifs aux épreuves repétées; ils constituent l'objet de ce travail. En le composant, nous nous sommes proposé de suivre une voie directe, négligeant à dessein plusieurs questions intéressantes qui s'écartaient de notre sujet. La théorie du jeu y est nettement divisée en trois problèmes dont la solution, jusqu'ici partiellement connue, est entièrement établie. »

M. Bachelier a fait suivre son Mémoire d'une Table des valeurs de l'intégrale

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2} \, dy,$$

calculée avec sept, puis onze décimales, pour les valeurs de y croissant par centième de 0 à 4 et par dixième de 4 à 4,8.

Borel (*Ém.*). — Contribution à l'étude des fonctions méromorphes. (211-239).

Étant donnée une fonction entière $F(z)$, dont le module maximum pour $|z| = r$ est $M(r)$, l'auteur appelle *ordre* de cette fonction la plus grande des limites de l'expression

$$\frac{\log \log M(r)}{\log r},$$

lorsque r augmente indéfiniment. L'ordre est un nombre ρ essentiellement positif. Quand il est fini, si l'on désigne par a_n le $n^{\text{ième}}$ des zéros de $F(z)$

rangés par ordre de modules non décroissants, la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

est convergente, quelque petit que soit le nombre positif ε. Au contraire, la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{\rho-\varepsilon}}$$

est divergente, à moins que l'on ne se trouve dans le cas d'exception de M. Picard. Le nombre défini par cette double propriété est appelé l'*exposant de convergence* de la suite $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$.

M. Borel, au début de son travail, étend la notion d'*ordre* aux fonctions méromorphes. Une telle fonction $f(z)$ étant donnée comme le quotient de deux fonctions entières $F(z)$ et $G(z)$, *l'ordre de* $f(z)$ *est*, par définition, *égal* au plus grand des ordres de $F(z)$ et de $G(z)$. Grâce à cette définition de l'ordre, l'auteur énonce et généralise de la manière suivante le célèbre théorème de M. Picard :

Etant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ *d'ordre* ρ, *parmi les équations de la forme*

$$f(z) = \varphi(z),$$

dans lesquelles $\varphi(z)$ *désigne une fonction méromorphe d'ordre inférieur à* ρ, *il y en a au plus* deux *telles que l'exposant de convergence de la suite des modules de leurs racines soit inférieur à* ρ.

La seconde Partie du Mémoire est consacrée à l'étude des relations qui existent entre les deux modes principaux de représentation d'une fonction méromorphe $f(z)$, savoir : premièrement, son expression

$$f(z) = \frac{G(z)}{F(z)}$$

comme quotient de deux fonctions entières, et, secondement, sa décomposition en éléments simples

$$(1) \qquad f(z) = H(z) + \sum \alpha_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a} + \ldots + \frac{z^{\lambda_n}}{a_n^{\lambda_n+1}} \right),$$

$H(z)$ désignant une fonction entière et les λ_n étant des entiers convenablement choisis.

Pour faire cette étude il faut avoir égard à la distribution des zéros de $F(z)$.

M. Borel dit que la distribution de ces zéros (supposés être tous des zéros simples) est *ordinaire* lorsque, ρ désignant l'ordre de $F(z)$ et r_n le module de a_n, on a

$$|F'(a_n)| > e^{-r_n^{\rho-\varepsilon}},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir du moins d'une certaine valeur de n. S'il n'en est pas ainsi, la distribution des zéros est dite *extraordinaire*.

L'ordre de $G(z)$ et de $F(z)$ étant supposé fini, si, de plus, la distribution

des zéros de $F(z)$ est ordinaire, on peut mettre la fonction $G:F$ sous la forme (1), en prenant pour $H(z)$ une fonction d'ordre fini. Il peut ne pas en être de même lorsque la distribution des zéros de $F(z)$ est extraordinaire; dans ce cas, il faut substituer à la formule (1) d'autres développements plus généraux que l'auteur étudie avec quelque détail.

Cartan (*E.*). — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales. (241-311).

Le problème de l'existence des intégrales d'un système donné de s équations aux différentielles totales à r variables, lorsque ce système n'est pas complètement intégrable, a été abordé par M. Biermann en 1885 (*Journal de Schlömilch*). Les résultats précis indiqués par ce géomètre manquaient encore d'une démonstration rigoureuse, bien qu'ils fussent assez particuliers.

M. Cartan a repris la question et il est parvenu à la résoudre d'une façon générale et systématique, en employant les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système donné, si avantageusement introduits par Frobenius et M. Darboux dans la théorie d'une seule équation de Pfaff. Son Mémoire est divisé en huit paragraphes.

Les deux premiers contiennent la définition des *éléments intégraux* et celle des complexes linéaires dont la considération joue un rôle prépondérant dans la suite.

Le paragraphe III traite du problème suivant : Étant donnée une multiplicité intégrale à p dimensions M_p d'un système d'équations aux différentielles totales, faire passer par M_p une multiplicité intégrale à $p+1$ dimensions M_{p+1}.

Les conclusions de cette étude permettent d'énoncer (paragraphe IV) l'importante définition du genre :

Un système d'équations aux différentielles totales est de genre n *si, par un élément intégral* E_{i-1} *arbitraire, il passe* ∞^{r_i} *éléments intégraux* E_i *et au moins* un *pareil élément pour les valeurs* $i = 1, 2, \ldots, n$, *et si, par un élément intégral* E_n *arbitraire, il ne passe aucun élément intégral* E_{n+1}.

Les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$, qui peuvent être nuls en partie, sont ceux dont dépend l'indétermination de la multiplicité intégrale à n dimensions la plus générale. Le paragraphe V contient quelques propriétés remarquables de ces nombres, entre autres la suivante, où r désigne toujours le nombre des variables indépendantes :

Les nombres

$$\begin{aligned} s_1 &= r - r_1 - 1, \\ s_2 &= r_1 - r_2 - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n-1} &= r_{n-1} - r_n - 1, \\ s_n &= r_n \end{aligned}$$

sont tous positifs ou nuls; chacun d'eux est au moins égal à celui qui le suit.

Un cas particulièrement intéressant est celui où il y a dans la suite des s un terme nul. Si s_i ($i \leq n$) est le premier qui s'évanouisse, le genre du système est

$$n = i - r_i.$$

il passe par un élément intégral non singulier $E_{\nu-1}$ un élément intégral E_ν et un seul; le lieu des éléments intégraux passant par $E_{\nu-1}$ est l'élément E_n; de plus, on a les égalités

$$r_\nu = r_{\nu+1} + 1 = r_{\nu+2} + 2 = \ldots = n - \nu$$

qui entraînent

$$s_\nu = s_{\nu+1} = \ldots = s_{n-1} = s_n = 0.$$

Pour un système de h équations aux différentielles totales à r variables, *dont les coefficients n'ont subi aucune particularisation*, on peut déterminer les nombres r_p; on trouve

$$r_p = r - p(h+1);$$

par suite, le genre n est le quotient, à une unité près, de r par $h+1$, ce qui est l'un des résultats de M. Biermann.

Le paragraphe VI contient l'exposé du problème de Cauchy et précise le degré d'indétermination de l'intégrale générale d'un système de genre n. En voici les résultats.

Étant donnés un point arbitraire μ_0, une multiplicité arbitraire μ_{r-r_1} passant par ce point, une multiplicité arbitraire μ_{r-r_2} passant par μ_{r-r_1}, ..., une multiplicité arbitraire μ_{r-r_n} passant par $\mu_{r-r_{n-1}}$, il existe une multiplicité intégrale M_n, et une seule, passant par μ_0, ayant en commun avec μ_{r-r_i} une multiplicité à i dimensions et contenue dans μ_{r-r_n}.

L'intégrale générale à n dimensions est déterminée, et d'une manière unique, par un système de :

s_n	fonctions arbitraires de	n	arguments,
s_{n-1}	»	$n-1$	»
.....			,
s_1	»	1	

et s constantes arbitraires, les s_i ayant les significations spécifiées plus haut.

Ainsi sont à la fois démontrés et considérablement précisés les résultats de M. Biermann.

Les systèmes différentiels pour lesquels l'entier s_n est nul méritent un examen particulier. Ils sont étudiés, sous le nom de *systèmes de première espèce*, dans le paragraphe VII, où l'auteur généralise la méthode de Lie et Mayer.

Dans un autre ordre d'idées, il y a un cas où l'intégration peut encore se simplifier; c'est celui où il passe par chaque point A un élément *caractéristique*. On appelle ainsi un élément intégral E_p tel que tout autre élément formé de E_p et d'un élément linéaire intégral soit aussi intégral. Le paragraphe VIII traite des systèmes qui admettent de telles caractéristiques et de la recherche de ces caractéristiques.

Hadamard. — Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et celui de la sphère isotrope. (313-342).

Les principaux problèmes relatifs à l'équilibre des plaques circulaires ont été résolus au moyen des séries par Émile Mathieu pour le cas des plaques

encastrées (*Journal de Liouville*, 1869) et par M. Maurice Lévy (*Journal de Liouville*, 1877).

Ensuite et presque simultanément M. Almansi et M. Lauricella ont mis la solution pour le cas de la plaque *encastrée* sous forme d'intégrale définie (*Atti Acc. d. Sc. di Torino*, 1896, p. 881 et 1010).

Dans le présent Mémoire, M. Hadamard obtient le même résultat pour le problème de la plaque simplement *appuyée* et pour celui de la plaque *libre*.

M. Almansi, après avoir résolu le problème de la plaque circulaire encastrée, a fait usage (*Memorie d. Acc. di Torino*, 1897) de considérations toutes semblables à celles de son premier travail pour étudier l'équilibre de la sphère isotrope, en se plaçant successivement dans le cas où l'on donne les déplacements à la surface et dans celui où l'on donne les tensions à la surface.

M. Hadamard résout un troisième problème, relatif à l'équilibre de la sphère isotrope : c'est celui où, sans se donner ni les déplacements, ni les tensions, on assujettit la sphère à rester en contact sur toute sa surface avec des corps de forme et de position données, le contact ayant lieu sans frottement. Les conditions aux limites sont alors : 1° que la pression (X, Y, Z) de grandeur inconnue soit normale; 2° que la composante normale du déplacement ait en chaque point une valeur donnée. Il s'agit de trouver le déplacement u, v, w de chaque point (x, y, z) connaissant à la surface la valeur de la quantité

$$ux + vy + wz,$$

et les conditions

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

L'auteur fait dépendre la détermination de u, v, w et de X, Y, Z d'un problème dont Monge a traité des exemples et qui consiste ici à trouver la forme la plus générale de quatre fonctions d'une variable, liées par trois équations différentielles du premier ordre. A propos du système particulier qu'il veut traiter, M. Hadamard indique une méthode générale pour résoudre $n-1$ équations différentielles *linéaires* entre n fonctions inconnues, que les coefficients soient constants ou variables.

Raffy (*L.*). — Sur les surfaces à lignes de courbure planes dont les plans enveloppent un cylindre. (343-370).

« *Introduction.* — L'objet de ce Mémoire est de présenter quelques applications d'une méthode qui me paraît convenir très bien à l'étude des surfaces définies par des propriétés de leurs lignes de courbure : cette méthode consiste à déterminer l'une des nappes de la surface des centres de courbure des surfaces qu'on cherche; après quoi l'on obtient immédiatement ces surfaces elles-mêmes. La principale de ses applications est la détermination entièrement explicite des surfaces pour lesquelles les lignes de courbure d'un système sont dans des plans parallèles à une droite (*surfaces* K), mais ce n'est pas la seule; aussi mon analyse a-t-elle beaucoup plus d'étendue que si je n'avais pas en vue d'autres résultats.

» J'expose d'abord (n° I) le principe de la méthode et je montre comment elle fournit la seconde nappe de la développée, dès que la première est connue.

» Abordant les surfaces (K), je détermine (n° II) la nappe de développée qui contient les centres de courbure relatifs aux lignes de courbure planes.

» Je calcule ensuite (n° III) les cosinus directeurs de la normale à ces surfaces, ainsi que l'élément linéaire de leur représentation sphérique et je donne la condition pour que cette représentation soit isothermique.

» Aussitôt après sont formées (n° IV) les expressions des coordonnées des surfaces (K), de leurs rayons de courbure principaux, de leur élément linéaire, et celles des coordonnées de la seconde nappe de leur développée.

» Je montre ensuite (n° V) que les surfaces (K) sont entièrement caractérisées par la propriété d'être *doublement cylindrées* suivant leurs lignes de courbure : j'entends par là que les plans osculateurs menés en tous les points d'une ligne de courbure quelconque aux diverses lignes de courbure de l'autre système sont parallèles à une droite. Ce théorème, dont j'étais en possession peu de jours après la publication de ma Note des *Comptes rendus* sur le même sujet (janvier 1899), complète et précise certains résultats de cette Note.

» Enfin, j'indique (n° VI) les moyens d'obtenir les coordonnées des surfaces (K) exprimées sans aucun signe de quadrature; les calculs, qui sont exécutés jusqu'au bout, conduisent à distinguer une classe particulière de surfaces (K) dont la représentation sphérique est isothermique et qui ne dépendent que d'*une* fonction arbitraire de v (paramètre des lignes de courbure planes) et d'*une* fonction arbitraire de u (paramètre du second système), tandis que les surfaces (K) générales dépendent de *deux* fonctions arbitraires de v et d'une fonction arbitraire de u. Les résultats auxquels on arrive font prévoir combien seraient compliquées les expressions des coordonnées des surfaces les plus générales à lignes de courbure planes dans un système.

» Les formules contenues dans ce Mémoire sont susceptibles de nombreuses applications; je souhaite qu'elles puissent servir à d'autres chercheurs; je les ai calculées avec grand soin et, le plus souvent, vérifiées de diverses manières. »

Anissimoff (*W.*). — Sur la théorie des courbes géodésiques. (371-395).

Dans ce Mémoire, l'auteur s'occupe principalement d'un problème, déjà traité par Ossian Bonnet, savoir la détermination des éléments linéaires pour lesquels l'équation différentielle des lignes géodésiques, qui est toujours de la forme

$$\frac{d^2 v}{du^2} = P + Q\frac{dv}{du} - R\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + S\left(\frac{dv}{du}\right)^3$$

admet une intégrale première telle que

$$\frac{dv}{du} = \frac{A - B\alpha}{C + D\alpha},$$

où α est la constante arbitraire. La propriété en question se conservant quelles que soient les coordonnées curvilignes (u, v) choisies, il est avantageux de rapporter la surface à ses lignes de longueur nulle ($x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$).

L'auteur insiste particulièrement sur certains éléments linéaires pour lesquels l'équation des géodésiques admet une intégrale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A + B\alpha}{C - D\alpha},$$

telle que si l'on fait à la fois

$$x = u + iv, \qquad y = u - iv, \qquad \alpha = \alpha' + i\beta',$$

et qu'on sépare le réel de l'imaginaire en considérant u, v, α' et β' comme réels, on obtient *deux* intégrales premières distinctes. Pour les surfaces correspondantes, l'intégrale générale des géodésiques s'obtient sans aucune quadrature, par une simple élimination.

Picard (*Ém.*). — Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des surfaces algébriques. (396-420).

On sait que la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce, relatives aux surfaces algébriques, est loin d'être aussi avancée que celle des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce. Dans le présent travail, M. Picard apporte diverses contributions à cette importante et difficile théorie.

I. Étant donnée une surface algébrique de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

à singularités ordinaires et n'occupant pas de position spéciale par rapport aux axes de coordonnées, si l'on considère y comme un paramètre arbitraire, on obtient une courbe de genre p

$$f(x, \overline{y}, z) = 0.$$

Une courbe C de degré d tracée sur la surface peut être représentée par les deux équations

$$A(x, y) = 0, \qquad z = R(x, y),$$

A désignant un polynome irréductible et R une fraction rationnelle de x et y.

On peut former une intégrale abélienne relative à la courbe (1), de la forme

$$I = \int S(x, \overline{y}, z)\, dx,$$

S étant une fonction rationnelle de x, y, z, et qui jouisse des propriétés suivantes. Elle n'a d'autres points singuliers à distance finie que les points (z, x) de la courbe correspondant aux équations

$$A(x, \overline{y}) = 0, \qquad z = R(x, \overline{y}),$$

et la période polaire correspondant à chacun de ces points singuliers logarithmiques est égale à $+1$. De plus, relativement aux m points de la courbe à l'infini (qui sont indépendants de y), l'intégrale a seulement comme point singulier logarithmique *l'un* d'entre eux et la période correspondante est égale à $-d$.

L'intégrale (I) possède, outre les périodes polaires provenant des singularités logarithmiques, $2p$ périodes cycliques $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ qui sont des fonc-

tions de y. Si l'on fait varier y et qu'on revienne au point de départ, l'ensemble des $2p+1$ périodes de I se transformera pour un contour déterminé en $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_{2p}, 1$, les $2p+1$ derniers nombres se déduisant des ω et de 1 par une substitution S à coefficients entiers; et les substitutions S qui font connaître l'ensemble des valeurs des périodes pour *toutes* les circulations de y autour des divers points critiques sont en un certain nombre k indépendant de la courbe C.

On est ainsi conduit à former $2pk$ relations à coefficients entiers ($2p$ pour chacune des k substitutions fondamentales du type S) entre $2p+\lambda$ constantes

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2p}, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda,$$

équations qui forment un système (α), et l'on a le théorème suivant :

Si les constantes K *et* c *satisfont aux* $2pk$ *équations* (α), *on peut former une intégrale de différentielle totale ayant les* $2p+\lambda$ *périodes*

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{2p}, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\lambda,$$

les λ *dernières étant des périodes logarithmiques correspondant aux courbes données à l'avance* $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$.

Réciproquement, s'il existe une intégrale de troisième espèce n'ayant, à distance finie, d'autres courbes logarithmiques que $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, les $2p+\lambda$ périodes de cette intégrale satisferont à $2pk$ relations du type (α).

Cela posé, M. Picard démontre la proposition que voici :

Sur la surface f, *à singularités ordinaires, on peut tracer un certain nombre* ρ *de courbes algébriques irréductibles particulières,* $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$, *telles qu'il n'existe pas d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce, n'ayant d'autres courbes logarithmiques que la totalité ou une partie de ces courbes* C, *mais telles qu'il existe une intégrale ayant seulement pour courbes logarithmiques une* $(\rho+1)^{\text{ième}}$ *courbe quelconque de la surface et la totalité ou une partie des courbes* C.

Le nombre ρ qui intervient dans cet énoncé est, d'après sa nature même, au moins égal à l'unité. L'auteur montre qu'il est effectivement égal à 1 pour le plan et les surfaces hyperelliptiques générales. Mais la détermination de ρ, pour une surface quelconque, semble devoir présenter de sérieuses difficultés.

M. Picard examine ensuite l'importante question de la transcendance des intégrales de différentielles totales de troisième espèce. On sait que les intégrales de deuxième espèce sont *en général* des fonctions algébriques. Mais une surface peut admettre des intégrales de deuxième espèce non algébriques, et alors elle admet nécessairement des intégrales de troisième espèce non réductibles à une combinaison algébrico-logarithmique : est-ce le seul cas où il en soit ainsi? L'auteur réserve la solution de cette question et se contente de faire connaître quelques types simples de surfaces pour lesquelles *toutes* les intégrales de différentielles totales se ramènent à des combinaisons algébrico-logarithmiques. Nous citerons, en particulier, les surfaces dont l'équation est

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynome du troisième degré en x dont les coefficients sont des

polynomes *arbitraires* de y, et celles dont l'équation est

$$z^2 = x^4 + P(y),$$

$P(y)$ désignant un polynome arbitraire en y.

Riquier (*Ch.*). — Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. (421-472).

Ce Mémoire contient la démonstration de divers résultats, qui peuvent se résumer en l'unique proposition dont voici l'énoncé :

Un système orthonome passif étant donné, si l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales des inconnues, ne renferme, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, dont le second est indépendant du choix des conditions initiales.

Nous ferons connaître, par un extrait de l'Introduction, la marche qu'a suivie l'auteur :

« Étant donné un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées (et dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale de ces inconnues), je nomme *grade* du système l'ordre maximum de ses premiers membres; il va sans dire que le grade peut être, soit inférieur, soit égal à l'*ordre* du système.

» Quand on a affaire à un système de grade 1, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

» Cela posé, j'établis, en premier lieu, que si, dans un système orthonome passif, l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales des inconnues, ne comprend, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données se ramène, *par de simples différentiations*, à une semblable recherche effectuée dans un *système orthonome passif de grade* 1, *dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne*. Je prouve, en second lieu, que cette dernière recherche se ramène à deux intégrations successives, savoir :

» 1° Celle d'un système passif d'équations différentielles totales, variable avec le choix des conditions initiales;

» 2° Celle d'un système linéaire et passif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, indépendant du choix dont il s'agit, et qui, bien que les

2me Partie

fonctions inconnues s'y trouvent en nombre généralement supérieur à 1, peut se traiter par la méthode classique de Jacobi.

» Dans l'exposé qui suit, comme dans les quelques lignes qui précèdent, se rencontrent un certain nombre de termes dont j'ai fait usage dans mes travaux antérieurs, et dont il m'a semblé inutile de répéter ici la définition : le lecteur voudra bien se reporter aux travaux dont il s'agit, et notamment à mon récent Mémoire *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica*, t. XXIII). »

SUPPLÉMENT.

Hancock (*Harris*). — Mémoire sur les systèmes modulaires de Kronecker. (3-115).

Ce Mémoire a été analysé dans une autre partie du Recueil (*Bulletin*, t. XXV, 1re Partie, p. 137-138).

REND'CONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série. Milan, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; éditeur M. Hoepli.

t. XVII, 1884.

Formenti (*C.*). — [B12*c*]. Sur les nombres irréductibles avec les nombres complexes (*suite et fin*). (6-11).

Il n'existe pas de systèmes complets à trois dimensions, et en général à un nombre impair de dimensions. En prenant trois unités

$$1, \quad i, \quad i_2$$

irréductibles entre elles, le produit ii_2 est nécessairement une quatrième unité, irréductible avec les précédentes. Les systèmes complets à quatre dimensions sont seulement les suivants :

1. Système où les unités sont liées par les relations

$$ij = ji, \qquad jk = kj, \qquad ki = ik,$$
$$jk = a + bi + cj + dk,$$

qui est un système de nombres symboliques de la forme

$$p = u + \omega i + j(y + zi),$$

j étant défini par

$$j^2 - (d - ci)j + (ia - b) = 0;$$

2. Système déterminé par

$$ij = k, \qquad ik = -j \qquad jk = \beta i - aj,$$
$$ji = a - bi - k, \qquad ki = -b - ai - j, \qquad kj = -\beta i - bk,$$

où l'on a

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{4} > 0,$$

et qui peut se faire coïncider avec les quaternions d'Hamilton :

3. Système analogue au précédent mais où l'on a

$$\beta = \frac{a^2 - b^2}{4} = 0.$$

Dans le système (1) on a la propriété commutative, mais un produit peut être nul sans que le soit aucun de ses facteurs. Dans (2) c'est le contraire. Dans (3) manquent à la fois les deux propriétés ordinaires du produit, c'est-à-dire la commutativité et la propriété relative à l'évanouissement du produit.

Bardelli (*G.*). — [R 4*a*γ, δ]. Quelques applications du principe du moindre travail à l'équilibre de systèmes gênés. (89-99).

Par le principe du moindre travail l'auteur trouve les réactions aux points fixes, autant dans l'équilibre ordinaire que dans l'équilibre astatique.

Pennacchietti (*G.*). — [H 9 *f*, *h*]. Sur les intégrales complètes de certaines classes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes. (279-282).

Dans certains cas on peut avoir l'intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles d'ordre m, en prenant l'intégrale générale commune à un système d'équations. Par exemple, une intégrale complète de l'équation

$$f\left(\frac{\partial^m z}{\partial x^m}, \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

et donnée par la solution la plus générale du système

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-i}\partial y^i} = a_i, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

les a_i étant des constantes liées par l'équation

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

Brioschi (*F.*). — [F 5*b*]. Sur un problème d'analyse. (401-406).

Étant données les relations

$$c = x_1 x_2 x_3,$$
$$f = x_2 x_3 + x^2 x_1 + x_1 x_2,$$
$$l = x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3,$$
$$m = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2,$$
$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,$$

déterminer les trois arguments x_1, x_2, x_3 en fonction de trois des quantités v, f, l, m, n. L'auteur résout ce problème et trouve aussi, en fonction de ces dernières quantités, les expressions des trois covariants h, k, δ de la forme f, et par cela une relation entre v, f et les trois covariants, qui est du huitième degré en v. Cette relation dans le cas particulier que les valeurs des arguments rendent $f = 0$ et le covariant $h = 1$, conduit à l'équation modulaire jacobienne du huitième degré.

Bertini (*Eug.*). — [M²3*d*]. Sur la surface du troisième ordre. (478-480). Note II. (712-714).

Distribution des plans tritangents en trièdres.

En appelant *plan conjugué* au trièdre un plan qui contienne une droite (de la surface) de chacun des plans du trièdre, on a trois cas possibles :

1° Trièdres n'admettant pas de plans conjugués ;
2° Trièdres ayant un seul plan conjugué ;
3° Trièdres ayant deux, et par conséquent trois, plans conjugués.

Ces derniers sont les trièdres de Steiner.

Il y a 2880 trièdres de la première espèce et 2160 de la seconde.

Dans la Note II l'auteur donne toutes les distributions possibles en *polyèdres* des 45 plans tritangents en signalant pour la première fois l'existence de certains heptaèdres.

Struve (*L.*). — [U]. Nouvelle détermination de la latitude de l'Observatoire royal de Bréra à Milan, faite au moyen de passages d'étoiles dans le premier vertical. (530-537).

Beltrami (*Eug.*). — [T7*c*]. Sur un problème relatif à la théorie des courants stationnaires. (538-546).

Le mouvement stationnaire de l'électricité est supposé avoir lieu dans une sphère, communiquant avec un courant par deux points opposés P, P′ de sa surface. Le système est symétrique et l'auteur y applique une méthode déjà donnée par lui dans ces *Rendiconti* (*Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse;* 1878) par laquelle, en connaissant les fonctions associées d'un système symétrique par rapport à un axe, on peut trouver celles du système, symétrique aussi, que l'on obtient du précédent par une inversion par rapport à un point de l'axe.

Ascoli (*J.*). — [D1*a*]. La notion de longueur d'une ligne n'est pas seulement indépendante de celle de dérivée, mais aussi de celle de continuité. (564-572).

Beltrami (*Eug.*). — [R5 ref. T2]. Sur la représentation des forces newtoniennes par des forces élastiques. (581-589).

V étant la fonction potentielle d'un système de masses, et ayant posé

$$X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,$$

$$Y_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,$$

$$Z_z = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta V,$$

$$Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},$$

la variation du potentiel P est donnée par

$$\delta P = \int\left[\Sigma X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} - \Sigma Y_z\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right)\right] ds = 0,$$

et le travail $-\delta P$ des forces newtoniennes se présente ainsi comme un travail de forces élastiques.

Maggi (*J.-Ant.*). — [R7*g*α]. Sur l'intégration des équations différentielles du pendule conique. (590-599).

Intégration par les fonctions de Weierstrass.

Schiaparelli (*J.-V.*). — [U]. Nouvelles mesures de la planète Uranus (621-622).

Ascoli (*J.*). — [D5*c*]. Intégration de l'équation différentielle $\Delta^2 u = 6$ dans l'aire d'un cercle. (627-635).

Maggi (*J.-Ant.*). — [R4*b*α]. Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles. (683-694).

M. Volterra (*Rendiconti des Lincei*, 3e série, t. VIII, 1884), dans ses recherches sur les surfaces flexibles et inextensibles, prend pour fondements les éléments caractéristiques du déplacement infiniment petit, et conclut que, pour maintenir l'équilibre, il faut appliquer des forces au contour. Deux des composantes de ces forces peuvent se choisir arbitrairement, pourvu qu'elles satisfassent aux conditions que l'on aurait pour une surface rigide ; l'autre est déterminée univoquement.

De cela, il semblerait résulter qu'on pût maintenir aussi l'équilibre avec des forces au contour, ne satisfaisant pas aux conditions ordinaires, par exemple à celle de se trouver dans le plan tangent au point d'application. L'auteur démontre que les conditions d'équilibre sont toujours celles qui sont données par les formules ordinaires, et que, dans le cas où les formules de M. Volterra

présentent une différence avec celles-là, cela a lieu parce que le système de forces, appliqué au contour, se compose de deux systèmes, dont l'un satisfait aux conditions ordinaires, et l'autre produit un travail virtuel nul.

Celoria (*J.*). — [U]. Sur l'éclipse totale de lune du 4 octobre 1884. (753-756).

Aschieri (*Ferd.*). — [Nref. Q2]. Sur la géométrie de la droite. (756-758).

Compte rendu d'une Note.

Formenti (*C.*). — [R1*c*]. Sur le mouvement géométrique des systèmes invariables. (781-795). Suite dans le Tome XVIII. (195-200, 238-272 et 418-431).

Dans le mouvement d'un système rigide quelconque, les vitesses de tous les points d'une droite ont des projections égales sur cette droite. Cette projection est appelée *vitesse de la droite*. On appelle aussi *moment* d'un segment le produit de sa valeur par sa vitesse. Cela posé, le mouvement du système est déterminé par les vitesses et les moments des six arêtes d'un tétraèdre.

Brambilla (*A.*). — [M³6*a*]. Sur la courbe gauche du quatrième ordre à point double. (857-866).

Pour cette courbe, qui est rationnelle, l'auteur emploie la représentation paramétrique spéciale par laquelle, au point double, correspondent les valeurs 0, ∞. Les propriétés qu'il donne sont relatives aux cordes principales (c'est-à-dire à celles qui sont situées dans les plans osculateurs des deux points qu'elles unissent), et aux quadrilatères circonscrits à la courbe. Il démontre aussi un théorème, dont un cas particulier est le suivant : les quatre intersections ultérieures de la courbe avec quatre plans osculateurs, dont les points d'osculation sont sur un plan, sont aussi sur un plan. Ce qui établit une correspondance entre les plans de l'espace, dans laquelle à tout plan en correspondent 27.

Tome XVIII, 1885.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Amplitude de l'oscillation diurne de l'aiguille de déclinaison à Milan 1884. (103-105).

Casorati (*Félix*). — [B1*c*]. Sur quelques déterminants. (108-111).

Le déterminant de Vandermonde Φ relatif aux $n!$ quantités obtenues de

$$\xi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

en y permutant les x, peut s'exprimer au moyen des déterminants semblables relatifs aux x et aux y séparément.

Celoria (*G.*). — [U]. Sur l'apparition de la comète de Halley en 1456. (112-125).

Martinetti (*V.*). — [P6*a*]. Sur une classe de transformations involutives de l'espace. (132-142).

Ce sont les involutions *monoïdales*, c'est-à-dire dans lesquelles aux plans de l'espace correspondent des monoïdes d'ordre n. Ces monoïdes doivent avoir tous en commun le point $(n-1)^{uple}$, et il y a deux espèces de ces involutions. Dans les unes, les rayons passant par le point multiple commun au système homaloïdique, correspondent à eux-mêmes. Dans les autres, ces rayons ne sont pas unis, mais ils se correspondent dans une homologie harmonique. Ces derniers se subdivisent en onze classes, suivant l'existence et la distribution des points unis.

Jung (*J.*). — [K9*a* réf. Q4*a*]. Sur une classe de configurations à index 3. (231-238).

L'auteur démontre quelques propriétés, que l'on peut considérer comme une généralisation des théorèmes sur les transversales.

Pennacchietti (*G.*). — [R8*f*]. Sur une intégrale plus générale de celle des forces vives pour le mouvement d'un système de points matériels. (242-252 et 269-279).

L'auteur recherche le cas où les équations du mouvement

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

admettent une intégrale première du deuxième degré par rapport aux vitesses, de la forme

$$(1) \qquad \Sigma a_{rs} x'_r x'_s + \Sigma p_s x'_s + F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Ct = \alpha,$$

a_{rs}, p_s étant des fonctions des x, et C, α, des constantes. Une des conditions qui doivent être satisfaites est que l'expression

$$\Sigma_r (\Sigma_h a_{rh} X_h + dx_r$$

soit une différentielle exacte (la différentielle de F). L'auteur trouve aussi que, lorsque l'intégrale (1) existe, les deux suivantes dont elle est la somme

$$(2) \qquad \Sigma p_s x'_s = Ct = \text{const},$$

$$(3) \qquad \Sigma a_{rs} x'_r x'_s + F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const},$$

sont aussi des intégrales du même problème, et il suffit, par conséquent, de

déterminer les conditions d'existence de (2) et (3) séparément. Pour (2), il faut que les p_ε soient des fonctions linéaires des x, et, par suite, l'intégrale (2) aura la forme

$$\Sigma k_\varepsilon x'_\varepsilon + \Sigma a_{r\varepsilon}(x_\varepsilon x'_r - x_r x'_\varepsilon) - Ct = \text{const.},$$

les k_ε, les $a_{r\varepsilon}$ étant ici des constantes; elle appartient aux problèmes dans lesquels on a

$$\Sigma k_\varepsilon X_\varepsilon + \Sigma a_{r\varepsilon}(x_\varepsilon X_r - x_r X_\varepsilon) - C = 0.$$

et elle est la plus générale des intégrales linéaires par rapport aux vitesses. Pour (3) les expressions les plus générales des a_{rr}, $a_{r\varepsilon}$, pour des polynomes du deuxième degré par rapport aux x, dont les coefficients satisfont à $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ conditions. Cette intégrale convient aussi à un système gêné lorsque l'expression

$$\Sigma_r(\Sigma_h a_{rh} X_h)\, dx_r$$

est une différentielle exacte dans l'hypothèse que les x soient indépendantes, ou par suite des liaisons du système.

Ascoli (*G.*). — [D5*cα*]. Intégration de l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$ dans quelques aires planes très simples. (252-258).

L'auteur donne la représentation conforme de quelques aires (surface d'un angle, triangle circulaire, etc.) sur le segment du cercle et sur le secteur circulaire.

Ascoli (*G.*). — [D5*cα*]. Sur les branches algébriques de courbe. (279-284).

Ascoli (*G.*). — [D5*cα*]. Sur quelques représentations conformes. (349-356).

Ascoli (*G.*). — [D5*cα*]. Encore sur les représentations conformes (390-395).

Ascoli (*G.*). — [D5*cα*]. Encore une fois sur les représentations conformes. (440-450).

Dans la première de ces quatre Notes, l'auteur définit une *branche algébrique* comme l'ensemble de points (x, y) pour lesquels on a

$$x + iy = w(t) = \sum_0 a_\varepsilon (t - t_0)^\varepsilon$$

étant

$$a_\varepsilon = \xi_\varepsilon + i\eta_\varepsilon.$$

La série est supposée convergente dans un cercle de centre t_0; mais, pour la définition de la branche, on suppose que t_0 et t soient réels, et que dans

l'intervalle $t_0 - M$, $t_0 + M$ dans lequel on fait varier t, il y ait un nombre fini de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$, ou $\frac{dw}{dt} = 0$. L'auteur donne les conditions pour qu'un point de cette branche soit un point de rebroussement à distance finie ou à l'infini.

Dans la deuxième Note, on établit une correspondance entre les deux plans complexes t, z, par la relation

$$z = w(t) = \sum_0 a_s (t - t_0)^s,$$

et cette correspondance est étudiée dans le voisinage d'un point de rebroussement ($t = \alpha_\varepsilon$) de la branche que l'on obtient pour t réel.

Dans la troisième, l'auteur étudie le cas d'un rebroussement ayant origine du contact de deux branches

$$r(t) = \sum_0 f_n (t - t_0)^n$$

$$v(t') = \sum_0 g_n (t' - t'_0)^n \qquad (g_0 = f_0),$$

pour le cas où f_1 et g_1 sont tous les deux différents de zéro.

Dans le quatrième, il suppose que l'une au moins des quantités f_1, g_1 soit nulle.

Ferrini (*R.*). — [S 4*b*]. La théorie cinétique des gaz et la limite de l'atmosphère. (319-337).

Jung (*J.*). — [R 1*e*]. Sur quelques propriétés géométriques, statiques et cinématiques des polygones articulés (337-348).

L'auteur applique ici les propriétés données dans sa Note précédente (*voir* ci-dessus : JUNG, p. 231). Il avait considéré dans cette Note deux espèces de configurations qu'il appelle *polyédrales*, et que l'on obtient, les unes en projetant sur un plan les sommets et les arêtes d'un n-èdre complet, les autres en coupant par un plan un n-gone complet. Dans la Note actuelle, il donne des propriétés générales et nouvelles relatives à l'équilibre et aux mouvements élémentaires des polygones articulés, et démontre que le polygone articulé est inscrit dans celui qui a pour sommets les centres instantanés de rotation des côtés, et que les deux polygones appartiennent à deux configurations polyédrales conjuguées. La même propriété a lieu par rapport au polygone ayant pour côtés les lignes d'action des forces appliquées aux sommets du polygone articulé, et capables de le maintenir en équilibre. On déduit de là quelques propriétés des polygones funiculaires. Comme application, il fait le cas du quadrangle, du pentagone et de l'hexagone.

Celoria (*G.*). — [U]. Sur la comète de 1472. (407-418).

Bardelli (*G.*). — [R2*c*]. Quelques formules sur les moments d'inertie des polygones plans. (465-473).

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. Sur les fonctions satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$. (474-480).

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. Encore sur les fonctions satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$. (546-551).

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. Recherches ultérieures sur les fonctions satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$. (599-610).

Une fonction satisfaisant à l'equation $\Delta^2 u = 0$, pour laquelle on a posé les conditions qu'elle ne croisse pas indéfiniment dans l'aire riemannienne T, et y soit continue ainsi que ses dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

est unique, et, si elle n'est pas constante dans l'aire T, dont le contour est à distance finie, elle ne prendra pas à l'intérieur de T la valeur de sa limite supérieure ni celle de sa limite inférieure. Autres recherches sur la continuité uniforme d'une variété de ces fonctions, et sur les fonctions limites d'une telle variété.

Loria (*G.*). — [Q2ref. K7*e*]. Sur une généralisation des propriétés involutives du quadrangle et du quadrilatère complets. (491-494).

Etant donnés $n+2$ points d'un espace S_n, on pourra les joindre par $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ espaces S_1 et par autant d'espaces S_{n-1}. A tout espace S_1 correspond un S_{n-1} et un seul, et réciproquement, étant correspondants un S_1 et un S_{n-1} qui contiennent ensemble tous les points donnés. Ce système d'espaces est coupé par un S_{n-1} arbitraire en $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ points et en autant d'espaces S_{n-2}, qui sont polaires des points indiqués par rapport à une quadrique de $n-2$ dimensions.

Aschieri (*Ferd.*). — [P6*g*]. Sur une méthode de représentation plane pour la géométrie descriptive de l'espace ordinaire. (494-505).

Paci (*Paul*). — [R5*aa*]. Sur les discontinuités des dérivées secondes de la fonction potentielle d'une surface. (505-507).

Déduction des formules de Horn (*Zeitschrift* de Schlömilch, t. 26) d'après celles de Beltrami (*Ann. di Matematica*, 2e série, t. X).

Aschieri (*Ferd.*). — [K6*a*]. Le système des coordonnées homogènes projectives pour les éléments de l'espace ordinaire. (569-584).

Morera (*G.*). — [F5*d*β ref. A4*d*]. Sur la résolution de certaines équations modulaires. (629-634).

Beltrami (*Eug.*). — [T2*b*]. Sur les conditions de résistance des corps élastiques (704-714].

Les conditions de cohésion peuvent être fondées préférablement sur le potentiel d'élasticité.

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. Intégration de l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$ dans une aire riemannienne quelconque. (718-732).

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. On éclaircit le n° 3 du Mémoire de Riemann : *La théorie des fonctions abéliennes* (783-798 et 806-816).

Aschieri (*Ferd.*). — [Q2 ref. P1]. Sur la transformation homographique générale d'un espace linéaire d'espèce quelconque. (989-999).

Tome XIX, 1886.

Jung (*J.*). — [P4*c*]. Sur les transformations birationnelles de trois formes géométriques de deuxième espèce. (161-166).

Aschieri (*Ferd.*). — [Q2 ref. P2]. Sur les correspondances linéaires réciproques dans un espace linéaire d'espèce quelconque. (167-173).

Ascoli (*G.*). — [D3]. Un théorème sur les fonctions dont chaque terme est une fonction de $z = x + iy$. (173-175).

Convergence uniforme de la fonction $\sum_1 \varphi_s(z)$ vers $\sum_1 \varphi_s(k)$, k étant un point quelconque du contour de l'aire.

Bertini (*Eug.*). — [Q2 ref. P1]. Les homographies involutives

dans un espace linéaire d'un nombre quelconque de dimensions. (176-183).

Maggi (*J.-Aut.*). — [C1*e*]. Déduction de la formule de Taylor. (217-219).

Morera (*G.*). — [O6*o*]. Sur les systèmes de surfaces et sur leurs trajectoires orthogonales. (282-285).

Lignes d'équidistance. Systèmes dont les trajectoires orthogonales sont des droites.

Ascoli (*G.*). — [D5*c*]. Quelques observations sur mes Notes relatives à l'intégration de l'équation différentielle $\Delta^2 u = 0$. (285-287).

Morera (*G.*). — [D3*b*]. Un théorème fondamental dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. (304-307).

Théorème réciproque de celui de Cauchy sur l'intégrale

$$\int w.dz,$$

le long d'une ligne fermée. Application de ce théorème pour démontrer la légitimité de la représentation d'une fonction par une série ou par un produit infini, uniformément convergents.

Brambilla (*A.*). — [Q2ref. M³4*a*]. Sur les courbes rationnelles dans un espace linéaire d'un nombre quelconque de dimensions. (326-331).

Courbe normale de l'espace S_n. Par sa représentation paramétrique

$$x_r = \sum_{1}^{n}{}_k \binom{n}{k} a_k^r \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k \qquad (r = 1, 2, \ldots, n+1),$$

l'auteur démontre un théorème qui contient comme cas particuliers des théorèmes connus, par exemple la génération d'un *Nullsystem* au moyen d'une cubique gauche.

Aschieri (*Ferd.*). — [N¹2]. Sur l'espace des sphères euclidiennes. (355-361, 416-421 et 449-458).

Beltrami (*Eug.*). — [T2*c*]. Sur la théorie des ondes. (421-435).

Dans les *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität* de Neumann, rédigées par O.-E. Meyer, on établit les lois de Fresnel en les déduisant des équations fondamentales de l'élasticité. L'auteur apporte des éclaircissements à cette déduction, principalement dans le but de rectifier un endroit de l'exposition qui en a été faite dans ces *Vorlesungen* et qui est relatif au cas où l'équation du 3e degré, qui donne la vitesse de propagation des ondes, se décompose en deux équations, l'une linéaire et l'autre quadratique. Les conditions pour que cela ait lieu sont

$$(1)\quad \begin{cases} (B-A'')(C-A'') = (A'+A'')^2 \\ (C-B'')(A-B'') = (B'+B'')^2 \\ (A-C'')(B-C'') = (C'+C'')^2 \\ (A-C'')(B-A'')(C-B'') = (A-B'')(B-C'')(C-A''), \end{cases}$$

A, B, C; A', B', C'; A'', B'', C'' étant les constantes du milieu élastique. En proposant, ainsi que le fait Neumann,

$$A' = A'', \qquad B' = B'', \qquad C' = C'' \qquad \text{(théorie moléculaire)},$$

les (1) entraîneraient

$$(B''-C'')(C''-A'')(A''-B'') = 0.$$

Mais l'auteur observe que Neumann suppose un état du milieu voisin de l'isotropie, et par cela il montre que les conditions (1) peuvent être satisfaites sans que l'on doive tomber dans un cas aussi particulier que celui de supposer deux des A'', B'', C'' égales entre elles. Tout cela ne résultait pas bien clairement de la rédaction des *Vorlesungen*. Puis l'auteur trouve l'équation du 2e degré dans le cas le plus général, que les constantes soient toutes distinctes et les (1) soient satisfaites, et sans introduire d'abord l'hypothèse de l'état approximativement isotropique. Il trouve ainsi un ellipsoïde qu'il appelle *de Fresnel*, et un autre qu'il appelle *de Neumann*, qui ont entre eux une relation remarquable, et qui coïncident dans l'hypothèse de l'état voisin de l'isotropie.

Formenti (*C.*). — [B8*h*]. Dynamique des systèmes qui se meuvent en se conservant affins à eux-mêmes. (435-445).

Le système est supposé avoir un point fixe dans l'origine, et en conséquence de la proportionnalité qui doit avoir lieu entre les volumes des tétraèdres correspondants, on peut réduire le problème au cas du système formé par le point fixe et quatre autres points. Les équations de l'équilibre sont les mêmes que pour l'équilibre astatique; et l'auteur, après en avoir déduit celles du mouvement, donne de celles-ci une transformation propre à mettre en évidence certaines propriétés du mouvement du système. Puis il étudie le cas d'un système qui, outre la condition d'affinité, satisfait aussi à la conservation du volume des tétraèdres.

Morera (*G.*). — [B10*a*]. Une petite contribution à la théorie des formes quadratiques. (552-558).

Si, pour une forme quadratique à n variables, la $(r-1)^{\text{ème}}$ forme adjointe

s'évanouit identiquement, ce qui équivaut à supposer que dans le discriminant de la forme donnée soient identiquement nuls les sous-déterminants jusqu'à l'ordre $r-1$ inclusivement, la $r^{\text{ième}}$ forme adjointe sera un carré parfait.

Pincherle (*S.*). — [H12*h*]. Sur une transformation des équations différentielles linéaires en équations linéaires aux différences, et réciproquement. (559-562).

Aschieri (*Ferd.*). — [Q2]. Sur les espaces formés par des espaces linéaires dans un espace de quatrième espèce (614-619). — Suit à la page 698 sous le titre : *Quelques observations sur les espaces à une dimension et à deux dimensions étant des complexes d'espaces* S_4 (698-703).

Maggi (*G.-A.*). — [R8*e*3]. Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement oscillatoire d'un fil flexible et inextensible, autour d'une configuration d'équilibre. (682-689).

Détermination des composantes λ, μ du déplacement d'un point de la courbe, respectivement parallèles à la tangente et à la normale à la position d'équilibre en ce même point.

Maggi (*G.-A.*). — [D1*c*]. Réduction d'une intégrale multiple. (689-692).

La forme du reste de la série de Taylor, donnée par l'auteur dans sa Note à la page 217 de ce Tome comme une intégrale multiple, est ici ramenée à une intégrale simple.

Ferrini (*R.*). — [T7*a*]. Sur la composition d'une pile voltaïque. (693-697).

Jung (*J.*). — [P4*a*]. Sur une troisième transformation de genre p et du degré $p+1$ associée à toute transformation plane birationnelle. (812-818).

Bertini (*Eug.*). — [Q2]. Sur la Géométrie des espaces linéaires dans un espace de n dimensions. (855-862).

Généralisation de la condition nécessaire et suffisante pour que trois droites soient dans un même plan, c'est-à-dire que toute droite qui en rencontre deux en des points arbitraires rencontre aussi la troisième.

R.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

Tome VI (*fin*) : 1895 [1].

Sauvage (*L.*). — Note sur les diviseurs élémentaires et complément à la théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (228-237).

Dans cette Note il est démontré que, si $(ap-bp)^{l_0}$, $(ap-bq)^{l_1}$, ... sont les plus grandes puissances de $ap-bq$ qui divisent le déterminant

$$\begin{vmatrix} pA_{11}-qB_{11} & \dots & pA_{1n}-qB_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ pA_{n1}-qB_{n1} & \dots & pA_{nn}-qB_{nn} \end{vmatrix},$$

puis tous ses mineurs du premier ordre, etc., les exposants

$$\begin{aligned} l_0-l_1 &= e_1, \\ l_1-l_2 &= e_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

des diviseurs élémentaires fournis par $ap-bq$ ne vont jamais en augmentant.

Dans la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes, les formes canoniques données aux solutions, d'après les théories de Weierstrass sur les formes bilinéaires, correspondent à un déterminant canonique où l'on peut ranger les lignes et les colonnes de manière que la loi précédente des nombres e soit en évidence. On démontre, dans la présente Note, que cette loi des nombres e persiste quand on retourne de la forme canonique à la forme la plus générale.

Enfin, il est montré que les méthodes de Weierstrass et de Fuchs, tout en étant aussi générales l'une que l'autre, sont distinctes et sont le complément l'une de l'autre.

Tome VIII : 1897.

Jamet (*V.*). — Sur la théorie des lignes géodésiques. (117-128).

La réciproque d'une proposition de M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, Livre V, Chap. V) est déduite par M. Jamet du problème suivant :

Chercher une surface dont toutes les normales soient tangentes à une surface donnée.

Les raisonnements employés ont une application à certaines catégories de surfaces dont l'énumération termine le Mémoire.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XX, p. 103.

Jamet (*V.*). — Sur la division des polynomes entiers. (151-162).

Application des intégrales définies (d'après Cauchy) à l'expression du quotient entier de deux polynomes entiers.

Comme corollaires, deux expressions, sous forme de déterminants, du quotient d'un polynome entier par un produit de facteurs binomes à exposants entiers quelconques, et expression générale du reste de cette division. Enfin expression, sous forme succincte, de l'intégrale indéfinie d'une fonction rationnelle.

Macé de Lépinay (*J.*). — Sur les franges des caustiques et les arcs surnuméraires de l'arc-en-ciel. (187-200).

Tome IX : 1898.

Dellac (*H.*). — Similitude des figures solides. (1-108).

Étant données dans l'espace deux figures semblables, existe-t-il un centre de similitude, c'est-à-dire un point tel qu'en faisant tourner l'une des figures autour d'un axe passant par ce point, elle devienne homothétique à l'autre par rapport à ce point?

Cette question avait déjà été résolue par Euler, Magnus, Baltzer, puis par M. Dellac lui-même en 1866 et en 1875, et par MM. Dorlet et Tarry en 1894 et en 1895.

M. Dellac reprend de nouveau cette question et la complète par la recherche des propriétés générales des systèmes semblables et de leurs applications.

Ces propriétés se réduisent à trois : 1° il y a un centre de similitude ou *point double;* 2° et 3° il existe un axe de similitude ou *droite double,* et un plan de similitude ou *plan double.* Dans ces deux derniers cas, il n'y a pas réciprocité si l'angle de rotation est égal à 180°.

L'auteur étudie ensuite les lieux décrits par le centre de similitude lorsque l'une des figures du système subit une translation rectiligne ou une rotation autour d'un axe.

La seconde Partie du Mémoire a pour objet l'étude de la distribution des centres de similitude, qui peuvent être plusieurs quand les figures semblables qui forment le système ne sont pas illimitées dans tous les sens.

Sont examinés les cas de deux plans ou de deux droites avec un rapport ρ de similitude. Dans le cas de deux droites, le lieu est un hyperboloïde déterminé (sans calcul) par ses génératrices.

L'auteur du Mémoire examine ensuite les systèmes formés de deux sphères, de deux cylindres, de deux cônes de même ouverture, de deux hélices coupant les génératrices sous le même angle, de deux polyèdres d'un même nombre de faces. Pour deux hélices dont les axes sont parallèles, le lieu est une transformée d'une certaine hélice. Pour deux polyèdres semblables il y a plusieurs centres distribués sur une sphère Ω et formant des polygones plans généralement irréguliers inscrits dans des petits cercles de la sphère Ω.

Dans la troisième Partie du Mémoire, M. Dellac recherche quels sont tous les systèmes admettant plusieurs centres de similitude, ou, ce qui revient au

même, toutes les figures pouvant coïncider avec elles-mêmes de plusieurs manières différentes.

Si, lorsqu'une figure F fait une révolution entière autour d'un axe, elle rencontre 2, 3, 4, ... positions où elle coïncide avec sa position primitive, cet axe est dit *binaire, ternaire, quaternaire,* etc.

1° On sait que la figure F a un axe binaire; on en conclut qu'elle est symétrique par rapport à cet axe.

2° Si la figure F admet trois axes binaires qui doivent se couper et être rectangulaires, elle est symétrique par rapport à chacun de ces axes; par exemple, un parallélipipède rectangle.

3° Supposons la figure F limitée dans tous les sens et ayant au moins un axe d'ordre supérieur à 2, il faut alors et il suffit qu'en joignant certains sommets de ce corps on puisse former un polyèdre régulier, appelé *noyau,* et qu'en joignant les autres sommets, soit entre eux, soit avec ceux-là, on puisse former des corps identiques surmontant les faces extérieures de ce polyèdre régulier. Chacun de ces corps est formé d'un même nombre d'onglets identiques ayant pour arête commune l'axe de la face, pour bases les triangles au centre de cette face, et séparés par les demi-plans passant par l'axe et les rayons consécutifs de la face régulière, les parties identiques de ces onglets s'obtenant en tournant dans le même sens de rotation. Pour que cet énoncé soit général il faut regarder un polygone régulier double comme un polyèdre régulier à deux faces.

4° Si le corps n'est pas limité dans tous les sens, ou bien si le nombre des positions de coïncidence est infini, on trouve la surface de révolution ou la vis.

M. Césaro, professeur à l'Université de Liège, avait déjà traité à peu près le même sujet, mais par des méthodes bien différentes.

Fabry (*L.*). — Recherches sur l'origine des comètes et les hypothèses cosmogoniques. (155-185).

Complément à l'étude *Sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes,* parue au Tome IV.

Tome X; 1899.

Stephan (*E.*). — La distribution de l'heure par la Faculté des Sciences de Marseille. (Préface, XXIII-XXVIII).

D'après une méthode de réglage des horloges par le pendule, déjà indiquée par Huygens, un curseur peut glisser sur la verge du balancier au moyen d'un mécanisme simple.

On sait que, quand on fixe une masse additionnelle sur le balancier d'une horloge à une distance du point de suspension inférieure à la longueur du pendule simple synchrone, il existe une position, peu distante du milieu, où l'effet produit pour l'accélération de la marche est maximum. Au début, le curseur est placé à peu près au quart de la verge du balancier en partant du

haut, et la position de la masse est ensuite réglée de façon à avoir une marche aussi parfaite que possible. Il suffit de remonter un peu le curseur pour ralentir la marche.

Jusqu'ici l'emploi d'une masse additionnelle sur le balancier n'avait été réalisé qu'en vue d'un réglage permanent.

Riquier (*Ch.*). — Sur le calcul inverse des dérivées. (1-60).

On nomme *calcul inverse des dérivées* l'opération qui consiste à rechercher une fonction dont on suppose connues telles ou telles dérivées. La méthode à employer consiste à construire *a priori* les développements des solutions hypothétiques, à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette construction puisse s'effectuer sans incompatibilité, et à démontrer finalement la convergence des développements. Tel est le point de vue adopté, dès 1872, par M. Méray. Mais la question ainsi posée n'est traitée par lui que dans le cas de dérivées du premier ordre. Pour les autres cas, il donne seulement quelques indications générales.

M. Riquier s'est proposé de traiter le problème en général avec l'énoncé suivant :

Trouver toute fonction des variables x, y, ..., satisfaisant à la double condition :

1° *D'être développable par la formule de Taylor à partir de valeurs données x_0, y_0, ...;*

2° *D'avoir pour dérivées d'ordres quelconques donnés (égaux ou inégaux) des fonctions données de x, y, ...*

Le Mémoire est divisé en trois Parties. Dans la première, on examine le cas simple d'une dérivée donnée du premier ordre de la fonction inconnue. Dans la seconde, on fixe l'économie des conditions initiales dont la donnée détermine entièrement une solution du problème général. Dans la dernière, on opère la réduction du problème général au cas élémentaire qui fait l'objet de la première Partie.

Jamet (*V.*). — Sur les surfaces enveloppes de sphères. (61-78).

Une surface Σ étant regardée comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une surface donnée S et dont le rayon varie en fonction des deux paramètres qui définissent la position de son centre, M. Jamet détermine :

1° La position du plan qui contient la normale à la surface S et le rayon de la sphère correspondante aboutissant au point où celle-ci touche son enveloppe;

2° L'expression de l'angle formé par ces deux directions;

3° Le théorème de Malus et de Dupin sur les faisceaux de rayons incidents normaux à une surface;

4° La recherche des surfaces dont toutes les normales coupent une surface donnée sous un angle qui dépend uniquement de la portion de normale comprise entre les deux surfaces.

M. Jamet indique en terminant une intégrale complète de l'équation aux

dérivées partielles qui correspond à la détermination de toutes les surfaces qui coupent sous un angle donné toutes les normales à une surface donnée.

Jamet (*V.*). — Sur la théorie des formes quadratiques. (127-145).

M. Jamet donne une méthode de calcul pour décomposer deux formes quadratiques en sommes formées des mêmes carrés. La méthode conduit à ramener la question au cas où les deux formes données ont une variable de moins. Les deux formes nouvelles combinées linéairement d'une manière arbitraire donnent une forme générale dont le discriminant sert au calcul dans le cas des diviseurs élémentaires simples. Dans le cas des diviseurs multiples, on transforme ce discriminant en une intégrale définie qu'on décompose en une somme de résidus. M. Jamet retombe sur les formules bien connues de M. Darboux.

Tome XI; 1900.

Jamet (*V.*). — Sur un théorème de M. Lindemann. (92-103).

Si l'on élève le nombre e à des puissances marquées par les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, et qu'on fasse la somme de ces puissances, on obtient une certaine somme. Le théorème de M. Lindemann sur l'impossibilité d'une relation linéaire à coefficients entiers entre plusieurs sommes ainsi définies est démontré par M. Jamet au moyen d'une méthode qui se rattache à celle qu'a employée M. Hurwitz pour démontrer, après Hermite, la transcendance du nombre e.

Le théorème d'Hermite et la transcendance du nombre π (d'après M. Hilbert) sont des corollaires du théorème démontré, après M. Lindemann, par M. Jamet.

Godefroy (*M.*). — Sur les développements en séries entières de la théorie de la fonction gamma. (117-124).

Du développement de $\log\Gamma(1+x)$ on déduit les développements de $\Gamma(1+x)$ et de $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$. Ces deux derniers donnent immédiatement ceux des fonctions de Prÿm, $P(1+x)$ et $Q(1+x)$.

Sauvage (*L.*). — Notice sur la vie et les travaux de E. Amigues, proviseur au lycée de Toulon, anciennement chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Marseille. (125-140).

Dellac (*H.*). — Note sur l'élimination, méthode du parallélogramme. (141-164).

L'intérêt spécial de cette Note, en dehors de la question qui s'y trouve traitée, est dans sa provenance. Cauchy annonce, dans les *Comptes rendus de*

l'Académie des Sciences (t. XLIV, 1857), une application de ses *clefs anastrophiques* à l'élimination. M. Dellac avait eu, de Cauchy lui-même, communication verbale du principe de la méthode. Il l'a débarrassée de l'algorithme des *clefs anastrophiques* et la présente suivie du travail personnel qu'il a fait sur le nombre des termes.

Comme il existait déjà une méthode d'élimination portant le nom de Cauchy, on a appelé celle-ci *méthode du parallélogramme*, à cause de la figure géométrique qui y joue un rôle important.

On sait que le résultant de deux équations de degré n est le déterminant d'Euler d'ordre $2n$. La méthode actuelle consiste à donner le développement de ce résultant sous forme d'une somme de produits de n facteurs qui sont les binomes de la méthode de Bezout. On y arrive en développant, suivant la règle de Laplace, un déterminant suivant les mineurs du second ordre. On a pu donner les tableaux de ces développements jusqu'à $n = 4$.

Il y a intérêt à connaître à l'avance les nombres de termes de ces Tableaux. De $n = 1$ à $n = 8$, ces nombres sont

$$1,\ 2,\ 7,\ 38,\ 295,\ 3098,\ 42271,\ 726734.$$

Ces nombres sont alternativement pairs et impairs et la somme de deux consécutifs est divisible par 3.

La racine commune est le quotient de deux polynomes analogues au résultant. On a pu en donner les Tableaux jusqu'à $n = 4$.

Pour les dénominateurs, les nombres de termes sont, depuis $n = 2$ jusqu'à $n = 8$,

$$1,\ 3,\ 15,\ 111,\ 1131,\ 15123,\ 256335.$$

Pour les numérateurs ces nombres sont

$$1,\ 2,\ 9,\ 63,\ 621,\ 8127,\ 135729.$$

Tome XII; 1901.

Jamet (*V.*). — Sur les équations anharmoniques. (1-21).

Si une équation à deux variables x et t est algébrique par rapport à x, et si toutes ses racines sont des fonctions de t vérifiant une même équation de Riccati, cette équation est dite *anharmonique*. L'étude de M. Jamet comprend :

1° La loi de formation des équations anharmoniques;

2° La démonstration du théorème de M. Darboux sur le caractère anharmonique de leurs covariants;

3° L'étude particulière des équations anharmoniques du quatrième ordre et la transformation de l'équation de Riccati correspondante en une équation canonique à coefficients doublement périodiques;

4° L'intégration de cette équation canonique et de l'équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, qui s'y rattache directement.

Rouquet (*V.*). — Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales. (219-253).

Toutes les surfaces Σ dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales se rangent dans l'une des catégories suivantes :

1° Les surfaces moulures de Monge, comprenant, comme cas particuliers, les surfaces qui sont doublement surfaces Σ;

2° Les surfaces enveloppes de sphères à cercles caractéristiques égaux;

3° Les surfaces engendrées par des *développantes aréolaires* de conique entraînées dans les plans osculateurs ou dans les plans normaux d'une courbe à courbure constante;

4° Les surfaces engendrées par des tractrices égales ayant même asymptote, ou par des courbes parallèles à une tractrice, contenues dans les plans rectifiants d'une hélice cylindrique aux éléments principaux de laquelle elles sont invariablement liées.

Il résulte des modes de génération de ces surfaces qu'on peut former leurs équations dans un système d'axes fixes sans y faire intervenir d'autres quadratures que celles qui sont nécessaires pour définir les courbes à courbure constante ou les hélices cylindriques.

De plus, dans tous les cas, sauf celui des enveloppes de sphères, les lignes de seconde courbure sont pareillement tout intégrées.

La méthode de M. Rouquet est entièrement géométrique, et fondée sur les propriétés de certains réseaux plans-orthogonaux déduits des surfaces dont les lignes de courbure d'une famille sont planes, telles qu'elles sont déjà exposées dans la Thèse de M. Rouquet.

La définition et les principales propriétés d'une *développante aréolaire* de conique sont données par M. Rouquet sous la forme suivante :

Une développante aréolaire d'une conique de foyer O est le lieu décrit par un point M qui, tandis que le point P parcourt la conique, se déplace sur la tangente à cette conique au point P, de manière :

1° Qu'il y ait constamment équivalence entre l'aire du triangle OPM et celle du secteur de conique balayé par le rayon OP, à partir d'une position initiale;

2° Que les deux aires soient situées du même côté du rayon vecteur OP.

Ces développantes se partagent en trois genres. Celles du genre elliptique sont des spirales indéfinies. Les développantes paraboliques sont seules des courbes algébriques. Il y a toujours un rebroussement de première espèce à l'extrémité du rayon vecteur initial qui détermine la développante, et ce rayon vecteur est la tangente de rebroussement. La développante a mêmes asymptotes que la conique. La tangente en un point de la développante est parallèle au rayon vecteur correspondant de la conique. Le rayon de courbure varie comme l'aire du secteur de conique, car ce rayon de courbure est égal au double de cette aire divisé par le paramètre de la conique.

Tome XIII; 1902.

Charve (*L.*). — Frottement dans les engrenages. (1-14).

Les roues d'engrenage servent à transformer un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle. En

général, on construit les roues de manière que le rapport de leurs vitesses angulaires reste constant; mais cette condition n'est pas satisfaite dans la transmission du mouvement des cames aux marteaux, dont le système constitue cependant de véritables engrenages.

Lorsque les roues ont été munies de dents, de manière qu'elles puissent engrener l'une avec l'autre, on appelle *roue menante* celle sur laquelle est appliquée la puissance, et *roue menée* celle sur laquelle est appliquée la résistance Si les dents étaient des corps parfaitement polis, on pourrait choisir arbitrairement la roue menante et la roue menée. Mais le frottement qui s'exerce entre deux dents peut, lorsqu'il est assez grand, empêcher parfois tout mouvement, ou, dans d'autres cas, ne permettre le mouvement que dans un seul sens. Si tout mouvement est impossible, aucune roue ne peut être menante ou menée. Si, au contraire, le mouvement ne peut se produire que dans un seul sens, la roue menante n'est pas arbitraire.

Lorsque l'arc-boutement existe complet, ou, dans d'autres cas, dans un seul sens, si l'on augmente indéfiniment la puissance, on finira par briser les dents de l'engrenage.

M. Charve montre :

1° Que, si la tangente commune aux dents en contact coupe le prolongement de la ligne des centres des roues engrenées, tout mouvement deviendra impossible pour une valeur assez grande du frottement;

2° Que, si la tangente commune aux dents en contact passe entre les centres des roues engrenées, le mouvement ne sera possible que dans un sens, si le frottement est suffisamment grand; ce sens dans lequel le mouvement sera toujours possible, quel que soit le frottement, est celui qui éloigne le point de contact de la ligne des centres.

Tome XIV; 1902.

Sauvage (*L.*). — Premiers principes de la théorie générale des fonctions de plusieurs variables. (1-69).

Lorsqu'un point $z = x + y\sqrt{-1}$ trace dans son plan une courbe, la figure de cette courbe ne donne aucune indication sur le mouvement du point z considéré comme un mobile, et il n'en résulte aucun inconvénient dans la théorie des fonctions d'une seule variable. Il n'en est pas de même pour les fonctions de plusieurs variables.

Si l'on appelle *chemin* du point z dans son plan la courbe tracée par z dans le plan des z, et si l'on appelle *marche* de z toute équation permettant de connaître la loi du mouvement du mobile z sur son chemin, il y a des cas généraux : 1° où la variation d'une fonction de plusieurs variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ est indépendante (dans certaines limites de déformation) des chemins et des marches; 2° où la variation de la fonction dépend (dans certaines limites) des chemins seulement; 3° où la variation de la fonction dépend des chemins et des marches.

Dans un Chapitre, intitulé *Premières définitions*, M. Sauvage définit, comme d'ordinaire, la *régularité* d'une fonction au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. La série entière représentative est convergente dans une infinité de *domaines déter-*

minés ou figurés formés d'un cercle de centre a_1 et de rayon R_1 dans le plan des z_1, d'un cercle de centre a_2 et de rayon R_2 dans le plan des z_2, etc. Chaque domaine est déterminé par ses rayons $R_1, R_2, \ldots, R_n$. L'*ensemble domanial* est l'ensemble des domaines déterminés ou figurés, et n'est pas lui-même figuré.

Le second Chapitre est consacré à l'holomorphisme. On appelle *ensemble régional* tout ensemble de points $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ qui contient des points de régularité et par suite des ensembles domaniaux. On démontre que, dans un ensemble régional d'holomorphisme, tous les mouvements du point $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ qui conduisent ce point d'un même point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ à un même point $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont équivalents, c'est-à-dire font passer la fonction u d'une même valeur u_a à une même valeur u_b.

Dans la démonstration de ce principe, on fait intervenir les mouvements du point $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Un mouvement est, par exemple, déterminé par les chemins de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dans leurs plans respectifs, par le mouvement arbitraire de z_1, et par les lois des mouvements relatifs de $z_2, z_3, \ldots, z_n$, et la conclusion du Chapitre est la suivante :

Dans un ensemble régional quelconque, il ne peut coexister sur des chemins donnés de mouvements non équivalents que si ces chemins renferment un ou plusieurs points singuliers.

On est ainsi amené aux points singuliers qui font l'objet principal de la troisième Partie du Mémoire. Un point singulier est un point où la fonction n'est pas régulière. Chaque point singulier intervient par sa position et par sa nature. C'est la question de position que l'on discute. Les seuls points singuliers que l'on accepte sont ceux définis par des conditions analytiques, les *conditions d'inégalité* étant écartées.

S'il n'y a qu'une variable z, sa marche est arbitraire sur n'importe quel chemin, et la classification des mouvements du point z se ramène à la classification des chemins.

Le cas de deux variables est traité en détail, et l'on montre qu'il ne suffit plus de donner les chemins suivis par les variables, mais qu'il faut encore considérer la loi du mouvement relatif de l'une des variables par rapport à l'autre, loi qu'on appelle le *rapport des marches*. Lorsqu'on a précisé la manière dont les mouvements du point (z_1, z_2) peuvent être différents entre eux, on montre comment on peut les grouper systématiquement par le moyen d'une figure auxiliaire qu'on appelle symboliquement un *parallélogramme*.

On applique à des exemples les raisonnements établis, et l'on traite des cas de chemins ouverts pour des fonctions uniformes et non uniformes, un cas de chemins fermés, et un cas où les données sont un chemin et le rapport des marches.

Le cas d'un mouvement donné pour une fonction de plus de deux variables est ramené aux cas précédents par la remarque suivante justifiée dans le cours du Mémoire : dans tout mouvement fini du point $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, on peut remplacer la fonction des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par la suite d'un nombre fini de fonctions d'une seule variable, ou par la suite d'un nombre fini de fonctions de deux variables.

L. S.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 4e série, t. I; 1901 (1).

Césaro (*E.*). — Sur la détermination des foyers des coniques. (1-10).

A 7210

Fontené (*G.*). — Tétraèdres variables liés à des quadriques et à des cubiques gauches. (10-14).

A 7250 7260

Iaggi (*E.*). — Démonstration directe du théorème d'addition de la fonction elliptique $Z(x)$. (14-16).

A 4040

Iaggi (*E.*). — Relation entre les zéros et les coefficients d'une fonction entière. (16-20).

A 3610

Gallian. — Démonstration du théorème des travaux virtuels. (20-26).

B 1200

Tsurnicki Hayashi. — Nouveau procédé de résolution de l'équation du quatrième degré. (26-28).

A 2430

Issaly. — Étude sur les pseudo-surfaces, en général, et sur un exemple particulier de pseudo-surfaces minima. (53-86).

A 8820 8830

Bricard (*R.*). — Sur la similitude directe dans le plan. Application de la méthode des équipollences. (112-120).

A 6810 0840

Monnet. — Sur les caustiques par réflexion. (120-129).

A 8420

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 239

De Saint-Germain. — Sur les solides dont le volume s'exprime au moyen de deux formules élémentaires. (129-131).

A 8460

Iaggi (*E.*). — Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique. (146-163).

A 3620

Lémeray (*E.*). — Sur les fonctions numériques et la symétrie abélienne. (163-168).

A 2910

Duporcq (*E.*). — Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (168-171).

A 7630

Fabry (*E.*). — Sur une propriété de la fonction ζ. (205-211).

A 4040

Vogt. — Théorème relatif aux mineurs d'un déterminant. (211-214).

A 2010

Iaggi (*E.*). — Sur une représentation géométrique des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{sn}(x + K)$ et leur analogie avec les fonctions circulaires. (241-281).

A 4040

Elie (*B.*). — Étude d'une élastique gauche. Hélice soumise à l'action d'un couple. (292-313).

A 8470 B 1260

Laurent (*H.*). — Usage des formes quadratiques dans la théorie des équations. (313-319).

A 2840 2420

Fontené (*G.*). — Sur un contour hexagonal variable circonscrit à une quadrique. (319-321).

A 7250

Vogt. — Sur l'apolarité des formes binaires. (337-365).

A 2050

D'Ocagne (*M.*). — Sur les transformations polaires de la courbure. (365-369).

A 8430

Piccioli (*H.*). — Sur les courbes en S_n et particulièrement sur celles à courbures constantes. (369-374).

A 8490

Legrand (*E.*). — Propriété du quadrilatère inscriptible. (374-376).

A 6810

Lemoine (*E.*). — Sur une détermination nouvelle simple de la direction des axes d'une conique. (385-401).

A 7210

Barisien (*E.-N.*). — Aire de la podaire oblique de la développée oblique de l'ellipse. (401-412).

A 8460

D'Ocagne (*M.*). — Sur un système spécial de coordonnées tangentielles et sur la transformation par tangentes orthogonales. (433-450).

A 8020 8430

Iaggi (*E.*). — Sur les substitutions à une variable et les fonctions qu'elles laissent invariables. (450-465).

A 2000 2030

D'Ocagne (*M.*). — Construction des centres de courbure des courbes de Lamé. (465-467).

A 8430

Collignon (*Ed.*). — Problèmes sur les normales aux courbes planes. (481-509).

A 8430

Lémeray (*E.*). — Sur certains nombres analogues aux nombres de Bernoulli. (509-516).

A 3260

Iaggi (*E.*). — Propriétés générales des substitutions à une variable et des fonctions qu'elles laissent invariables. (529-548).

A 4070

Issaly. — Sur le degré de généralité des équations de Lagrange et leur interprétation géométrique. (548-559).

B 2020

Lacour (*E.*). — Mouvement d'un plan invariablement lié à une bielle (exercice sur les fonctions elliptiques). (559-565).

A 4040

E. E.[1]

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXXIV; 1902.

Duhem (*P.*). — Stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système affecté d'un mouvement de rotation uniforme. (23-24).

B 2100

Cotton (*E.*). — Sur certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales. (29-31).

A 4830 5210 1240

Picard (*E.*). — Sur les périodes des intégrales doubles et sur une classe d'équations différentielles linéaires. (69-71).

A 8060 4450

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVI$_2$, 1902, p. 73.

Guldberg (*A.*). — Sur les paramètres intégraux. (81-82).

A 5240 1240

Boutroux (*P.*). — Sur la théorie des fonctions entières (82-85).

A 3610

Duhem (*P.*). — Sur les conditions aux limites en Hydrodynamique. (149-151).

B 2460 2490

Boutroux (*P.*). — Sur la croissance des fonctions entières. (153-155).

A 3610

Painlevé (*P.*). — Remarque sur la Communication précédente. (155-157).

A 3610 4880

Nielsen (*N.*). — Sur les séries de factorielles. (157-160).

A 3630

Fredholm (*J.*). — Sur une classe de transformations rationnelles. (219-222).

A 6030 2010

Levi (*B.*). — Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques. (222-225).

A 8020

Duhem (*P.*). — Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qui le baignent. (265-267).

B 2490 2520

Maillet (*E.*). — Quelques remarques sur les fonctions entières. (275-277).

A 3610

Deslandres (*H.*). — Détermination de la trajectoire exacte des aérostats par rapport au sol. (344-346).

B 2860

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions quasi-entières. (405-407).

A 3610

Adhémar (*R. d'*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles intégrables par approximations successives. (407-409).

A 4840

Tannenberg (*W. de*). — Sur quelques transformations de contact. (409-411).

A 8020 5230

Painlevé (*P.*). — Sur les transcendantes méromorphes définies par les équations différentielles du second ordre. (449-453).

A 3610 4820

Duhem (*P.*). — Sur l'impossibilité de certains régimes pèrmanents au sein des fluides visqueux. (456-458).

B 2490 2520

Goursat (*E.*). — Sur quelques transformations de Bäcklund. (459-462).

A 5230 4840

Maillet (*E.*). — Sur les lignes de décroissance maxima des modules et des équations algébriques ou transcendantes (517-518).

A 3610 2410 4040

Boutroux (*P.*). — Sur les fonctions entières du genre infini et les transcendantes méromorphes découvertes par M. Painlevé. (519-522).

A 3610 4820

Duhem (*P.*). — Sur l'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux. (580-581).

B 2490

Lebesgue (*H.*). — Un théorème sur les séries trigonométriques. (585-587).

A 5610 3260

Kluyver (*J.-C.*). — Sur les séries de factorielles. (587-589).

A 3630

Picard (*E.*). — Quelques remarques sur les périodes des intégrales doubles et la transformation des surfaces algébriques. (629-631).

A 3270 4070 8060

Autonne (*L.*). — Sur les groupes réguliers d'ordre fini. (640-642).

A 1230

Levi (*B.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (642-644).

A 4020 8020

Duhem (*P.*). — L'extension du théorème de Lagrange aux liquides visqueux et les conditions aux limites. (686-688).

B 2490 A 5660

Séguier (*de*). — Sur un théorème de M. Frobenius. (692-693).

A 1210

Wallenberg (*E.*). — Sur les expressions linéaires homogènes commutatives. (693-696).

A 4850

Holmgren (*E.*). — Sur les surfaces à courbure constante négative. (740-743).

A 8450 3210 6410

Freycinet (*de*). — Note accompagnant la présentation d'un Ouvrage qu'il vient de publier sur les principes de la Mécanique rationnelle. (761-762).

B 0000

Fejer (*L.*). — Sur la différentiation de la série de Fourier. (762-765).

A 5610 3210

Petot (*A.*). — Sur les conditions de stabilité des automobiles dans les courbes. (765-768).

B 1640

Painlevé (*P.*). — Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes. (808-813).

A 4070 3610

Bussy (*de*). — Résistance due aux vagues satellites. (813-818).

B 2850

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe. (876-882).

A 4070 2830 2840 8060

Bussy (*de*). — Résistance due aux vagues satellites. (882-885).

B 2850

Tzizeica (*G.*). — Sur la déformation continue des surfaces. (894-895).

A 8850

Rabut. — Lois de déformation, principes de calcul et règles d'emploi scientifiques du béton armé. (895-898).

B 3620 3630 3280

Maillet (*E.*). — Sur les séries divergentes et les équations différentielles. (975-977).

A 3220 3610 4810

Goursat (*E.*). — Sur une classe de transformations de Bäcklund. (1035-1038).

A 5230 5210

Demoulin (*A.*). — Sur la déformation des conoïdes droits. (1038-1040).

A 8850

Gros (*A.*). — Le problème des surfaces chargées debout. Solution dans le cas du cylindre de révolution. (1041-1043).

B 3270 3280

Jordan (*C.*). — Notice sur les travaux de M. Lazare Fuchs. (1081-1083).

A 0010

Duhem (*P.*). — Sur les fluides compressibles visqueux. (1088-1090).

B 2490

Tannenberg (*W. de*). — Sur quelques systèmes orthogonaux et leur application au problème de la déformation du paraboloïde. (1100-1102).

A 8850

Clairin (*J.*). — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. (1102-1103).

A 5230

Maillet (*E.*). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. (1121-1133).

A 3610 2890 2920

Fabry (*E.*). — Sur les rayons de convergence d'une série double. (1190-1192).

A 3220 3640

Desaint (*L.*). — Sur la représentation exponentielle générale et quelques-unes de ses applications (1193-1195).

A 3630 3640

Pompéiu (*D.*). — Sur les fonctions de variables complexes. (1195-1197).

A 3600

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes à multiplication complexe (1261-1266).

A 4070 2840

Duhem (*P.*). — La viscosité au voisinage de l'état critique. (1272-1274).

B 2490 C 1800

Obriot. — Sur les équations différentielles du second ordre qui admettent un groupe fini continu de transformations algébriques. (1288-1291).

A 1230 4820 4040

Servant. — Sur deux problèmes de Géométrie. (1291-1293).

A 8450 8850

Ringelmann. — Sur une méthode de comparaison des moteurs de différentes puissances. (1293-1295).

C 2490

Borel (*E.*). — Sur les fonctions de genre infini. (1343-1344).

A 3610

Gravé (*D.*). — Un cas remarquable de transformation rationnelle de l'espace. (1345-1346).

A 8020

Lecornu (*L.*). — Sur les moteurs à combustion. (1347-1349).

C 2490

Fouché (*M.*). — Sur certains couples de surfaces applicables. (1412-1414).

A 8840 8850

Cartan (*E.*). — Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables. (1415-1418).

A 4830 5240 1230

Jouguet. — Sur la rupture et la déformation de l'équilibre. (1418-1420).

B 3620

2me Partie.

De Montessus de Ballore. — Sur les fractions continues algébriques. (1489-1491).

A 3220

Fredholm (*I.*). — Sur une classe d'équations fonctionnelles (1561-1564).

A 6030 2010

Cartan (*E.*). — Sur l'intégration des systèmes différentiels complets complètement intégrables. (1564-1566).

A 4830 5240 1230

Lecornu (*L.*). — Sur les moteurs à injection. (1566-1568).

C 2490

Tome CXXXV.

Painlevé (*P.*). — Sur le développement des fonctions analytiques en séries de polynomes. (11-15).

A 3630

Autonne (*L.*). — Sur un groupe nouveau d'ordre fini linéaire à quatre variables. (22-23).

A 1210

Korn (*A.*). — Application de la méthode de la moyenne arithmétique aux surfaces de Riemann. (94-95).

A 5660 3620

Appell (*P.*). — Rapport sur un Mémoire de M. Torres, concernant un avant-projet de ballon dirigeable, présenté à l'Académie dans la séance du 26 mai 1902. (141-146).

B 2860

Borel (*E.*). — Sur la généralisation du prolongement analytique. (150-152).

A 3630

Painlevé (*P.*). — Observations sur la Communication précédente. (152-153).

A 3630

Picard (*E.*). — Sur une propriété curieuse d'une classe de surfaces algébriques. (217-220).

A 8060

Boussinesq (*J.*). — Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'une translation rapide; équations du mouvement et conséquences générales. (220-225).

C 3820

Korn (*A.*). — Sur le problème de Dirichlet pour des domaines limités par plusieurs contours (ou surfaces). (231-232).

A 5660

Boussinesq (*J.*). — Réflexion et réfraction par un corps transparent animé d'un mouvement rapide : ondes réfléchies et réfractées; amplitude des vibrations. (269-273).

C 3820

Boussinesq (*J.*). — Réflexion et réfraction par un corps animé d'une translation rapide : construction des rayons, indépendante de la translation, et rotation, paraissant au contraire en dépendre, du plan de polarisation du rayon réfracté. (309-314).

C 3820

Vallier (*E.*). — Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. (314-316).

B 1650

Lindelöf (*E.*). — Sur les fonctions entières de genre fini (316-319).

A 3610

Considère. — Résistance à la traction du béton armé. (337-341).

B 3620

Kœnigs (*G.*). — Sur l'assemblage de deux corps. (343-346).

B 0430

Considère. — Étude théorique de la résistance à la compression du béton armé. (365-368).

B 3620

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions entières et quasi-entières et les équations différentielles. (391-392).

A 3610 4820

Liouville (*R.*). — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (392-395).

A 4880 4850

Painlevé (*P.*). — Sur l'irréductibilité des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. (411-415).

A 4880 4820

Considère. — Étude expérimentale de la résistance à la compression du béton armé. (415-419).

B 3620

Maillet (*E.*). — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. (434-435).

A 4810 0430

Boussinesq (*J.*). — Extension du principe de Fermat, sur l'économie du temps, au mouvement relatif de la lumière dans un corps transparent hétérogène, animé d'une translation rapide. (465-470).

C 3820

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation continue des surfaces (503-505).

A 8850

Stekloff (*W.*). — Remarque sur un problème de Clebsch sur le

mouvement d'un solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. de Brun. (526-528).

B 1620 B 2440 A 4060

De Séguier. — Sur un théorème de M. Frobenius. (528-530).

A 1210

Boussinesq (*J.*). — Démonstration générale de la construction des rayons lumineux par les surfaces d'onde courbes. (559-563).

C 3820

Servant (*M.*). — Sur l'habillage des surfaces. 575-577).

A 8840 8850

Haton de la Goupillière. — Sur le problème des brachystochrones. (614-619).

B 1610

Beaulard (*F.*). — Sur les paramètres élastiques des fils de soie. (623-626).

B 3290

Haton de la Goupillière. — Quelques cas d'intégration de l'équation des brachystochrones. (657-662).

A 4820 B 1610

Schlesinger (*L.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques. (676-678).

A 3610 4010

Chessin (*A.*). — Sur l'équation de Bessel avec second membre. (678-679).

A 4420

Suchar (*P.*). — Sur un exemple de transformations corrélatives en Mécanique. (679-682).

B 1610

Ocagne (*M. d'*). — Sur la résolution nomographique du triangle de position pour une latitude donnée. (728-730).

V 0090

Liouville (*R.*). — Sur les transcendantes uniformes définies par les équations différentielles du second ordre. (731-732).

A 4880 3610

Painlevé (*P.*). — Sur les transcendantes uniformes définies par l'équation $y^n = 6y^2 + x$. (757-761).

A 4880 3610

Duhem (*P.*). — Sur les quasi-ondes. (761-763).

B 2400 C 9050

Autonne (*L.*). — Sur les substitutions crémoniennes dans l'espace. (776-778).

A 1230

Jouguet. — Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre. (778-780).

B 3620

Cartan (*E.*). — Sur l'équivalence des systèmes différentiels. (781-783).

A 5240 1230 1240

Stekloff (*W.*). — Sur certaines égalités remarquables. (783-786).

A 5610 3260

Arsonval (*d'*). — Pendule de Foucault simplifié. (832-833).

B 1640

Vallier (*E.*). — Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. (842-845).

B 1650

Stekloff (*W.*). — Sur la représentation approchée des fonctions. (848-851).

A 3260 3210

Cartan (*E.*). — Sur la structure des groupes infinis. (851-854).

A 1240

Maillet (*E.*). — Sur les fonctions monodromes à point singulier essentiel isolé. (889-891).

A 3610

Esclangon (*E.*). — Sur une extension de la notion de périodicité. (891-894).

A 3210

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur l'intégrale de Laplace-Abel (937-939).

A 3610 3260

Duhem (*P.*). — Sur les conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un système visqueux. (939-941).

B 2520

Vallier (*E.*). — Tracé des courbes de pression. (942-943).

B 1650

Stekloff (*W.*). — Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. (946-949).

A 3260 3210

Le Vavasseur (*R.*). — Sur les congruences à plusieurs inconnues relativement à un nombre premier impair. (949-952).

A 2850

Auric. — Sur la généralisation des fractions continues (950-952).

A 3220 2840

Liouville (*R.*). — Sur les transcendantes uniformes, définies par des équations différentielles du second ordre. (952-954).

A 4880 4820

Painlevé (*P.*). — Sur l'irréductibilité de l'équation $y'' = 6y^2 + x$. (1020-1025).

A 4880 4820

Combebiac. — Sur les propriétés du plan au point de vue de l'*Analysis situs.* (1044-1045).

A 6410 6420

Krause (*M.*). — Sur une formule sommatoire dans la théorie des fonctions à deux variables. (1045-1048).

A 3240

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre et les variables sans inertie. (1088-1091).

B 2520

Adhémar (*R. d'*). — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique, à plus de deux variables indépendantes. (1100-1101).

A 4840

Rapport sur le grand prix des Sciences mathématiques. (1154-1161).

A 1230 1240 5230 5240

Rapport sur le prix Bordin. (1162).

A 8850

Rapport sur le prix Montyon.

B 3210

Duhem (*P.*). — Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable. (1290-1293).

B 2520

Hadamard (*J.*). — Sur les fonctions entières. (1309-1311).

A 3610

Stekloff (*W.*). — Remarque relative à ma Note sur la représentation approchée des fonctions. (1311-1313).

A 3210 3220 3260

Lerch (*M.*). — Sur la formule fondamentale de Dirichlet qui sert à déterminer le nombre de classes de formes quadratiques binaires définies. (1314-1315).

A 2830 3220

Lindelöf (*E.*). — Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique de la série de Taylor. (1315-1318).

A 3630

Mayor (*R.*). — Sur une représentation plane de l'espace et son application à la Statique graphique. (1319-1321).

A 8020 B 1250

J. T.

MATHEMATISCHE ANNALEN [1].

Tome XL; 1892.

Stahl (*W.*). — Sur la génération des courbes gauches rationnelles. (1-54).

Une courbe gauche étant définie par les équations

$$\rho x_i = \varphi_i(\mu) = \sum_{p=0}^{n} a_{ip}\mu^{n-p} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

il existe $(n-3)$ formes d'ordre n, linéairement indépendantes

$$f_k(\mu) = \sum_{p=0}^{n} c_n^p b_{kp}\mu^{n-p},$$

conjuguées des $\varphi_i(\mu)$, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_{i,p} b_{k,n-p} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \qquad (k = 1, \ldots, n-3).$$

L'auteur étudie en détail les formes d'ordre $(n+r)$ dont la $r^{\text{ième}}$ polaire est

[1] Cf. *Bulletin*, t. XX_2, p. 72.

conjuguée par rapport aux $\varphi_i(\mu)$; ces formes le conduisent à associer à toute courbe d'ordre n des faisceaux de plans et des faisceaux de droites dont il développe simultanément les propriétés. Une classification des courbes rationnelles d'ordre n en résulte.

Ce travail contient de nombreuses applications aux courbes des ordres 3, 5, 7, 9.

Hölder (*O.*). — Les groupes simples d'ordre inférieur à 200. (55-88).

Il s'agit ici des groupes formés d'un nombre limité d'opérations (groupes de substitutions, par exemple), envisagés au point de vue de leur *structure* (ou *composition*). On connaît six types différents de groupes *simples* dont chacun renferme un nombre illimité de groupes différents : les groupes d'ordre premier qui ne possèdent aucun sous-groupe; le groupe alterné des substitutions de n lettres ($n > 4$); les types signalés par M. Jordan (*Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, 1870) qui dérivent du groupe linéaire, du groupe abélien et des deux groupes hypo-abéliens.

Le groupe de l'icosaèdre appartient au troisième type; ce même type conduit aussi de deux manières différentes à un groupe simple d'ordre 168.

D'après Galois, 60 est le plus petit ordre *composé* d'un groupe simple; l'auteur a examiné de proche en proche la possibilité de groupes simples d'ordre inférieur à 200 et n'a pas trouvé de nouveaux groupes. Les nombres 60 et 168 sont les seuls nombres composés inférieurs à 200 qui sont des ordres de groupes simples : le groupe d'ordre 168 est celui de l'équation modulaire pour la transformation du 7e ordre des fonctions elliptiques.

Tous les groupes d'ordre inférieur à 200 et différent de 60, 120, 168, 180 sont résolubles.

Les théorèmes de Sylow (*Math. Ann.*, t. V, p. 584) fournissent naturellement le moyen d'investigation le plus puissant pour le problème dont il s'agit. Quelques ordres particuliers 60, 90, 112, 120, 144, 168, 180 nécessitent une étude spéciale.

Muth (*P.*). — Sur les covariants des collinéations planes. (89-98).

Soit

$$f(x, u) = \sum_{(i,k=1,2,3)} a_{ik} x_i u_k = \sum_{(i=1,2,3)} u_i f(x)_i = \sum_{(k=1,2,3)} x_k f_k(u);$$

la relation

$$f(x, u) = 0$$

définit une collinéation plane qui fait correspondre au point x_1, x_2, x_3, le point $f(x)_1$, $f(x)_2$, $f(x)_3$. A chaque point ξ_1, ξ_2, ξ_3 la collinéation $f(x, u)$ permet d'associer la conique

$$c_\xi^2(f) = \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix};$$

l'ensemble de ces coniques forme un réseau qui est *associé* à $f(x, u)$. Ce ré-

seau est aussi *associé* à la collinéation

$$(2) \qquad f^2 = f^2(x, u) = \sum a_{ik} a_{lk} x_i u_k,$$

et à toutes les collinéations

$$(3) \qquad x u_x + \lambda f(x, u) + \mu f^2(x, u),$$

où l'on a posé

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3,$$

pourvu que λ et μ ne vérifient pas une certaine équation du troisième degré qui donne les *collinéations perspectives* du système (3).

L'auteur développe diverses applications géométriques de ces résultats.

Zeuthen (*H.-G.*). — Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode pour la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. (99-124).

L'auteur s'est proposé de donner une démonstration adaptée aux besoins de la Géométrie énumérative, c'est-à-dire qui permette d'avoir pour le dénombrement des coïncidences des règles précises, applicables même aux cas limites.

Le théorème de Cayley et Brill s'énonce de la manière suivante :

Soit sur une courbe algébrique f, de genre p, une correspondance telle qu'à chaque point X *correspondent* β *points* Y *mobiles, déterminés par l'intersection de f et d'une courbe φ qui coupe f en k points coïncidant avec* X *et en d'autres points fixes et telle, d'autre part, qu'à chaque point* Y *correspondent* α *points* X : *il existe sur la courbe f, γ points où un* X *coïncide avec un* Y, *en posant*

$$\gamma = \alpha - \beta - 2kp.$$

M. Zeuthen le démontre pour une courbe générale d'ordre n et convient de compter l'influence des singularités de manière à ce qu'il subsiste pour une courbe particulière quelconque. Une autre démonstration, basée sur l'étude de l'influence des points doubles, permet de le déduire du cas particulier où la courbe f est unicursale. L'extension au cas de k négatif (correspondances *à valeur* négative) est indiquée.

L'auteur termine par des applications aux polygones de Steiner et aux *groupes spéciaux* de Brill et Nœther sur une courbe de genre p.

Klein (*F.*). — Sur le cas d'Hermite de l'équation différentielle de Lamé. (125-129).

Soit

$$t = \int \frac{dp}{\sqrt{4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)}};$$

l'équation de Lamé s'écrit

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = (Ap + B)E,$$

A, B désignant des constantes. On sait que pour qu'une solution particulière ait la forme

$$E = (x - e_1)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} (x - e_2)^{\frac{\varepsilon_2}{2}} (x - e_3)^{\frac{\varepsilon_3}{2}} \varphi_k(p),$$

où ε_1, ε_2, ε_3 désignent au choix 0 ou 1 et $\varphi_k(p)$ un polynome de degré k, il faut

$$A = n(n+1) \qquad \text{avec} \qquad \frac{n}{2} = k + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2},$$

B satisfaisant en outre à une certaine équation algébrique d'ordre $k+1$.

Les divers polynomes φ_k sont réels et la distribution de leurs racines, toutes réelles, est remarquable.

Hermite a étudié en détail le cas : $A = n(n+1)$, B quelconque.

Il existe toujours alors deux solutions particulières E_1, E_2 pour lesquelles

$$E_1 E_2 = F(p),$$

F désignant un polynome d'ordre $2n$.

M. Klein s'est proposé de trouver les propriétés générales de l'équation d'Hermite qui comprennent, lorsque B est convenablement choisi, les propositions rappelées plus haut sur la réalité des φ_k et la distribution de leurs racines; en d'autres termes il détermine la forme de la courbe $F(p, B) = 0$ en regardant p et B comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Klein (*F.*). — Sur la notion de domaine fondamental dans la théorie des fonctions. (130-139).

Ce travail est destiné à éclairer certains points d'un Mémoire antérieur [*Nouvelles contributions à la théorie des fonctions d'après Riemann* (*Math. Ann.*, t. XXI)]; il contient, en outre, des indications sur une théorie géométrique (et générale) des équations différentielles linéaires du second ordre que l'auteur espère développer plus tard.

L'auteur se proposait, dans le travail rappelé plus haut, de définir une correspondance algébrique entre deux variables complexes par une surface *ouverte* dont les bords sont associés deux à deux, de manière à constituer une variété fermée : c'est le *domaine fondamental* [*Cf.* H. Poincaré, *Groupes fuchsiens* (*Acta Mathematica*)].

Si l'on suppose le domaine étendu sur la sphère de Neumann, il ne doit recouvrir un même point qu'un nombre limité de fois et les courbes frontières doivent être en nombre limité; enfin la correspondance entre les points de deux bords doit être définie par une fonction analytique.

M. Klein ajoute que l'on doit pouvoir entourer chaque point du domaine de façon à en séparer un morceau fini représentable sur un cercle à l'aide d'une fonction analytique. Cette condition nécessaire est suffisante.

Dans le cas particulier où le domaine est limité par des arcs de cercles qui

se déduisent l'un de l'autre par des substitutions projectives $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, il ne peut exister aucun sommet *hyperbolique*, c'est-à-dire tel que les deux côtés adjacents dérivent l'un de l'autre par une substitution hyperbolique. Cette proposition est fondamentale pour la théorie des fonctions *automorphes* (fonctions fuchsiennes de M. Poincaré).

L'auteur termine en indiquant les liens du travail actuel avec ses travaux antérieurs sur l'étude géométrique de l'équation différentielle hypergéométrique et de l'équation de Lamé (cas Hermite) (*Math. Ann.*, t. XXXVII).

Nœther (*M.*). — Sur la démonstration d'un théorème de la théorie des fonctions algébriques, donnée dans les *Math. Annalen*, t. VI, p. 351. (141-144).

Démonstration simple, sans emploi de développements en série de la proposition fondamentale suivante :

Une condition suffisante pour que l'on ait

$$f = A\varphi + B\psi,$$

où φ et ψ sont des polynomes en s, z sans facteur commun (non homogènes), *ainsi que* A *et* B, *est qu'il existe, pour chaque point d'intersection $z = a$, $s = b$ des courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$, deux polynomes* A′ *et* B′ *tels que l'expression*

$$f - A'\varphi - B'\psi,$$

développée suivant les puissances de $z - a$ et $s - b$, commence par des termes de dimension supérieure à k, en désignant par k un nombre donné à l'avance.

Ce nombre k est déterminé avec plus de précision dans le cours de la démonstration.

Anissimoff (*W.*). — Sur le cercle limite de Fuchs. (145-148).

Démonstration de l'inexactitude d'une règle proposée par Fuchs pour trouver le cercle limite dans le cas d'une fraction rationnelle

$$F(z) = \frac{f(z)}{z\,g(z)}, \qquad f(0)\,g(0) \neq 0.$$

Pasch (*M.*). — Sur l'introduction des nombres irrationnels. (150-152).

Kober (*G.*). — Addition à la Note : « Sur le groupe des huit surfaces du second degré harmoniquement associées » (*Math. Annalen*, t. XXXIII). (153-154).

Bochert (*A.*). — Sur le nombre des valeurs différentes d'une fonction de n lettres. (Continuation d'un travail paru dans le Tome XXXIII des *Annales*, p. 584.) (157-175).

Nous citerons dans ce travail, qu'il est impossible de résumer, la proposition suivante :

Soit u le plus petit nombre de lettres que peut altérer une substitution de n lettres qui ne change pas une fonction donnée (en dehors de la substitution identique); soit u' le nombre correspondant pour les substitutions *paires* de n lettres; désignons par k le plus grand entier tel que par les permutations de k lettres convenables la fonction donnée acquière $k!$ valeurs différentes, par k' le plus grand entier tel que la fonction acquière $\frac{k'!}{2}$ valeurs différentes par les permutations de k' lettres convenablement choisies, on aura

$$k \geqq \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u' - u) - \frac{5}{3} \qquad \text{si} \qquad u > \frac{1}{2}n;$$

$$k \geqq \frac{1}{2}n + m - 1 \qquad \text{si} \qquad u \leqq \frac{1}{2}n + 1, \qquad u' > 3,$$

m désignant le plus petit entier qui n'est pas à la fois inférieur à $\frac{u'}{3} - 1$ et à $\frac{u}{2}$;

$$k' \geqq \frac{2}{3}n - \frac{5}{3} \qquad \text{si} \qquad u > \frac{1}{2}n;$$

$$k' \geqq \frac{1}{2}n + m' - 1 \qquad \text{si} \qquad 3 < u' \leqq \frac{1}{2}n + 1,$$

m' désignant le plus petit entier non inférieur à $\frac{1}{3}u' - 1$; k' supérieur ou égal au plus petit des deux nombres

$$\frac{2}{3}n + \frac{2}{3}(u' - u) - \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u' - 1$$

lorsque

$$u + u' > n;$$

k' supérieur ou égal à

$$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m' - \frac{1}{2}$$

quand l'on a

$$u + \frac{1}{2}(m' - m) \leqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

et u' supérieur à 3 et à u.

Ces résultats et ceux obtenus par l'auteur dans le travail qui suit, le conduisent à la proposition suivante :

Si une fonction de n lettres est à plus de deux valeurs, le plus grand entier k, tel que par toutes les permutations de k lettres convenablement choisies la fonction considérée acquière $k!$ valeurs différentes, est supérieur à $\frac{7}{12}n - \frac{7}{3}$ si le groupe de la fonction est au moins doublement transitif; il est supérieur à

$\frac{11}{18}n - \frac{7}{3}$ si ce groupe est au moins triplement transitif; il est supérieur ou égal à $\frac{2}{3}n - \frac{7}{3}$ si ce groupe est au moins quadruplement transitif.

Bochert (*A.*). — Sur la classe des groupes de substitutions transitifs. (176-193).

La *classe* désigne le plus petit nombre de lettres altérées par une substitution du groupe différente de la substitution identique.

L'auteur a obtenu ici des limites inférieures pour cette classe qui dépendent à la fois du degré de transitivité et du nombre des lettres substituées (degré du groupe).

Si un groupe de substitutions de n lettres ne renferme pas le groupe alterné de n lettres, sa classe dépasse $\frac{n}{4} - 1$ s'il est plus que simplement transitif, $\frac{n}{3} - 1$ s'il est plus que doublement transitif, atteint ou dépasse $\frac{n}{2} - 1$ s'il est plus que triplement transitif.

Bäcklund (*A.-V.*). — Application de théorèmes sur les équations aux dérivées partielles à la théorie des systèmes orthogonaux, en particulier à celle des systèmes cycliques de Ribaucour. (194-260).

La plupart des théorèmes dont on fera l'application ici sont, d'après l'auteur, déjà connus. Une exposition de la théorie des systèmes orthogonaux cycliques de Ribaucour conduira aux équations aux dérivées partielles qui serviront d'exemples dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Toutes ces recherches ont d'ailleurs été déjà publiées par l'auteur sous une forme différente, mais en langue suédoise [1].

Les systèmes cycliques de Ribaucour. — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre (existence des solutions satisfaisant à certaines conditions initiales). — Application aux équations obtenues précédemment; aux équations linéaires de la forme de Laplace. — Une classe particulière d'équations du second ordre (équations intégrables par la méthode de Darboux; application à l'équation $s = ap + bq$). — Généralités sur l'équation du troisième ordre à trois variables indépendantes (existence des solutions); application à l'équation du troisième ordre des systèmes orthogonaux (Darboux). — Familles de surfaces à courbure constante négative qui appartiennent à un système orthogonal.

Wirtinger (*W.*). — Recherches sur les fonctions abéliennes de genre 3. (261-312).

---

[1] *Cf.* Ribaucour, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, LXX, LXXVI; Bianchi, *Journal de Battaglini*, t. XXI, XXII; Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II.

L'auteur se propose de donner une solution nouvelle du *problème de l'inversion* pour $p = 3$.

Les arguments sont donnés comme sommes de quatre intégrales et l'on peut obtenir le faisceau entier des quadruples corésiduels qui appartiennent à une valeur déterminée de l'argument transcendant. On a égard dans les calculs aux domaines de rationalité de diverses *espèces* considérés par M. Klein dans la théorie des fonctions abéliennes.

Par exemple, la solution s'obtient avec l'aide de fonctions de Jacobi dont le développement, suivant les puissances des sommes d'intégrales, a pour coefficients des *covariants entiers* de la courbe C_4 qui définit le domaine algébrique. Pour les fonctions Θ employées d'habitude, les coefficients sont des irrationalités du domaine précédent.

Markoff (*A.*). — Sur la série hypergéométrique. (313-316).

Application du théorème de M. Klein sur la distribution des zéros d'un produit de deux séries hypergéométriques, dans le cas où ce produit se réduit à un polynome. Calcul du produit des carrés des différences des racines de ce polynome.

Schönflies (*A.*). — Sur le mouvement des systèmes invariables dans le cas de surfaces axiales cylindriques. (317-331).

L'auteur étend aux mouvements dans lesquels les axes hélicoïdaux engendrent un cylindre certaines propriétés des mouvements plans. Un cas particulier extrêmement remarquable a été découvert par M. Darboux; c'est le mouvement dans lequel chaque point décrit une courbe plane. M. Schönflies en signale une nouvelle génération mécanique : Lorsque trois sommets d'un triangle décrivent trois plans pendant que le plan du triangle se déplace parallèlement à lui-même, chaque point lié invariablement au triangle décrit une ellipse.

Bianchi (*L.*). — Sur les groupes de substitutions linéaires dont les coefficients appartiennent à un corps quadratique imaginaire. (332-412).

D'après l'auteur, ce travail est une continuation de celui qui est paru au Tome XXXVIII de ces *Annales*. Il s'agit des substitutions

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

où z est une variable complexe, les coefficients α, β, γ, δ étant tous les nombres entiers d'un corps quadratique imaginaire Ω qui satisfont à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Si l'on pose

$$\omega = \frac{1 - i\sqrt{D}}{2}$$

pour $D \equiv 3 \pmod 4$ et $\omega = i\sqrt{D}$ dans tous les autres cas, ces entiers ont la forme $m + n\omega$, m et n étant des entiers ordinaires.

Dans la première Partie de ce travail, utilisant la représentation géométrique de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. III) et le principe de l'*extension du groupe par réflexion*, dont le développement est dû à M. Fricke, l'auteur fixe les polyèdres fondamentaux pour les valeurs

$$D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 19.$$

Il reste à démontrer que les groupes G correspondants sont engendrés par un nombre limité de substitutions; ce point est réservé pour une étude ultérieure.

Dans la deuxième Partie, l'auteur établit la théorie des formes quadratiques de Dirichlet et d'Hermite dans le corps Ω, ainsi qu'il l'avait fait déjà (*loc. cit.*) pour les corps $(1, i)$, $\left(1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Enfin la troisième Partie a pour but l'étude d'une classe particulière de formes quadratiques sur lesquelles on exécute les substitutions du groupe qui n'altèrent pas une forme indéfinie d'Hermite.

Cette théorie aura, pour les fonctions automorphes attachées au groupe considéré, la même importance que la théorie des formes quadratiques dans l'étude des fonctions modulaires qui interviennent dans la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Segre (*C.*). — La représentation réelle des formes complexes et des êtres hyperalgébriques. (413-467).

Ayant introduit les éléments complexes, les êtres définis par des liaisons analytiques, fonctionnelles, entre les coordonnées réelles de leurs éléments (courbes, surfaces, complexes de droites, etc.) peuvent être généralisés en considérant ceux qui sont définis par des liaisons analogues entre les composantes réelles de ces coordonnées. Si les liaisons sont algébriques, les nouveaux êtres seront dits *hyperalgébriques*.

L'étude de ces nouveaux êtres peut se faire directement (*Cf.* Saggio, *Actes de l'Académie de Turin*, t. XXV, XXVI) par les mêmes procédés que pour les êtres algébriques. On peut aussi adopter une représentation réelle pour ces nouveaux êtres et étudier cette représentation; c'est la voie suivie par l'auteur.

La Table suivante pourra renseigner sur l'importance de son travail :

Représentation réelle des formes simples; du plan complexe, etc. — Les groupes fondamentaux. — Projectivité et antiprojectivité. — Antiprojectivité involutive; chaîne. — Antipolarité; hyperconiques; hyperquadriques, etc. — Les êtres hyperalgébriques en général. — Introduction des points bicomplexes. — Nombres bicomplexes. — Indications d'extensions nouvelles et indéfinies.

Fricke (*R.*). — Nouvelles contributions à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. (469-502).

L'auteur se propose plus particulièrement l'étude du domaine algébrique défini par une équation modulaire, en reléguant au second plan la formation effective de l'équation. Il s'attache spécialement aux équations modulaires *de première espèce* qui se présentent dans l'étude de la transformation d'ordre n de la fonction modulaire *de première espèce* $J(\omega)$. Ses recherches portant

2me Partie.

surtout sur les valeurs *premières* de l'entier n peuvent être regardées comme un complément apporté aux recherches de M. Kiepert (*Math. Annalen*, t. XXXII, XXXVII) qui a envisagé de préférence le cas où n est *composé*. Enfin l'auteur fait un usage systématique des *formes homogènes*, introduites par M. Klein dans la théorie des fonctions. Il étudie ainsi en particulier les *formes modulaires* considérées par M. Hurvitz (*Math. Annalen*, t. XXVII).

La surface F_{n+1} pour $n = 11$ et $n = 19$ et les formes correspondantes de dimension -1 et -2. — Les fonctions $\tau'(\omega)$, à trois valeurs, des surfaces F_{12} et F_{20} et leur relation avec $\tau(\omega)$. — Expression de g_2, g_3, Δ par les formes A, B, E des surfaces F_{12} et F_{20}; expression rationnelle de J au moyen de τ et τ'. — Les surfaces F_{n+1} de genre 2, pour $n = 23$ et $n = 31$ et les fonctions à deux valeurs sur ces surfaces. — Formation des fonctions à six valeurs E, τ' pour $n = 23, 31$; leur relation avec τ. Les modules Y, Z. — Expression des formes modulaires de première espèce par les modules A, B, etc. des surfaces F_{24}, F_{32}. — La surface F_{48} correspondant à $n = 47$ et les formes modulaires B et E. — Les fondements de l'étude de la transformation d'ordre $n = 71$.

Gordan (*P.*). — Détermination d'une forme binaire par les premiers termes de ses covariants. (503-526).

Parmi les systèmes de formes fondamentales (*Grundformen*) associés à une forme binaire

$$f(x) = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots$$

et dont chaque covariant de f dépend rationnellement, il en est deux qui sont tels que tout covariant de f en soit une fonction rationnelle entière, à un facteur près qui est une puissance de f. Ce sont des formes du deuxième et du troisième degré par rapport aux coefficients a : 1° les *Ueberschiebungen* (¹) d'indice pair de f avec f et leur déterminant fonctionnel avec f

$$J_{2\nu} = (f, f)^{2\nu}, \qquad J_{2\nu+1} = [(f, f)^{2\nu}, f] = (J_{2\nu}, f);$$

2° Les *formes sœurs* G définies par les formules

$$f G_x = (af)^x a_x^{n-x} \qquad \text{avec} \qquad (ab) b_x^{n-1}.$$

Si l'on transforme $f(x)$ par la substitution

$$x_1 = a_0 y_1 - a_1 y_2, \qquad x_2 = a_0 y_2,$$

en une forme $F(y)$ manquant du second terme, les coefficients de $F(y)$ sont les premiers termes des G_x. Hermite a montré comment on pouvait exprimer tout covariant de $f(x)$ avec les G_x, mais il restait à trouver la loi de formation des covariants de $f(x)$ avec les J; c'est l'objet du présent travail. La détermination des G à l'aide des J est ramenée à celle de certains coefficients numériques C, leur forme par rapport aux J étant connue. M. Gordan montre

(¹) On pourrait employer pour ce terme le mot *chevauchement* qui le traduit exactement ou encore le mot *rejet* qui a un sens un peu différent mais qui est plus simple.

qu'on peut établir pour les C des formules de récurrence qui en permettent le calcul de proche en proche dès que les premiers sont déterminés directement.

Horn (*J.*). — Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à une variable indépendante. (527-550).

Un système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x) y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

dont toutes les solutions sont régulières au point singulier $x = 0$ est dit *régulier en ce point*. Si l'on désigne alors un système

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + a''_{\alpha\beta}x^2 + \ldots) y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

sous le nom de *système canonique*, chaque système régulier se laisse transformer en un système canonique par une suite de substitutions de la forme

$$y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

et de la forme

$$y_\alpha = x z_\alpha \qquad (\alpha = \text{un des nombres } 1, \ldots, m).$$

Ce théorème a été énoncé déjà par MM. Sauvage et Kœnigsberger; leurs démonstrations sont, d'après l'auteur, incomplètes. Il en donne une nouvelle basée sur l'emploi des diviseurs élémentaires de Weierstrass et distincte de celle qu'il a appliquée à des cas particuliers dans un travail antérieur.

Study (*E.*). — Représentation de la multiplicité formée par les coniques d'un plan sur un espace ponctuel. (553-562).

Dans son travail *Sur la géométrie des coniques* (*Math. Ann.*, t. XXVII), l'auteur a étudié la multiplicité algébrique formée par les coniques d'un plan au point de vue de la théorie des invariants : chaque conique est considérée à la fois comme lieu de points et comme enveloppe de droites. Il indique ici une représentation de la multiplicité considérée sur un espace ponctuel supérieur : à chaque conique correspond un point d'une multiplicité M_5 d'un espace à 27 dimensions. Cette multiplicité M_5 a l'ordre 102; elle est l'intersection commune de 197 multiplicités du second ordre linéairement indépendantes.

M. Study montre, sur un problème de la théorie des caractéristiques, les avantages de cette représentation.

Study (*E.*). — Réponse. (559-562).

Réponse à M. Zeuthen relative aux différentes manières d'envisager la théorie des caractéristiques de Chasles.

Study (*E.*). — Sur les systèmes de coniques. (560-578).

L'auteur applique ici les indications données dans son travail *Méthodes pour la théorie des formes ternaires* (Leipzig, 1889) à un problème particulier de la géométrie des coniques.

L'équation d'un système de coniques à quatre paramètres est mise sous une forme telle que les multiplicités linéaires invariantes du système apparaissent immédiatement. Les résultats obtenus sont appliqués à la théorie des surfaces F_2^4 de l'espace à 5 dimensions dont la projection dans l'espace ordinaire est une surface de Steiner.

Tome XLI; 1893.

Ritter (*E.*). — Les formes uniformes automorphes de genre nul; revision et extension des théorèmes de Poincaré. (1-82).

L'auteur, s'inspirant des idées émises par M. Klein [*Nouvelles contributions à la théorie des fonctions d'après Riemann* (*Math. Annalen*, t. XXI)], s'est proposé de reprendre la théorie des fonctions fuchsiennes (fonctions automorphes) *dans le cas de* $p = 0$, de façon systématique. L'existence des fonctions automorphes est établie par la méthode de Schwarz-Neumann, indépendamment de tout développement en série. La variable complexe z est partout remplacée par deux variables z_1, z_2 figurant de façon homogène, ce qui supprime le rôle particulier du point à l'infini; les fonctions automorphes sont obtenues comme quotients de formes homogènes en z_1, z_2.

Indiquons rapidement les points principaux de ce travail :

I. Notions fondamentales de théorie des fonctions et de théorie des groupes.

Domaine fondamental et groupe d'une fonction automorphe de genre zéro.

Conditions nécessaires que doit remplir le domaine, classification des divers domaines d'après la nature et le nombre des éléments *limites*.

Les fonctions uniformes du domaine; démonstration de leur existence.

Disjonction de z et ζ en variables homogènes :

$$Z_1 = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\zeta}{dz}}}, \qquad \zeta = \frac{Z_1}{Z_2};$$

étude de l'équation différentielle linéaire du second ordre dont Z_1 et Z_2 sont deux solutions.

Disjonction d'une substitution projective de ζ en substitutions linéaires et homogènes.

Exemples de groupes avec cercle fondamental.

II. Théorèmes généraux sur les formes uniformes et automorphes *impropres*.

Systèmes de multiplicateurs pour les formes uniformes automorphes.

Expression des formes automorphes à l'aide de z_1, z_2 : les *formes fondamentales* (s'annulent en un sommet seulement du domaine et simplement).

Propriétés des zéros et des infinis.

Les intégrales attachées à un domaine fondamental.

III. Expression des formes automorphes par ζ_1, ζ_2.

Convergence des séries de Poincaré.

Pour les groupes avec *cercle fondamental,* la série de Poincaré

$$F_R(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{\chi} \rho_\chi^{-1} \varphi_R(\zeta_1^\chi, \zeta_2^\chi),$$

qui est de degré R, converge pour $R < -2$ si le cercle fondamental est *limite,* pour $R \leqq -2$ s'il n'existe sur ce cercle que des points limites isolés.

Séries automorphes pour $R = -2$.

Séries et produits infinis pour les intégrales automorphes.

Construction de formes automorphes, pour $R < -2$, avec un seul pôle simple dans le domaine fondamental : *formes élementaires.* Comparaison de ces formes avec les éléments simples de Poincaré.

Molien (*Th.*). — Sur les systèmes de nombres complexes à plusieurs unités. (83-156).

Il s'agit ici des systèmes de nombres complexes à *addition* associative et distributive et à *multiplication* associative et distributive à droite et à gauche.

M. Lie a appelé l'attention sur les systèmes de nombres complexes pour lesquels le groupe *correspondant* G_n admet un sous-groupe simple G_{n-1} (Le groupe correspondant à un système de nombres est un groupe linéaire tel que les équations de son groupe des paramètres définissent la multiplication dans le système de nombres considéré). L'auteur établit que ces systèmes, qu'il nomme *primordiaux,* possèdent m^2 unités principales et que le groupe de paramètres qui leur correspond est identique au groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général à n variables. En d'autres termes, chaque système *primordial* est représenté par une matrice carrée dont tous les éléments sont indépendants.

Chaque système de nombres complexes peut être caractérisé par une *forme normale* qui permet de les partager en *classes* de telle sorte que tous les systèmes d'une classe, qui sont en nombre infini, sont déterminés par l'un d'entre eux. Ce dernier peut être pris parmi les systèmes *sans conique associée* (*Nichtkegelschnittsystem*) de M. Scheffers. Dans cette classification les nombres réels ordinaires représentent la classe des systèmes primordiaux.

Voici maintenant une énumération rapide des diverses questions traitées dans cet important travail :

I. *Les systèmes de nombres complexes et les formes bilinéaires.*

Définition et conséquences immédiates. Les systèmes associés. La forme polaire d'un système. Recherche de tous les systèmes primordiaux associés à un système donné. (Addition.)

II. *Les systèmes de nombres et les équations algébriques.*

Les équations caractéristiques d'un système de nombres. Diviseurs des équations caractéristiques. Le *rang* d'un système de nombres et l'équation corres-

pondante. L'équation de Killing. Les équations caractéristiques pour les systèmes associés. Équation de Killing et forme normale d'un système de nombres.

III. *Les systèmes de nombres et les groupes attachés à ces systèmes.*

Relations avec la théorie des groupes de transformations. Groupes associés. Transitivité et intransitivité. Groupes primordiaux. Étude d'un groupe particulier. La forme normale des groupes attachés à un système de nombres.

IV. *Les systèmes de nombres et les matrices.*

Propriétés des matrices. Expression des groupes, attachés à un système, par des matrices. Forme normale d'un système de nombres. Une classification des systèmes de nombres complexes.

Pochhammer (*L.*). — Remarques sur l'intégrale $\overline{\Gamma}(a)$. (157-166).

Transformations diverses du contour d'intégration fermé (C) que l'on peut employer pour définir $\overline{\Gamma}(a)$, dans le cas de a complexe, au moyen d'une intégrale prise le long de (C). (*Cf.* Pochhammer, *Math. Ann.*, t. XXXV).

Pochhammer (*L.*). — Sur une classe d'intégrales définies. (167-173).

Propriétés des intégrales $\int e^{\frac{x}{u}} u^{p-1} \varphi(u)\, du$, $\int e^{\frac{x}{u}} (u-x)^{k-1} u^{p-1} \varphi(u)\, du$ prises le long de certains contours fermés, formés de droites et de cercles, lorsque $\varphi(u)$ est uniforme.

Pochhammer (*L.*). — Sur une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients linéaires. (174-178).

L'équation

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

où ρ est une constante quelconque, différente d'un nombre entier, admet la solution uniforme

$$y = \int_{(C)} e^{\frac{x}{u}+u} u^{-\rho}\, du,$$

où C est un contour fermé allant de $-\infty$ à o et de o à $-\infty$ en suivant l'axe réel et entourant l'origine.

Pochhammer (*L.*). — Sur cinq intégrales doubles. (179-196).

Ces intégrales sont en relation avec les intégrales eulériennes.
La première se réduit à $\Gamma(a)\Gamma(b)$, la seconde à $\overline{\Gamma}(a)\overline{\Gamma}(b)$.

Pochhammer (*L.*). — Sur les équations différentielles des séries $\mathcal{F}(\rho, \sigma; x)$ et $\mathcal{F}(\rho, \sigma, \tau; x)$. (197-218).

Ces suites sont des cas particuliers ($n = 3$, $n = 4$) d'une série, étudiée par l'auteur, qui vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre n.

La série

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma; x) = 1 + \frac{x}{1.\rho.\sigma} + \frac{x^2}{1.2.\rho(\rho+1).\sigma(\sigma+1)} + \ldots$$

est une intégrale particulière de l'équation

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\rho - \sigma + 1)x \frac{d^2y}{dx^2} + \rho\sigma \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

qui possède en outre les solutions non uniformes

$$x^{1-\rho} \mathcal{F}(2 - \rho, \sigma - \rho + 1; x),$$
$$x^{1-\sigma} \mathcal{F}(2 - \sigma, \rho - \sigma + 1; x).$$

De même, l'équation différentielle du quatrième ordre

$$x^3 \frac{d^4y}{dx^4} + (\rho + \sigma + \tau + 3)x^2 \frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+ (\rho\sigma + \rho\tau + \sigma\tau + \rho + \sigma + \tau + 1)x \frac{d^2y}{dx^2} + \rho\sigma\tau \frac{dy}{dx} - y = 0$$

admet comme solutions, la série, uniforme en x,

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{x}{1.\rho\sigma\tau} + \frac{x^2}{1.2.\rho(\rho+1).\sigma(\sigma+1).\tau(\tau+1)} + \ldots$$

et les fonctions non uniformes telles que

$$x^{1-\rho} \mathcal{F}(2 - \rho, \sigma - \rho + 1, \tau - \rho + 1; x).$$

On suppose qu'aucune des constantes

$$\rho, \quad \sigma, \quad \tau, \quad \rho - \sigma, \quad \rho - \tau, \quad \sigma - \tau$$

n'est un entier (positif, nul ou négatif).

On parvient à l'expression des solutions de ces équations différentielles sous forme d'intégrales définies en posant respectivement

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{v}} v^{-\sigma} V \, dv, \qquad y = \int_{g'}^{h'} e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W \, dw,$$

V satisfera à une équation différentielle du second ordre, W à une équation du troisième ordre. Les solutions sont respectivement des intégrales doubles et des intégrales triples.

Staude (*O.*). — Contribution à la discussion des équations du mouvement d'un point. (219-259).

De même qu'on étudie en un point d'une courbe gauche la direction et la courbure de la courbe en la comparant avec une courbe de direction constante (droite) et une courbe de courbure constante (cercle), l'auteur se propose

d'étudier les propriétés infinitésimales du mouvement d'un point en le comparant au mouvement *tangent* (de vitesse constante) et au mouvement *osculant* (d'accélération constante). Ceci permet d'abord de classer les différents moments d'un mouvement. L'auteur ajoute que sa méthode permet, si on l'applique à la théorie des courbes gauches, de séparer les singularités qui appartiennent à la courbe gauche elle-même de celles qui sont introduites par la représentation paramétrique.

Des applications sont faites à l'étude du mouvement d'un point (dans le cas d'une fonction de forces) d'abord libre puis assujetti à décrire une surface. Signalons l'étude détaillée du mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde elliptique.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles simultanées. (260-285).

Exposition particulière de la méthode de Natani, étendue par Hamburger aux systèmes d'équations du premier ordre à plusieurs inconnues, dans le cas de deux équations linéaires

$$p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0,$$
$$p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions de x, y, z_1, z_2. L'auteur forme le système d'équations aux différentielles totales dont l'intégration équivaut à celle du système précédent et étudie en détail les relations entre ces deux systèmes. Quelques exemples terminent ce travail.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les singularités des différents *ordres d'exception* et leur réduction. (286-307).

Ce travail doit contenir une théorie de la réduction des singularités d'ordre supérieur des domaines algébriques différente en principe de la théorie de Cayley.

Soit X un domaine algébrique défini par s coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Chaque système de m équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_m = 0 \qquad (m < s)$$

définit une multiplicité à $(s - m)$ dimensions du domaine X; si les φ dépendent de r paramètres $p_1, \ldots, p_r$, chaque détermination des p donnera l'une de ces multiplicités. Ces multiplicités peuvent présenter des singularités : si la présence de l'une d'elles exige q relations entre les p, on dira qu'elle appartient au $q^{\text{ième}}$ *ordre d'exception* et on la désignera par B_q.

L'étude des B_1 est de beaucoup la plus importante; cela résulte en partie de ce qu'on peut passer d'une multiplicité à une autre sans que les multiplicités intermédiaires présentent d'autres singularités que des B_1. Si une singularité B_q doit être obtenue, on s'arrangera pour que les diverses relations entre les paramètres ne soient vérifiées que l'une après l'autre; on aura ainsi décomposé B_q en singularités B_1.

Il y a aussi des singularités que présentent de façon permanente les multi-

plicités considérées : si l'adjonction d'une nouvelle condition les transforme en singularités B_1, on les désignera par B_0; si cette transformation exige $q+1$ relations, on les désignera par B_{-q}.

Par exemple, si le domaine X est un point x, y, z de l'espace ordinaire, et si l'on considère les surfaces d'ordre n comme des multiplicités dépendant de $\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)$ paramètres : les ombilics, les plans triplement tangents, les tangentes quadruples sont des singularités B_0; les plans quadruplement tangents, les nœuds et les points d'osculation sont des singularités B_1. Par contre, les plans doublement tangents, les tangentes triples sont des B_{-1} parce qu'on peut encore les assujettir à une condition sans qu'elles cessent de se présenter sur une surface générale d'ordre n. Le plan tangent simple est une B_{-2}, la tangente en un point une B_{-3}.

Sur la déformation linéaire effective et non effective. — Sur les B_2 qui peuvent être regardés comme des B_0 multiples. — Sur la décomposition des B_q. — Décomposition des rebroussements et des nœuds biplanaires. — Déformation du point multiple d'ordre m. — Déformation du point triple. — Sur le nombre maximum des courbes qui viennent se toucher en un point triple d'une courbe.

Franklin (*F.*). — Remarque sur un point de la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann. (308).

Burkhardt (*H.*). — Sur un théorème fondamental de la théorie des groupes finis de substitutions linéaires. (309-312).

M. Klein a donné (*Math. Annalen*, t. XV) une méthode permettant de former des fonctions homogènes et entières

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_\mu$$

des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui subissent les substitutions linéaires d'un groupe Γ (formé d'un nombre limité de substitutions) quand les x subissent les substitutions d'un groupe isomorphe G.

Il emploie pour cela une fonction entière homogène $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les différentes valeurs par les substitutions de G ne sont pas liées par certaines relations homogènes à coefficients constants. L'auteur établit que pour chaque groupe G on peut toujours former une fonction φ satisfaisant à ces conditions.

Burkhardt (*H.*). — Recherches sur les fonctions modulaires hyperelliptiques (3e Partie). (313-343).

La dernière partie de ces recherches (Cf. *Math. Annalen*, t. XXXVI, XXXVIII) a pour objet le développement des relations entre le problème de la trisection des fonctions hyperelliptiques et celui des vingt-sept droites de la surface générale du troisième ordre. M. Jordan a montré que les groupes correspondants sont isomorphes; M. Klein a esquissé la réduction effective des problèmes l'un à l'autre; il restait à la réaliser. C'est ce que l'auteur se propose de faire, en développant une méthode géométrique employée par M. Witting,

Diss. Göttingen, 1887; *Math. Annalen,* t. XXIX) par l'introduction des coordonnées de la droite. Le problème des vingt-sept droites est ramené à la trisection des fonctions hyperelliptiques.

Kneser (*A.*). — Remarques sur le *cas irréductible* de l'équation du troisième degré. (344-348).

Une équation du troisième degré, irréductible dans un domaine de rationalité *réel* et qui possède trois racines réelles ne peut être résolue par l'emploi de radicaux *réels*. Toute équation irréductible dans un domaine réel de rationalité et résoluble par l'adjonction de radicaux réels a pour degré une puissance de 2.

M. Kneser établit à nouveau ces propositions qui ont déjà fait l'objet des recherches de MM. Hölder (*Math. Ann.*, t. XXXVIII) et Mollame (*Comptes rendus de l'Académie de Naples,* juin 1890).

Kneser (*A.*). — Quelques théorèmes généraux sur les formes les plus simples des courbes planes. (349-376).

Quelles formes peut présenter une branche de courbe affectée d'une singularité donnée? Quel est le nombre des points d'intersection d'une droite avec une courbe de caractère déterminé; le nombre des tangentes menées d'un point à une telle courbe? L'auteur se propose de préciser ces questions et d'y répondre dans le cas des singularités les plus simples. Ce travail est à rapprocher de certaines remarques de Möbius (*Sur les formes principales des courbes du troisième ordre*) et de la Note *Sur la forme des courbes sphériques* (*Œuvres,* t. II). La méthode de recherche adoptée a déjà été employée par l'auteur (*Math. Ann.,* t. XXXIV).

Propriétés de l'arc de courbe sans singularités. — Courbes avec tangentes doubles et points doubles. — Courbes avec point d'inflexion.

Maurer (*L.*). — Sur les fonctions d'une variable réelle qui possèdent des dérivées de chaque ordre. (377-402).

L'auteur suppose toutes les dérivées finies en tous les points d'un certain intervalle (a, b), aucune d'entre elles ne pouvant s'annuler qu'en un nombre limité de points de l'intervalle. Ce nombre peut naturellement dépasser toute quantité donnée quand l'ordre de la dérivée augmente indéfiniment.

Voici les conditions qu'il obtient pour l'existence de toutes les dérivées :

1° La fonction est continue dans l'intervalle (a, b);

2° Si l'on divise (a, b) en n parties égales et si l'on forme les différences premières, secondes, etc. de la fonction pour ces nouveaux intervalles, pour n suffisamment grand :

a. Deux différences consécutives ne peuvent s'annuler;

b. Si une différence s'annule, celles qui sont relatives aux deux intervalles qui comprennent celui auquel elle se rapporte, sont de signes contraires;

3° Un intervalle auquel correspond un changement de signe des différences

d'ordre p n'a aucun point commun avec un intervalle auquel correspond un changement de signe des différences d'ordre $(p+1)$.

4° Le nombre des changements de signe que peuvent présenter les différences d'ordre p ne peut dépasser une certaine limite, quelque grand que soit n.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Hurwitz (*A.*). — Sur les domaines algébriques qui admettent des transformations uniformes. (403-442).

I. Toute surface de Riemann (irréductible) dont le genre p est supérieur à 1, ne peut admettre qu'un nombre fini de transformations uniformes. M. Hurwitz en donne une démonstration nouvelle, dont un point essentiel est constitué par la recherche des points d'une surface de genre p, qui peuvent être des pôles d'ordre inférieur à $(p+1)$ d'une fonction algébrique uniforme sur la surface, *n'ayant qu'un seul pôle*.

Le nombre de ces points est toujours $p(p^2-1)$ lorsque chacun d'eux est compté avec un certain degré de multiplicité.

M. Hurwitz montre que le nombre des points réellement distincts dépasse toujours $2p+2$, sauf pour une surface hyperelliptique, auquel cas il est $2p+2$.

Si l'on exclut ce dernier cas, ces points sont identiques avec ceux de la courbe des adjointes φ, dans l'espace à $(p-1)$ dimensions, où la courbe admet p points en commun avec un plan tangent. L'auteur étudie également les points de cette courbe où une surface d'ordre k $(k>1)$ la coupe en $(2k-1)(p-1)$ points confondus.

II. La surface de Riemann la plus générale qui admet un groupe fini de transformations uniformes peut s'obtenir en plaçant sur une surface quelconque Φ, $(r-1)$ surfaces identiques et les réunissant d'une certaine manière. Les surfaces ainsi obtenues sont naturellement les surfaces *régulières*, étudiées par MM. Klein et W. Dyck, qui sont définies par une résolvante de Galois.

Si une surface de Riemann F, de genre p, recouvre r fois une surface Φ de genre ϖ, on a l'équation

$$2p-2 = W - r(2\varpi-2),$$

W désignant le nombre des points de ramification de F sur Φ. M. Hurwitz déduit de cette relation celle obtenue par M. Zeuthen entre les genres de deux surfaces de Riemann qui se correspondent algébriquement. Cette équation le conduit également à compléter la proposition qui fait l'objet de la première Partie :

Une surface de Riemann de genre p ne peut admettre plus de $84(p-1)$ transformations uniformes.

III. Si la surface de Riemann F de genre p, supérieur à 1, admet un groupe de transformations uniformes, on peut faire correspondre à ce groupe un groupe de transformations linéaires et homogènes des différentielles de première espèce. Les deux groupes sont isomorphes.

L'auteur s'occupe de la détermination des racines de l'équation caracté-

ristique relative à l'une de ces transformations linéaires; il y parvient par l'étude de fonctions à multiplicateurs.

Tous ces résultats admettent des applications multiples à la théorie des fonctions modulaires elliptiques.

Fricke (*R.*). — Sur le caractère arithmétique des fonctions du triangle (fonctions de Schwarz) à ramifications (2, 3, 7) et (2, 4, 7). (442-468).

Il s'agit ici de la nature arithmétique des coefficients d'une substitution

$$\tau_1' = \frac{\alpha\tau_1 + \beta}{\gamma\tau_1 + \delta}$$

qui fait partie d'un groupe infini discontinu. M. Poincaré a découvert un moyen de définir arithmétiquement de tels groupes, par les transformations de certaines formes quadratiques quaternaires en elles-mêmes. Ces groupes ont été étudiés et étendus par MM. Stouff (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1891), Bianchi (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1890-1891) et Fricke (*Math. Ann.*, t. XXXVIII, XXXIX).

Pour parvenir à des résultats plus généraux, l'auteur étudia récemment les fonctions de Schwarz $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{n}; x\right)$ qui jouent un rôle si important dans la théorie des fonctions modulaires elliptiques : les coefficients des substitutions sont formés dans ces cas avec les entiers d'un corps algébrique fini. Le présent travail s'occupe du cas où ce corps est le corps cubique défini par la résolvante pour les périodes à deux termes des racines septièmes de l'unité.

Story (*W.-E.*). — Sur les covariants d'un système de formes. (469-490).

La démonstration donnée par M. Hilbert (*Math. Ann.*, t. XXXVI) pour l'existence d'un nombre *limité* d'invariants et de covariants d'un système de formes, au moyen desquels les autres s'expriment rationnellement, procède par trois étapes successives :

1° Expression linéaire de chaque invariant au moyen d'un nombre fini d'invariants déterminés;

2° Remplacement des coefficients par leur expression analogue à l'aide d'invariants;

3° Application répétée des deux opérations 1 et 2 aux coefficients jusqu'à ce que les invariants subsistent seuls.

Pour les formes binaires, la seconde partie du théorème de M. Hilbert dépend du théorème suivant :

Chaque fonction homogène et isobare des coefficients de la forme

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots,$$

de degré r et de poids $p = \frac{nr}{2}$, *donne par application de l'opération*

$$1 - \frac{\Delta D}{1!\,2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!\,3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!\,4!} + \ldots$$

où l'on a

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots \qquad \Delta = na_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots$$

un invariant de cette forme.

La démonstration de M. Hilbert est différente lorsque le nombre des variables dépasse 2.

M. Story étend le théorème précédent aux formes à un nombre quelconque de variables et constitue ainsi une nouvelle démonstration complète.

Baur (*L.*). — Les idéaux de Dedekind-Weber dans un corps hyperelliptique. (411-508).

Réponse à des objections formulées par M. Hensel (*Journal de Crelle*, t. 109) au sujet du travail de M. Dedekind : *Théorie des fonctions algébriques d'une variable* (*Journal de Crelle*, t. 92). M. Baur traite en détail le cas d'un corps hyperelliptique

$$\theta^2 = (z - a_0)\ldots(z - a_{2g}).$$

Schur (*F.*). — Sur le caractère analytique des fonctions qui définissent les transformations d'un groupe fini et continu. (509-538).

M. Lie a annoncé que tout groupe transitif, défini par des équations qui peuvent être soumises à un certain nombre de différentiations, est *semblable* à un groupe défini par des équations analytiques. L'auteur se propose d'établir ce théorème avec toute la précision désirable. Il est amené dans ce but à réduire tout groupe transitif à une forme canonique, dans laquelle interviennent de façon bien déterminée les constantes de structure $c_{ik\varepsilon}$.

Zeuthen (*H.-G.*). — Exemples de la détermination des coniques d'un système donné qui satisfont à une condition donnée. (539-544).

Exemples de cas où la règle de Chasles, $\alpha\mu + \beta\nu$, souffre une exception.

Doehlemann (*K.*). — Sur les systèmes linéaires dans le plan et dans l'espace et sur leur jacobienne. (545-570).

Étude des singularités que présente *en général* un système linéaire de courbes ou de surfaces, avec application particulière aux faisceaux, aux réseaux et à leurs jacobiennes.

Stäckel (*P.*). — Sur la réduction d'un problème de Dynamique à des intégrales hyperelliptiques. (570-580).

Il s'agit des cas où le mouvement d'un point sur une surface de révolution, avec une fonction de forces, se ramène à des intégrales hyperelliptiques *quelles que soient les conditions initiales*.

L'auteur étudie en particulier les surfaces de révolution dont les géodésiques s'expriment par des intégrales hyperelliptiques ou elliptiques. Les cas de réduction à ces intégrales du mouvement d'un point *pesant* sont également déterminés.

Hermite (*Ch.*). — Sur une extension de la formule de Stirling. (581-590).

L'auteur se propose de montrer que l'intégrale de Raabe

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(x)\, dx = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi}$$

donne une méthode facile pour obtenir l'expression de la quantité

$$\log[\Gamma(a+\xi)\,\Gamma(a+1-\xi)]$$

en supposant ξ compris entre 0 et 1, lorsque a est un grand nombre. Il retrouve ainsi, par une nouvelle voie, dans les cas $\xi = 0$, $\xi = \frac{1}{2}$, les séries

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \sum \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n(2n-1)a^{2n-1}},$$

$$\log \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = a \log a - a - \log \sqrt{2\pi} + \sum \frac{(-1)^n (2^{2n-1} - 1) B_n}{2n(2n-1)(2a)^{2n-1}},$$

découvertes par Stirling et par Gauss, où B_1, B_2, ... désignent les nombres de Bernoulli $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, ... avec leurs termes complémentaires.

Hermite signale en particulier l'usage qu'on peut faire pour le même objet d'une formule de Stieltjes (*Journal de Mathématiques*, t. V).

Busche (*E.*). — Sur le rapport anharmonique de quatre points d'une droite. (591-596).

Hamburger (*M.*). — Sur la théorie des intégrales complètes des équations différentielles du premier ordre à deux variables. (Extrait d'une Lettre à M. A. Mayer). (597-600).

Soit $F(x, y, y') = (y' - \psi_1)(y' - \psi_2)\ldots(y' - \psi_n) = 0$ une équation différentielle de degré n en y'; soit alors

$$u_x = \text{const.}$$

l'intégrale de $y' - \varphi_c = 0$: on peut écrire l'intégrale générale de l'équation $F = 0$ sous la forme

$$(u_1 - c)(u_2 - c)\ldots(u_n - c) = (u_1 - c) f_1(x, y, c) = 0.$$

Des équations

$$f_1(x, y, \gamma) = 0, \qquad u_1 - c = 0,$$

on déduit par élimination de y

$$\varphi(c, \gamma, x) = 0,$$

et la fonction c ainsi définie, portée dans l'équation $u_1 - c = 0$, donne encore une intégrale complète de l'équation $F = 0$,

Scheffers (*G.*). — Sur la réductibilité des systèmes de nombres complexes. (600-604).

Rectification à un travail antérieur (*Math. Ann.*, t. XXXIX); démonstration du théorème rectifié.

Tome XLII; 1893.

Klein (*F.*). — Sur des relations de réalité pour la courbe normale des φ, dans le cas d'un genre quelconque. (1-29).

M. Klein se propose l'étude des propriétés réelles des courbes algébriques en partant d'une surface de Riemann avec ses feuillets et ramifications comme élément *donné*, ce qui permet de mettre en évidence les *modules* : parmi toutes les courbes associées à une telle surface il considère spécialement la courbe des adjointes φ et rattache ainsi le Mémoire actuel à des travaux antérieurs sur les courbes planes du 4e ordre (*Math. Ann.*, t. X, XII). Toutes les méthodes données alors pour $p = 3$ sont étendues à p quelconque et l'extension n'avait pu être faite en partant de l'équation algébrique qui définit la courbe.

Différentes sortes de surfaces de Riemann symétriques, en particulier dans le cas hyperelliptique. — Une surface de Riemann est *symétrique* quand elle admet une transformation conforme de période 2 en elle-même, qui renverse le sens des angles : elle correspond à une courbe algébrique réelle. On la dit *orthosymétrique* quand elle se partage en deux parties séparées lorsqu'on la coupe le long des lignes de symétrie, *diasymétrique* dans le cas contraire. Les surfaces de chaque espèce qui ont le même nombre de lignes de symétrie forment un continu d'un seul tenant : on passe de l'une à l'autre par déformation continue sans changer le nombre des lignes de symétrie et la nature de la surface. Il suffit donc d'étudier les surfaces hyperelliptiques

$$s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}.$$

Courbe normale des φ. — Elle est définie par les formules

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \ldots : dw_p,$$

où les w sont des intégrales distinctes de première espèce. On peut s'arranger pour que les rapports des dw prennent des valeurs conjuguées en des points symétriques de la surface; aux λ lignes de symétrie correspond alors une courbe *réelle* des φ à λ branches séparées. Propriétés de cette courbe.

La *méthode des points doubles* permet de passer par déformation continue d'une courbe quelconque à une courbe qui n'a que des points doubles isolés.

M. Klein étudie ensuite en détail, au point de vue de la réalité, les domaines définis par une équation d'ordre μ entre les φ : $f_\mu = 0$. Si le domaine touche la courbe des φ partout où il la rencontre, on le désigne par $F_\mu = 0$. Le cas hyperelliptique est soumis à un examen spécial.

La suite du travail est consacrée au problème suivant :

Déterminer sur une surface symétrique, avec λ lignes de symétrie ($\lambda > 0$), un système de sections canoniques tel que l'on puisse préciser pour les intégrales normales j_α la réalité des périodes $\tau_{\alpha\beta}$, de façon à pouvoir aborder *au point de vue de la réalité* l'étude des problèmes d'inversion.

M. Klein étudie, par exemple, l'expression des F_μ au moyen des séries thêta et détermine le nombre des faisceaux réels de F_μ et de F_1.

Bianchi (*L.*). — Sur les groupes de substitutions linéaires. (30-57).

Ces recherches servent de complément à celles publiées dans le Tome XL de ces *Annales*. On y a observé que les groupes des corps quadratiques

$$\Gamma^{(i\sqrt{5})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{6})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{10})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{13})},\quad \Gamma^{\left(\frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)}$$

sont contenus comme sous-groupes exceptionnels dans des groupes plus étendus : l'auteur forme ici ces groupes plus étendus. Les coefficients des substitutions sont toujours des entiers algébriques, mais ils appartiennent à des corps algébriques de degré supérieur à 2. Il détermine également les polyèdres fondamentaux des groupes

$$\Gamma^{(i\sqrt{14})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{17})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{21})},\quad \Gamma^{(i\sqrt{26})},\quad \Gamma^{\left(\frac{1-i\sqrt{39}}{2}\right)}.$$

La seconde Partie du travail rattache la théorie des substitutions linéaires formant un groupe discontinu, à coefficients complexes, à celle des formes quadratiques quaternaires réelles. C'est une extension des résultats de M. Poincaré [*Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Math.*, série IV, t. III, 1887)].

A chaque groupe discontinu quaternaire qui conserve la forme

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2,$$

correspond un groupe discontinu de substitutions (A) $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ à coefficients complexes. Au groupe *arithmétique* reproduisant une forme arithmé-

tique (à coefficients entiers) correspond un *groupe polyédrique,* les coefficients de la substitution étant des nombres algébriques. Aux groupes $\Gamma^{(i\sqrt{D})}$ étudiés plus haut correspond un sous-groupe du groupe arithmétique reproduisant la forme

$$x_2^2 + D x_3^2 - x_1 x_4.$$

M. Klein a observé qu'un groupe polyédrique (A) *improprement* discontinu pouvait devenir *proprement* discontinu lorsqu'on envisage simultanément deux variables z, t

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}.$$

Cette remarque permet de passer de fonctions fuchsiennes des deux variables z, t aux fonctions hyperabéliennes de M. Picard, dont l'étude a été rattachée par ce dernier à celle de la forme quaternaire, citée plus haut.

Hoyer (*P.*). — Sur les « liaisons dans une suite » avec une application à la théorie des substitutions. (58-88).

L'étude des changements que subissent les liaisons entre les divers feuillets d'une surface de Riemann aux lignes de passage quand on change ces dernières, a conduit à envisager, au point de vue de la forme, des substitutions identiques mises sous forme de produits de substitutions circulaires. L'auteur étudie ici des questions analogues sous un point de vue général et abstrait.

Dantscher (*V.*). — Sur la théorie des maxima et minima d'une fonction de deux variables. (89-131).

En opposition avec un jugement hâtif de L. Scheeffer (*Math. Ann.*, t. XXXV), l'auteur montre qu'on peut parfaitement conclure les propositions relatives au maximum et au minimum d'une fonction de deux variables en un point, de l'étude de la même fonction sur toutes les droites issues du point, *à condition de préciser sur chacune d'elles l'étendue de l'intervalle dans lequel certaines inégalités sont vérifiées.*

Gordan (*P.*). — Sur un théorème de Hilbert. (132-142).

Hilbert a démontré que tous les invariants d'une forme s'expriment rationnellement à l'aide d'un nombre fini d'entre eux. M. Gordan remarque que Hilbert a seulement établi l'existence des invariants φ qui constituent le *système complet* sans en indiquer la formation effective ou les propriétés; il donne une nouvelle démonstration comblant ces lacunes, dans laquelle il utilise, dit-il, certaines idées de la théorie des nombres de Dedekind introduites par Hilbert dans la théorie des formes.

Netto (*E.*). — Sur la théorie des « systèmes de triples ». (142-152).

Si l'on peut grouper par trois, n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de façon que

chaque combinaison $x_\alpha x_\beta$ figure une fois et une fois seulement dans l'un de ces groupes, leur ensemble constitue un « système de triples ». Noether a montré que les racines de l'équation modulaire du 8e degré conduisent par leur résolvante du 7e ordre à de tels systèmes. L'équation de Hesse (points d'inflexion d'une cubique) du neuvième degré conduit aussi à un système de triples. L'auteur indique de nouvelles propriétés de ces systèmes.

Parmi les nombres n (qui sont de la forme $6m+1$ ou $6m+3$) inférieurs à 100, il reste encore à examiner $n=25$, $n=85$. M. Netto a donné des principes permettant de former les groupes de triples dans tous les autres cas.

Pringsheim (*A.*). — Sur la théorie de la série de Taylor et les fonctions analytiques dont le domaine d'existence est borné. (153-184).

Étude des diverses circonstances qui peuvent se présenter quand une fonction de variable complexe n'est pas développable par la série de Taylor au voisinage d'un point. Exemples.

Formation à l'aide de suites $\sum_\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ de fonctions qui sont finies et continues ainsi que toutes leurs dérivées à l'intérieur d'un certain cercle et *sur ce cercle* et qui n'admettent pas de continuation analytique au delà.

Formation de fonctions qui ne peuvent être développées par la série de Taylor, en tous les points d'une ligne, parce qu'il existe sur cette ligne un ensemble *dense* de points en lesquels les dérivées croissent assez vite pour que la série de Taylor diverge.

Burkhardt (*H.*). — Sur l'expression de cas particuliers des formes primaires automorphes par des séries thêta spéciales. (185-214).

Lorsque les différences des exposants d'une équation différentielle hypergéométrique sont des inverses de nombres entiers

$$\lambda = \frac{1}{l}, \qquad \mu = \frac{1}{m}, \qquad \nu = \frac{1}{n},$$

l'argument x est, on le sait, une fonction uniforme automorphe du rapport η de deux solutions particulières. On peut, en posant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \eta = \frac{\eta_1}{\eta_2},$$

s'arranger pour que x_1 et x_2 soient des formes automorphes, sans singularités, de η_1 et η_2. Cette propriété appartient aussi, d'après Halphen, aux formes irrationnelles

$$\varphi = (xa)^{\frac{1}{l}}, \qquad \psi = (xb)^{\frac{1}{m}}, \qquad \chi = (xc)^{\frac{1}{n}},$$

a, b, c désignant les points de ramification. M. Klein en appelant l'attention

sur l'expression de η_1, η_2 par des périodes d'intégrales abéliennes de première espèce a exprimé l'opinion que les séries θ correspondantes pourraient conduire à des expressions analytiques pour les formes primaires φ, ψ, χ. M. Burkhardt a confirmé cette vue dans les deux cas les plus simples $\left(\lambda = \mu = \frac{1}{4}, \nu = 0;\ \lambda = \frac{1}{3},\ \mu = \nu = 0\right)$ tout en rencontrant des difficultés sérieuses dans le cas général.

Horn (*J.*). — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (214-252).

Il s'agit de l'extension des théories et résultats de Fuchs sur les équations différentielles linéaires aux systèmes à deux variables indépendantes qui peuvent se mettre sous la forme aux différentielles totales

$$dz_\alpha = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x, y)\, z_\beta\, dx + \sum_\beta G_{\alpha\beta}(x, y)\, z_\beta\, dy$$
$$(\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

où les coefficients satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\sum_\gamma (F_{\alpha\gamma} G_{\gamma\beta} - G_{\alpha\gamma} F_{\gamma\beta}) = \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x} - \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial y}.$$

Ces coefficients sont des fonctions rationnelles de x, y dont les dénominateurs sont des produits de facteurs irréductibles $\varphi(x, y)$; M. Horn cherche d'abord la forme générale du système pour lequel les solutions sont *régulières* au voisinage d'un point du domaine singulier $\varphi(x, y) = 0$; il se propose ensuite de calculer ces solutions.

La réduction du système à une forme canonique et l'étude des solutions sont faites dans le cas où le *déterminant caractéristique* n'a que des diviseurs élémentaires simples.

Bolza (*O.*). — Sur la définition du groupe d'une équation, donnée par Kronecker. (253-256).

Muth (*P.*) — Sur les formes bilinéaires ternaires. (256-272).

Contribution à l'étude du cas où toutes les formes d'un faisceau de formes ternaires bilinéaires sont *singulières*, c'est-à-dire où leur déterminant est nul.

Stekloff (*W.*). — Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide. (273-274).

Dobriner (*H.*). — Remarques sur le Mémoire de M. Réthy : *Sur l'égalité des surfaces* (*Math. Ann.*, t. XXXVIII). (275-284).

Dobriner (*H.*). — Un théorème de Bolyai et son application aux surfaces planes. (285-296).

Réthy (*M.*). — Sur l'égalité des surfaces. (297-307).

Réponse aux remarques de M. Dobriner.

Molien (*Th.*). — Rectification au Mémoire : *Sur les systèmes de nombres complexes*. (310-312).

Il s'agit des propriétés de l'équation de Killing d'un système de nombres.

Hilbert (*D.*). — Sur les systèmes complets d'invariants. (314-373).

La limitation des invariants d'un système complet est le point de départ des recherches actuelles de l'auteur. Il se propose d'établir que la théorie des invariants peut être regardée comme une application particulière de la théorie générale des corps de fonctions algébriques. Les méthodes appliquées doivent suffire pour l'étude des formes à un nombre quelconque de variables ou de séries de variables, lors même que les variables de diverses séries ne subiraient pas les mêmes substitutions linéaires; néanmoins, pour la clarté et la brièveté de l'exposition, M. Hilbert s'est borné aux formes binaires ou ternaires à une seule série de variables.

Ce travail comporte une Table qui peut donner une idée de son importance; nous indiquons seulement ici les titres des Chapitres :

Le corps des invariants;
L'évanouissement des invariants;
Le degré du corps des invariants;
La notion de la *forme nulle;*
La détermination des formes nulles;
La détermination d'un système complet d'invariants.

Botzmann (*L.*). — La démonstration du principe du dernier multiplicateur, telle qu'elle résulte des lois de l'équilibre de la chaleur, sous sa forme la plus simple. (374-376).

Schönflies (*A.*). — Sur les polygones formés d'arcs de cercle. (Première Partie, 377-408).

Les recherches de M. Schwarz ont montré l'importance de la considération des triangles formés d'arcs de cercle. M. Klein a pensé à utiliser, pour l'étude des équations linéaires du second ordre quelconques, le polygone formé d'arcs de cercle sur lequel le demi-plan est représenté par le quotient de deux solutions particulières. Il est nécessaire pour cela de faire connaître de façon précise les propriétés de ces polygones et de leur ensemble; c'est là l'objet des recherches de l'auteur.

Dans le Mémoire actuel il se borne aux polygones rectilignes appliqués sur un plan à un ou plusieurs feuillets et pouvant présenter des points de ramification intérieurs.

Kneser (*A.*). — Recherches sur les zéros réels des intégrales d'une équation différentielle linéaire. (409-435).

Il s'agit ici, comme dans les travaux classiques de Sturm et Liouville, des propriétés des intégrales des équations différentielles, importantes pour les applications à la Physique mathématique. L'auteur étudie en détail la question suivante :

Les intégrales d'une équation différentielle linéaire s'annulent-elles, oui ou non, une infinité de fois lorsque la variable réelle varie de 0 à $+\infty$?

Si la fonction $f(x)$ est finie et continue pour des valeurs de x suffisamment grandes et si $\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ est positive, toute intégrale de l'équation

$$y'' + y f(x) = 0, \tag{1}$$

finie pour x suffisamment grand et continue ainsi que ses deux premières dérivées, est *oscillante*, c'est-à-dire s'annule pour une suite indéfiniment croissante de valeurs de x.

Si la fonction $f(x)$ est pour les grandes valeurs de x, finie, continue et négative, l'équation (1) n'a pas d'intégrale oscillante : toute intégrale qui est finie et continue pour les grandes valeurs de x ainsi que ses deux premières dérivées finit par être ou croissante et positive ou décroissante et négative.

Si P, Q, P′ sont pour de grandes valeurs de x, finies et continues, toute intégrale y de l'équation

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

finie et continue pour de grandes valeurs de x ainsi que ses deux premières dérivées, est :

1° *Oscillante* si

$$\lim_{x=+\infty} x^2\left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right) > \frac{1}{4};$$

2° *Non oscillante* si

$$\lim_{x=+\infty} x^2\left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right) < \frac{1}{4},$$

ou si, la limite précédente étant $\frac{1}{4}$, on a pour x suffisamment grand

$$x^2\left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right) < \frac{1}{4}.$$

M. Kneser étudie de même quelques équations d'ordre supérieur à 2.

Netto (*E.*). — Sur la théorie des équations abéliennes. (436-452).

Relations entre une équation abélienne $f(x) = 0$ et l'équation en y, qui en dérive par la transformation $y = P(x)$.

Étude des propriétés de l'équation

$$\frac{\varphi_a(x) - x}{\varphi(x) - x} = 0,$$

où l'on a posé

$$\varphi_2(x) = \varphi[\varphi(x)], \quad \ldots, \quad \varphi_{i+1} = \varphi[\varphi_i(x)].$$

Netto (*E.*). — Sur le problème d'interpolation de Cauchy. (452-456).

On sait que ce problème n'est pas toujours possible; l'auteur l'établit par une méthode élémentaire et donne les conditions sous lesquelles il n'admet pas de solution.

Läroth (*J.*). — Démonstration d'un théorème de Bertini sur les systèmes linéaires de polynomes. (457-470).

Démonstration algébrique du théorème suivant :

Si tous les polynomes d'un système linéaire sont décomposables, ou bien il existe un facteur commun à tous ces polynomes, ou bien le système se décompose en polynomes qui appartiennent tous à un même faisceau.

Simon (*M.*). — Sur la détermination du volume dans la Géométrie de Lobatschewsky. (471-484).

L'auteur, par une transformation de l'élément de volume, établit simplement divers résultats de Lobatschewsky et calcule les volumes des corps élémentaires : sphère, cône, cylindre, prisme triangulaire, etc.

Kœnigsberger (*L.*). — Remarque sur la démonstration d'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (485-488).

Pick (*G.*). — Sur le système de formes d'un polygone formé d'arcs de cercle, dont le genre est nul. (489-496).

Aux sommets d'un polygone fondamental qui donne naissance à une fonction automorphe correspondent des *formes primaires* automorphes (*Cf.* Ritter, *Math. Ann.*, t. XLI); l'auteur étudie ici le déterminant fonctionnel et le hessien de ces formes pour les polygones de genre nul.

Lilienthal (*R.-V.*). — Note sur la forme normale de Hesse de l'équation d'un plan. (497-504).

Il s'agit d'établir une forme normale de l'équation du plan, analogue à celle de Hesse, permettant la distinction entre les deux côtés du plan, sans qu'il y ait d'exception quand le plan passe par l'origine. L'auteur utilise seulement les directions positives des axes.

Lilienthal (*R.-V.*). — Sur la courbure géodésique. (505-525).

Formules générales donnant les différentes courbures. — Éléments linéaires de deux faisceaux de courbes et de leurs trajectoires orthogonales. — Équations fondamentales. — Courbures géodésiques dans des faisceaux orthogonaux. Applications. — Courbure géodésique de l'image sphérique d'une courbe sur une surface.

Bolza (*O.*). — Sur les relations linéaires entre les systèmes fondamentaux d'intégrales de l'équation différentielle de Riemann qui correspondent à différents points singuliers. (526-536).

L'auteur développe, pour l'équation de Riemann à trois points singuliers, les relations entre les divers systèmes fondamentaux qui correspondent aux trois points singuliers de façon à conserver la symétrie par rapport à ces points : toutes les relations dérivent de l'une d'entre elles par simple permutation de lettres. Une certaine réduction normale des systèmes fondamentaux le conduit ensuite aux relations linéaires les plus simples.

Stäckel (*P.*). — Sur le mouvement d'un point dans une multiplicité à n dimensions. (537-563).

Sur une classe remarquable de mouvements d'un point dans une multiplicité à n dimensions [hypothèse d'une fonction de forces qui vérifie l'équation $\Delta U = f(U)$ des surfaces parallèles]. — Sur l'intégration de l'équation de Hamilton-Jacobi par séparation des variables et sur un problème d'inversion qui conduit à des fonctions de n variables réelles à n périodes. — Sur une classe de mouvements d'un point qui correspond au mouvement de Jacobi sur une surface de révolution.

Fricke (*R.*). — Sur les principes de théorie des groupes qui servent à l'étude des fonctions automorphes. (564-594).

Il s'agit de la définition générale de groupes de substitutions linéaires,

$$v_1' = \frac{\alpha v_1 - \beta}{\gamma v_1 - \delta},$$

proprement discontinus, dont l'auteur a déjà indiqué des cas particuliers (*Math. Ann.*, t. XXXVIII, XXXIX). Les coefficients de la substitution sont des entiers algébriques d'un certain corps algébrique fini, choisis d'après des règles simples.

Suivant que le corps algébrique est réel ou imaginaire, on se trouve en présence d'un groupe avec cercle principal ou d'un groupe avec polyèdre fonda-

mental (*Cf.* Poincaré, *Acta mathematica*, t. III; Bianchi, *Math. Ann.*, t. XXXVIII, XL).

Soit K_n un corps de degré n, supposé réel; désignons par P et par Q deux nombres *positifs* de K_n, tels que ni P ni PQ ne soient quadratiques dans K_n. Si A, B, C, D désignent des *entiers* de K_n assujettis à la seule condition (module de la substitution $= 1$)

$$A^2 - PB^2 + QC^2 - PQ\,D^2 = 1.$$

les substitutions

$$U(\tau_1) = \frac{(A + B\sqrt{P})\tau_1 + (C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})}{(-C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\tau_1 + (A - B\sqrt{P})} \qquad \text{et} \qquad T(\tau_1) = \frac{-1}{\tau_1}$$

forment le groupe considéré $\Gamma(K_n, P, Q)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour sa *discontinuité propre* sont :

1° Que tous les corps conjugués de K_n soient réels;
2° Que tous les nombres conjugués de P soient négatifs;
3° Que tous les nombres conjugués de Q soient positifs.

Schönflies (*A.*). — Remarque sur la théorie des configurations régulières n_3. (595-597).

Complément à un travail antérieur de l'auteur (*Math. Ann.*, t. XXXI).

Weltzien (*C.*). — Sur le produit de deux déterminants. (598-600).

Baker (*J.*). — Sur le théorème fondamental de Noether. (601-604).

Développement d'une Note de Brill (*Math. Ann.*, t. XXXIX) au sujet de la démonstration, donnée par Bertini, des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait

$$F = A\Phi + B\Psi,$$

F, Φ, Ψ étant trois polynomes en x, y.

Tome XLIII; 1893.

Weber (*H.*). — Léopold Kronecker. (1-25).

Notice nécrologique suivie de la liste de ses travaux.

Wölffing (*E.*). — Sur les invariants des fonctions algébriques de formes. (26-62).

L'auteur se propose l'étude des fonctions des coefficients (et des variables)

d'un système de formes homogènes

$$f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_k,$$

qui sont simplement multipliées par une puissance du module de la transformation quand on soumet ces formes à une transformation linéaire et homogène : ce sont les *invariants du système de formes*.

Après avoir étendu les notions des *promanants, remanants* et *familles d'invariants,* l'auteur introduit comme arguments les *sommes* des formes f_i, puis les *produits* et les fonctions rationnelles entières quelconques. Les résultats obtenus sont ramenés à la forme la plus simple et l'auteur insiste sur la différence entre les propriétés des formes *complètes* et *défectives*.

Il passe enfin à l'étude des invariants de fonctions rationnelles ou algébriques quelconques des formes $f_1, \ldots, f_k$, des invariants d'invariants et des équations invariantes.

Ce travail n'exige pour être lu que la connaissance des *notations symboliques* de la théorie ordinaire des invariants (Gordan, Clebsch).

Klein (*F.*). — Considérations comparatives sur de nouvelles recherches géométriques. (63-100).

Réimpression du *Programme d'entrée à la Faculté* (Erlangen, 1872) avec quelques additions. *Cf.* la traduction de M. Padé (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1891).

Bianchi (*L.*). — Sur quelques classes de groupes de substitutions linéaires à coefficients complexes. (101-135).

L'auteur a étudié (*Math. Ann.*, t. XXXVIII, XL, XLI) certains groupes de substitutions

$$z' = \frac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta},$$

où α, β, γ, δ sont tous les entiers d'un corps quadratique imaginaire, pour lesquels $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il commence par étudier ici une classe de sous-groupes *congruentiels* des groupes précédents.

Une seconde Partie du travail est consacrée à des groupes qui sont l'extension naturelle de ceux considérés par M. Fricke (*Math. Ann.*, t. XXXVIII, XXXIX) et qui se rattachent, d'autre part, aux groupes arithmétiques qui reproduisent une forme quadratique quaternaire réelle.

Graf (*J.-H.*). — Sur l'addition et la soustraction des arguments dans les fonctions de Bessel, avec une application. (136-144).

Reye (*Th.*). — Sur le calcul symbolique des transformations géométriques. (146-170).

L'auteur s'occupe des transformations univoques, réversibles, non dégé-

2ue Partie

nérées, qui font correspondre un à un les éléments de deux figures : points, droites et plans. Il étudie géométriquement les diverses questions de théorie élémentaire des groupes auxquelles elles donnent lieu : formation du produit, inversion, transformations permutables avec une transformation donnée, etc.

Stäckel (*P.*). — Sur les courbes algébriques rectifiables. (171-184).

M. Humbert a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe algébrique plane soit rectifiable algébriquement (c'est-à-dire pour que l'arc de la courbe soit une fonction algébrique des coordonnées de son extrémité variable) est qu'elle soit la développée d'une courbe algébrique. L'extension *complète* de cette proposition aux courbes gauches ne peut se faire. M. Stäckel montre que toutes les courbes gauches algébriques, rectifiables algébriquement, sont des développées des courbes gauches pour lesquelles le sinus de la torsion dépend algébriquement des coordonnées de l'extrémité de l'arc.

Signalons quelques propositions curieuses sur les géodésiques des développables algébriques.

Weber (*H.*). — Contribution à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques avec une application à la théorie des nombres (185-196).

Soient k, k' les modules de Jacobi, et

$$f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{kk'}};$$

pour tout nombre premier n supérieur à 3, les expressions

$$u = f(\omega), \qquad v = f(n\omega)$$

sont liées par une relation algébrique symétrique, de degré $(n+1)$ par rapport à chacune des lettres u, v et dont les autres solutions sont

$$v_h = f\left(\frac{h+\omega}{n}\right) \qquad h = 0 \pmod{48}.$$

M. Weber s'occupe ici de cette *équation modulaire de Schläfli* (Cf. *Fonctions elliptiques et nombres algébriques,* Brunswick, 1890) dans le cas

$$n \equiv -1 \pmod{24}$$

et plus particulièrement pour

$$n = 23, \qquad n = 47.$$

Burkhardt (*H.*). — Sur les fonctions de vecteurs qui sont aussi des vecteurs. Application des méthodes de la théorie des invariants à une question de Physique mathématique. (197-215).

M. P. Drude a été conduit par ses recherches sur les diverses théories de la lumière à la question suivante :

Étant donné un nombre quelconque de vecteurs, fonctions de la position d'un ou de plusieurs points, déterminer de la façon la plus générale des fonctions de ces vecteurs et de leurs dérivées suivant les coordonnées qui sont elles-mêmes des vecteurs ?

Si l'on se restreint à la détermination des vecteurs dont les composantes sont des polynomes formés avec les composantes des vecteurs donnés, ce problème est susceptible d'une réponse simple :

Soient $u_1, v_1, w_1, \ldots, u_n, v_n, w_n$ les composantes des vecteurs donnés; ces composantes subissent par toute transformation linéaire et homogène *orthogonale* des coordonnées x, y, z, une transformation linéaire. Ajoutons un nouveau système u_0, v_0, w_0 transformé de même et formons un invariant entier

$$F(u_0, v_0, w_0; u_1, v_1, w_1; \ldots; u_n, v_n, w_n)$$

qui soit *linéaire* en u_0, v_0, w_0; les trois dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial w_0}$$

sont les composantes d'un des vecteurs cherchés. Tous ces nouveaux vecteurs peuvent s'obtenir ainsi.

Hilbert (*D.*). — Sur la transcendance des nombres e et π. (216-219).

Démonstration de cette transcendance basée sur la considération de l'intégrale

$$\int_0^\infty z^q[(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^{q+1}e^{-z}\,dz,$$

déjà étudiée par Hermite.

Hurwitz (*A.*). — Démonstration de la transcendance de e. (220-221).

Modification à la démonstration de Hilbert, qui évite l'emploi des intégrales (*Cf.* Jordan, *Cours d'Analyse,* t. II, 2e édition, p. 99).

Gordan (*P.*). — Transcendance de e et π. (222-224).

Démonstration où n'intervient que le développement en série de e^x (Cf. *Comptes rendus,* Paris, juillet 1893).

Junker (*Fr.*). — Sur les fonctions symétriques de plusieurs séries de variables. (225-270).

Considérons deux ou plusieurs séries de variables, en nombre égal

$$x_1, y_1, \ldots, w_1; \; x_2, y_2, \ldots, w_2; \; \ldots; \; x_r, y_r, \ldots, w_r.$$

nous appellerons *fonction symétrique* de ces séries toute fonction qui ne change pas quand on échange les éléments d'une série avec les éléments correspondants d'une autre série.

Les fonctions $\Sigma x_1, \ldots; \Sigma x_1 x_2, \Sigma x_1 y_2, \ldots; \Sigma x_1 x_2 x_3, \Sigma x_1 x_2 y_3, \Sigma x_1 y_2 y_3, \ldots;$ $\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4, \Sigma x_1 x_2 x_3 y_4, \ldots$ sont les fonctions *élémentaires*. Il est clair que toute fonction symétrique peut s'exprimer avec des fonctions élémentaires, mais l'expression à laquelle on parvient n'est pas unique. Les fonctions élémentaires sont en effet liées par des relations identiques, que M. Junker se propose d'étudier.

De façon plus précise une fonction symétrique étant dite de $k^{\text{ième}}$ *espèce* lorsqu'elle dépend des arguments $x, y, \ldots, w$ de k séries, M. Junker montre que toute fonction de $k^{\text{ième}}$ espèce peut s'exprimer à l'aide de fonctions de première espèce et de fonctions élémentaires. Il détermine ensuite les relations qui lient les fonctions élémentaires et les fonctions de première espèce.

Le calcul effectif de ces relations est fait pour trois variables x, y, z dans les cas où il y a moins de neuf séries.

Hastings-Moore (*E.*). — Concernant les systèmes de *triples*. (271-285).

Deux systèmes de *triples* d'un même nombre d'éléments sont dits *de même classe*, s'ils peuvent se correspondre biunivoquement de façon qu'à un triple corresponde un triple.

M. Netto (*Math. Ann.*, t. XLII) a trouvé que le nombre n des éléments a la forme $6m+1$ ou $6m+3$. Existe-t-il, pour chaque nombre de l'une de ces formes, un système de triples? Pour un même nombre n, tous les systèmes de triples appartiennent-ils à une même classe?

Les constructions indiquées par M. Netto, avec une construction nouvelle lorsque n est le produit de deux nombres premiers de la forme $6m+5$, suffiront à former des systèmes pour toute valeur de n admissible.

A partir de $n=13$, M. Moore établit que l'on peut construire deux *sortes* au moins de systèmes de triples, chaque sorte pouvant contenir plusieurs classes. (Deux systèmes de *sortes* différentes sont supposés de classes différentes.)

Meyer (*F.*). — Sur les discriminants et les résultants des équations qui déterminent les singularités des courbes algébriques avec des applications aux questions concernant la réalité. (286-300).

Extrait d'un Mémoire plus étendu paru sous le même titre (*Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik*).

La nature des singularités des courbes algébriques planes ou gauches est telle que la coïncidence de deux éléments singuliers entraîne en général celle de trois éléments. Cette circonstance trouve sa raison analytique dans les propriétés des résultants et des discriminants des équations algébriques qui définissent la singularité. Pour les mettre en évidence dans les cas les plus simples, l'auteur a étudié les courbes rationnelles de l'espace à trois dimensions.

La relation découverte par M. Klein entre les singularités réelles d'une courbe plane donne pour les courbes gauches une *congruence* (mod 4). Pour

un espace à quatre dimensions, ou un nombre pair, on retrouve des relations déterminées.

Hölder (*O.*). — Les groupes d'ordre p^3, pq^2, pqr, p^4. (302-412).

On connaît déjà les groupes d'ordre p^2 et pq quand p et q sont *premiers :* Les groupes d'ordre p sont cycliques; ceux d'ordre p^2 et pq ont été donnés par M. Netto (*Substitutionentheorie*). L'auteur commence par retrouver ces résultats par une méthode particulière qu'il étend ensuite aux groupes d'ordre pq^2, pqr, p^3, p^4.

Il trouve un grand nombre de types, par exemple quinze groupes d'ordre p^4 si p est impair.

Un dernier paragraphe donne le *tableau complet* de tous les types de groupes d'ordres p, p^2, p^3, p^4; pq, pq^2, pqr; ces groupes sont décomposés en produits quand ils peuvent l'être. Nous ne pouvons même songer à reproduire ce tableau si important, à cause de son étendue.

Krazer (*A.*). — La transformation des fonctions thèta d'une variable. (1re Partie, 413-456), (2e Partie, 457-504).

Dans la seconde Partie de son Ouvrage (*Nouveaux fondements de la théorie générale des fonctions thêta.* Leipzig, Teubner, 1892), l'auteur a traité complètement le problème de la transformation des fonctions thêta : on peut déduire des résultats indiqués la solution d'un problème de transformation particulier en décomposant la transformation considérée, suivant les règles indiquées, en transformations simples, pour lesquelles on a donné des formules qu'il suffira ensuite de combiner de la façon indiquée pour obtenir les formules générales. L'auteur se propose d'exposer ici, en partant de ces principes, la théorie générale de la transformation. La première Partie renferme la décomposition d'une transformation quelconque et l'établissement des formules pour les transformations simples, la seconde résout le problème de la transformation pour un entier n quelconque.

Deux Tables de matières accompagnent ces Mémoires, remarquables par leur netteté.

Baur (*L.*). — Sur la théorie des fonctions d'un corps cubique. (505-520).

Étude détaillée d'un corps cubique irréductible quelconque d'après les principes exposés par M. Dedekind [*Théorie des fonctions algébriques d'une variable* (*Journal de Crelle,* t. 92)].

Weber (*H.*). — Les fondements généraux de la théorie des équations, de Galois. (521-549).

L'auteur se propose d'établir la théorie de Galois de façon à comprendre autant que possible tous les cas où cette théorie peut être appliquée. Elle apparaît comme une conséquence immédiate de l'extension de la notion de groupe à un *corps*, ou encore comme une loi formelle entièrement indépendante de la signification des éléments.

Gall (*V.*). — Sur les syzygants $D^2\psi = [5, 5, 2]$ de deux formes quadratiques binaires simultanées. (550-552).

Mie (*G.*). — Démonstration de l'existence des intégrales des systèmes différentiels ordinaires, d'après Peano. (553-568).

Soit le système

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

on démontre habituellement l'existence des intégrales sous les conditions suivantes :

1° Au voisinage des valeurs initiales $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ les f_i sont des fonctions finies et continues des variables $x, y_1, \ldots, y_n$;

2° On a, pour tout f_i et tout y_k, dans le voisinage des valeurs initiales considérées

$$\left| \frac{f_i(x, y_1, \ldots, y_k + \Delta y_k, \ldots, y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n)}{\Delta y_k} \right| < c_{ik},$$

les c_{ik} étant des constantes positives.

M. Peano a montré le premier que ces dernières conditions, dites *de Lipschitz*, ne sont pas *nécessaires* pour l'*existence* des solutions (bien que lorsqu'elles sont remplies on puisse affirmer que la solution considérée est *unique*).

La démonstration de M. Peano est exposée (*Math. Ann.*, t. XXXVII) à l'aide des notations de son *Calcul logique;* M. Mie s'est proposé d'en donner un exposé accessible au grand public et aussi concis que possible.

Killing (*W.*). — Sur la Géométrie projective. (569-592).

Combien de points dans un espace projectif peuvent correspondre aux mêmes valeurs des coordonnées? Pour un nombre de dimensions égal ou supérieur à 2, deux points au plus.

Un second paragraphe indique un moyen de passer de la Géométrie projective à la Géométrie métrique.

Stolz (*O.*). — Sur les formules fondamentales de la Géométrie analytique. (591-592).

Observations sur la Note de M. Lilienthal, relative à la forme de Hesse de l'équation du plan.

Baker (*H.-F.*). — Sur une démonstration géométrique de la formule $\mathfrak{J}$ de Jacobi. (592-597).

Il s'agit de déduire de la formule de Jacobi une propriété géométrique des cubiques planes. Weierstrass a simplifié la formule de Jacobi en n'y laissant plus subsister qu'une seule fonction σ (on a alors l'équation à trois termes); M. Baker montre que l'équation à trois termes ou la formule de Jacobi expri

ment des propriétés d'une fonction doublement périodique d'un seul argument

$$g(u) = \frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u+u_4)}{\sigma(2u-\frac{1}{2}s)},$$

avec $s = u_1 + u_2 - u_3 + u_4$. La représentation paramétrique des cubiques conduit alors à la proposition cherchée.

Bôcher (*M.*). — Quelques théorèmes sur la réflexion projective (598-600).

Décomposition des collinéations de l'espace en *réflexions* et transformations du groupe *principal* (mouvements et similitudes).

Rausenberger (*O.*). — Le problème fondamental de la théorie des aires et des volumes. (601-604).

Si deux figures planes finies peuvent être décomposées en figures congruentes, leur inégalité peut-elle être établie par une autre décomposition? L'auteur se propose d'établir rigoureusement la négative pour les figures formées de droites.

J. D.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH-PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1899; premier semestre.

Vohlen (*J.*). — Frédéric II et d'Alembert. (49-71).

Lipschitz (*R.*). — Remarques concernant les différentielles d'expressions symboliques. (122-136).

I. Les expressions envisagées par M. Lipschitz sont de la forme

$$\Lambda = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \ldots + u_s\xi_s,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ désignent des quantités réelles et $u_1, u_2, \ldots, u_s$ des symboles quelconques donnés. Ces symboles sont choisis de façon que les règles de l'addition s'étendent aux expressions symboliques envisagées, mais leur choix n'est pas limité par la convention analogue d'après laquelle les règles ordinaires de la multiplication seraient conservées, en sorte que les résultats obtenus par M. Lipschitz s'appliquent aussi bien aux nombres formés au moyen de s unités $u_1, u_2, \ldots, u_s$ envisagés par Weierstrass et M. Dedekind qu'aux quaternions d'Hamilton, aux expressions envisagées par M. Lipschitz lui-même dans ses recherches sur les transformations de sommes de carrés en somme de carrés

et aux diverses expressions envisagées par Cauchy et désignées sous le nom de *clefs algébriques*.

Pour multiplier entre elles deux expressions symboliques

$$A = u_1\xi_1 - u_2\xi_2 - \ldots - u_s\xi_s,$$
$$B = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 - \ldots + u_s\eta_s,$$

on prendra chaque élément $u_i\xi_i$ de la première de ces deux expressions et on le multipliera successivement par chaque élément $u_k\eta_k$ de la seconde des deux expressions, en ayant soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs, puis on ajoutera tous les produits ainsi obtenus. La définition d'une expression de la forme

$$ABC\ldots,$$

où A, B, C, ... désignent des expressions symboliques en nombre fini, et celle d'une somme

$$F = \Sigma ABC\ldots.$$

de telles expressions, s'entendent alors d'elles-mêmes.

Ceci posé, envisageons une somme

$$F_n = \Sigma ABC\ldots.$$

dans chacun des termes de laquelle ne figurent au plus en facteur que n expressions symboliques A, B, C, ...; donnons à A, B, C, ... des accroissements finis quelconques ΔA, ΔB, ΔC, ..., et convenons de désigner par ΔF_n la différence

$$\Delta F_n = \Sigma(A + \Delta A)(B + \Delta B)(C + \Delta C)\ldots - \Sigma ABC\ldots;$$

il est aisé de voir que l'on a

$$\Delta F_n = \delta_1 F + \frac{1}{2!}\delta_1^2 F + \ldots + \frac{1}{n!}\delta_1^{(n)} F,$$

où $\delta_1^{(i)}(ABC\ldots)$ désigne ce que devient l'expression de la différentielle d'ordre i

$$\delta^{(i)}(ABC\ldots).$$

lorsqu'on y remplace les différentielles δA, δB, δC, ... qui y figurent par les accroissements finis ΔA, ΔB, ΔC, ... On a d'ailleurs défini la différentielle δA d'une expression symbolique A, par la formule

$$\delta A = u_1\delta\xi_1 + u_2\delta\xi_2 + \ldots + u_s\delta\xi_s,$$

$\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, ..., $\delta\xi_s$, étant les différentielles des quantités ξ_1, ξ_2, ..., ξ_s; puis la différentielle $\delta(AB)$ d'un produit de deux expressions symboliques A, B, par la formule

$$\delta(AB) = (\delta A)B + A(\delta B),$$

la différentielle $\delta(ABC)$ par la formule

$$\delta(ABC) = (\delta A)BC + A(\delta B)C + AB(\delta C),$$

et ainsi de suite; puis les différentielles $\delta^{(i)}(AB\ldots)$ d'ordres supérieurs par les

relations

$$\frac{1}{2}\delta^{(2)}(AB) = (\delta A)(\delta B),$$

$$\frac{1}{2}\delta^{(2)}(ABC) = (\delta A)(\delta B)C + A(\delta B)(\delta C) + (\delta A)B(\delta C),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\delta^{(3)}(AB) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\delta^{(3)}(ABC) = (\delta A)(\delta B)(\delta C):$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

formées d'après les règles du calcul différentiel *en envisageant les différentielles d'ordres supérieurs des quantités* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\xi$ *comme nulles.*

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre n ainsi que le nombre des termes de la somme Σ envisagée, il peut arriver que l'expression F_n reste convergente; si l'on désigne alors par F la limite vers laquelle elle tend, on a

$$\Delta F = \delta_1 F + \frac{1}{2!}\delta_1^{(2)} F + \ldots + \frac{1}{n!}\delta_1^{(n)} F + \ldots;$$

le développement en série de Taylor donné par Hamilton pour une fonction convergente F de quaternions, s'étend donc à toutes les fonctions convergentes F d'expressions symboliques envisagées par M. Lipschitz.

Si F désigne la série

$$F = \frac{Q}{1} - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{2} - \ldots,$$

dans laquelle Q représente une expression symbolique quelconque pour laquelle la série envisagée est convergente, M. Lipschitz montre que l'on a

$$\begin{aligned}(1+Q)\,\delta F = {} & \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)Q + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Q^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)Q^3 + \ldots\right]\delta Q \\ & + \left[-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)Q + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)Q^2 + \ldots\right](\delta Q)\,Q \\ & + \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)Q + \ldots\right](\delta Q)\,Q^2 \\ & + \left(-\frac{1}{4} + \ldots\right)(\delta Q)\,Q^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

qui, *quand la multiplication des expressions symboliques est commutative,* se réduit à la relation

$$(1+Q)\,\delta F = \delta Q,$$

qui ne diffère pas de la relation bien connue

$$(1+Q)\,dF = dQ,$$

que vérifie le logarithme

$$F = \log(1+Q) = \frac{Q}{1} - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3} - \ldots$$

où Q désigne une variable réelle ou de la forme $\xi_1 + \sqrt{-1}\,\xi_2$, située dans le cercle de convergence de F.

II. On sait que l'état des vitesses d'une figure invariable (E), se mouvant autour d'un point fixe O, est caractérisé à chaque instant t par la vitesse angulaire de rotation $\overline{O\Omega}$, à cet instant t, de la figure (E). Si l'on désigne par $Ox_1x_2x_3$ un trièdre trirectangle fixé dans (E) et par $Oy_1y_2y_3$ un trièdre trirectangle fixé dans l'espace, les composantes p_1, p_2, p_3, suivant Ox_1, Ox_2, Ox_3 de $\overline{O\Omega}$, sont données par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1\,dt = \alpha_{21}\,\delta\alpha_{31} + \alpha_{22}\,\delta\alpha_{32} + \alpha_{23}\,\delta\alpha_{33}, \\ p_2\,dt = \alpha_{31}\,\delta\alpha_{11} + \alpha_{32}\,\delta\alpha_{12} + \alpha_{33}\,\delta\alpha_{13}, \\ p_3\,dt = \alpha_{11}\,\delta\alpha_{21} + \alpha_{12}\,\delta\alpha_{22} + \alpha_{13}\,\delta\alpha_{23}, \end{cases}$$

où l'on a posé $\delta\alpha_{ik} = \dfrac{d\alpha_{ik}}{dt}\,dt$ pour chacun des indices i et k, et où pour $i = 1$, 2, 3, α_{1i}, α_{2i}, α_{3i} désignent les cosinus directeurs de l'axe fixe dans l'espace Oy_i par rapport aux axes fixes dans la figure mobile Ox_1, Ox_2, Ox_3. Les expressions $\alpha_{ik} + \delta\alpha_{ik}$ vérifient d'ailleurs, comme les expressions α_{ik} elles-mêmes, les équations de condition

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 1;$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_{a1}^2 + \alpha_{a2}^2 + \alpha_{a3}^2 = 1, \qquad \alpha_{a1}\alpha_{b1} + \alpha_{a2}\alpha_{b2} + \alpha_{a3}\alpha_{b3} = 0, \qquad \text{si} \quad b \gtrless a \\ \qquad\qquad (a = 1,\ 2,\ 3, \qquad b = 1,\ 2,\ 3). \end{cases}$$

Si x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées d'un point quelconque par rapport au trièdre $Ox_1x_2x_3$, et y_1, y_2, y_3 les coordonnées du même point par rapport au trièdre $Oy_1y_2y_3$, on a d'ailleurs

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 = \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{cases}$$

et

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

à la substitution linéaire (3) correspond donc un quaternion

$$\Lambda = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{23}\lambda_{23} + i_{31}\lambda_{31},$$

déterminé à un facteur réel constant près (on a écrit i_{12}, i_{23}, i_{31} au lieu de i, j, k pour désigner les trois unités complexes d'Hamilton); la norme

$$\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2$$

de Λ est différente de zéro. De même, à la substitution linéaire qui se déduit de (3) par le changement des coefficients α_{ik} en $\alpha_{ik} + \delta\alpha_{ik}$ correspond un quaternion que l'on désignera par

$$\Lambda + \delta\Lambda.$$

On désignera enfin par Λ' et $\Lambda' + \delta\Lambda'$ les quaternions *conjugués* de Λ et de $\Lambda + \delta\Lambda$ (obtenus en changeant i_{12}, i_{23}, i_{31} en $-i_{12}$, $-i_{23}$, $-i_{31}$). Ceci posé, M. Lipschitz démontre que l'on a

$$(4) \qquad \Lambda'\Lambda(i_{23}p_1\,dt + i_{31}p_2\,dt + i_{12}p_3\,dt) = (\delta\Lambda')\Lambda - \Lambda'(\delta\Lambda).$$

Cette relation symbolique condense en une seule formule les expressions, en fonction de t, des trois composantes, suivant les axes fixés dans la figure mobile, de la vitesse angulaire de rotation de cette figure mobile autour de son point fixe O.

III. On peut se proposer de la généraliser dans l'espace à n dimensions. Envisageons à cet effet les substitutions linéaires

$$(3') \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n, \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n, \end{cases}$$

à coefficients réels, à déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

égal à $+1$, et telles que l'on ait

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2;$$

les coefficients α_{ik} vérifient les relations

$$(2') \qquad \begin{cases} \sum_{c=1}^{c=n} \alpha_{ac}^2 = 1, \qquad \sum_{c=1}^{c=n} \alpha_{ac}\alpha_{bc} = 0, \qquad \text{pour } a \neq b \\ \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

analogues aux relations (2). A chaque substitution (3') correspond d'ailleurs une expression complexe

$$\Lambda = \lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + \ldots + i_{1234}\lambda_{1234} + \ldots,$$

dont la norme

$$\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots$$

est différente de zéro, expression que M. Lipschitz désigne par le symbole

$$\Lambda = \lambda_0 + k_1k_2\lambda_{12} + \ldots + k_1k_2k_3k_4\lambda_{1234} + \ldots,$$

où k_1, k_2, k_3, k_4, ... désignent des *symboles primitifs*, tels que l'on ait

$$k_1k_2 = i_{12}, \qquad k_1k_2k_3k_4 = i_{1234}, \qquad \ldots$$

Si alors A' est l'expression conjuguée de A,

$$A' = \lambda_0 + k_2 k_1 \lambda_{12} + \ldots + k_4 k_3 k_2 k_1 \lambda_{1234} + \ldots.$$

Ceci posé, envisageons une substitution (3') dont les coefficients $\alpha_{ik} + \delta\alpha_{ik}$ vérifient, comme les coefficients α_{ik} eux-mêmes, les relations (2'), et désignons par $A + \delta A$, $A' + \delta A'$ l'expression complexe qui correspond à cette substitution (3') et l'expression conjuguée. Désignons aussi par $[a, b]$ les quantités analogues aux expressions (1) de $p_1 dt$, $p_2 dt$, $p_3 dt$, définies par les relations

$$(1') \quad \begin{cases} [a, b] = \alpha_{a1}\delta\alpha_{b1} - \alpha_{a2}\delta\alpha_{b2} + \ldots + \alpha_{an}\delta\alpha_{bn} \\ \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

M. Lipschitz démontre que l'on a

$$(4') \quad \begin{cases} A'A \sum_{(a,b)} k_a k_b [a, b] = (\delta A')A - A'(\delta A), \\ \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, n; \quad a \gtrless b). \end{cases}$$

C'est, dans l'espace à n dimensions, la relation symbolique analogue à la relation (4).

Les mêmes recherches s'étendent d'ailleurs sans difficulté au cas où les x, y, α désignent des quantités complexes ordinaires de la forme $a - b\sqrt{-1}$.

Hamburger (*M.*). — Sur les solutions singulières des équations différentielles algébriques d'ordre quelconque n. (140-145).

Désignons par

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

un polynome de degré m en $y^{(n)}$ dont les coefficients soient des polynomes en $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ n'ayant aucun diviseur commun, et supposons que ce polynome de degré m en $y^{(n)}$ ne puisse être décomposé en un produit de polynomes en $y^{(n)}$ ayant pour coefficients des polynomes en $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Remplaçons dans ce polynome y par une fonction de x et $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ par les dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, n$ de y prises par rapport à x; en éliminant $y^{(n)}$ entre l'équation différentielle algébrique

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

et l'équation

$$\frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

on obtient, comme on sait, l'équation du discriminant

$$(2) \qquad \Delta(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

qui fournit la condition nécessaire sous laquelle le polynome f de degré m en $y^{(n)}$ admet des racines multiples. Soit

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})$$

une des racines de l'équation (2) développable en série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, $y' - y'_0$, ..., $y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$, aux environs du point analytique arbitrairement fixé $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-2)})$; dans le cercle de convergence de cette série entière, l'équation

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}, \eta, y^{(n)}) = 0$$

définit m fonctions $y^{(n)}$ de $x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}$; supposons que p de ces fonctions soient égales et désignons par ζ leur valeur commune. Si ζ n'est pas identiquement infinie, il existe p fonctions algébriques $y^{(n)}$ de $y^{(n-1)}$ se réduisant à ζ pour $y^{(n-1)} = \eta$; ces p fonctions se partagent en groupes formés chacun de branches connexes; les branches faisant partie d'un même groupe peuvent être représentées par un développement de la forme

$$(3) \qquad y^{(n)} - \zeta = g_0 [y^{(n-1)} - \eta]^{\frac{k}{\alpha}} + g_1 [y^{(n-1)} - \eta]^{\frac{k+1}{\alpha}} + \ldots,$$

où k et α sont des entiers positifs donnés et g_0, g_1, ... des séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, $y' - y'_0$, ..., $y^{(n-2)} - y_0^{(n-2)}$, convergentes aux environs du point analytique $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-2)})$; g_0 ne s'annulant pas identiquement.

Si, en outre, $y^{(n-1)} = \eta$ *n'est pas une intégrale première de l'équation différentielle* (1), la quantité entre crochets, dans le second membre du développement précédent, est nécessairement de la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad y^{(n-1)} - \eta = \frac{1}{\zeta_0 - \sigma_0}(x - x_0) + \gamma_1 (x - x_0)^{1 + \frac{1}{\alpha}} + \ldots,$$

où σ_0 est la valeur que prend au point analytique $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-2)})$ l'expression

$$\sigma = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n-2)} + \frac{\partial \eta}{\partial y^{(n-2)}} \eta,$$

et ζ_0 la valeur que prend ζ en ce même point analytique (que l'on peut toujours choisir de façon que ζ_0 ne soit pas égal à σ_0).

Si pour $y^{(n-1)} = \eta$, une des valeurs de $y^{(n)}$ était *infinie*, en sorte que l'on ait pour les fonctions algébriques correspondantes $y^{(n)}$ de $y^{(n-1)}$,

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)} - \eta]^{-\frac{k}{\alpha}} \left\{ g_0 + g_1 [y^{(n-1)} - \eta]^{\frac{1}{\alpha}} + \ldots \right\},$$

où les différentes lettres ont la même signification que dans le cas précédent, on aurait nécessairement, pour la quantité entre crochets dans le second membre de cette relation, un développement de la forme

$$(\mathrm{II}) \quad y^{(n-1)} - \eta = \left[\frac{\alpha + k}{\alpha} g_{00}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha + k}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha + k}} + \beta (x - x_0)^{\frac{\alpha + 1}{\alpha + k}} + \ldots,$$

où g_{00} désigne la valeur que prend g_0 au point analytique $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-2)})$ que l'on peut d'ailleurs toujours choisir de façon que g_{00} ne soit pas nul.

Mais si, au contraire, $y^{(n-1)} = \eta$ est une intégrale première de l'équation

différentielle (1), l'une des valeurs correspondantes ζ de $y^{(n)}$ est nécessairement égale à σ; si alors le nombre entier positif k, qui figure dans le développement (3), est plus petit que le nombre entier α qui figure dans ce même développement, on a, pour $(y^{(n-1)} - \eta_1)$, un développement de la forme

$$\text{(III)} \quad y^{(n-1)} - \eta_1 = \left[\frac{\alpha - k}{\alpha} g_{00}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha - k}} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha - k}} + \zeta (x - x_0)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha - k}} + \ldots,$$

en sorte que $y^{(n-1)} = \eta_1$ est une *intégrale singulière* de l'équation différentielle (1); si le nombre entier positif k est plus grand que $\alpha - 1$, le développement de $(y^{(n-1)} - \eta_1)$, suivant les puissances de $x - x_0$, se réduit à

$$\text{(IV)} \qquad y^{(n-1)} - \eta_1 = 0,$$

en sorte que $y^{(n-1)} = \eta_1$ est une *intégrale particulière* de l'équation différentielle (1). Rien n'empêche d'ailleurs cette intégrale particulière d'être aussi parfois intégrale singulière de l'équation (1).

Dans une seconde Partie de son Mémoire, M. Hamburger montre comment on peut parvenir aux mêmes résultats, en prenant comme point de départ, non plus l'équation différentielle (1) elle-même, mais un système complet d'intégrales premières de cette équation différentielle.

Leiss (*C.*). — Sur la représentation objective des sections des surfaces radiantes. (178-179).

Fuchs (*L.*). — Remarques relatives à la théorie des équations différentielles associées. (182-195).

Soit

$$\text{(A)} \qquad y^{(4)} + p_1 y^{(3)} + p_2 y^{(2)} + p_3 y' + p_4 y = 0$$

une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, à coefficients p_1, p_2, p_3, p_4, fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

Désignons par y_1, y_2, y_3, y_4 un système fondamental de solutions de l'équation (A) et posons

$$u_1 = y_1 y_2' - y_2 y_1', \qquad u_2 = y_1 y_3' - y_3 y_1', \qquad u_3 = y_1 y_4' - y_4 y_1',$$
$$u_4 = y_2 y_3' - y_3 y_2', \qquad u_5 = y_2 y_4' - y_4 y_2', \qquad u_6 = y_3 y_4' - y_4 y_3',$$

on sait que u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 satisfont à une équation différentielle linéaire homogène du 6e ordre

$$\text{(B)} \qquad u^{(6)} + P_1 u^{(5)} + P_2 u^{(4)} + P_3 u^{(3)} + P_4 u^{(2)} + P_5 u' + P_6 u = 0;$$

c'est la seconde associée de l'équation (A). M. Fuchs établit des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que l'équation (B) soit *réductible* et montre qu'*en général* cette réductibilité consiste en ce que l'équation (B) a une intégrale commune avec une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients rationnels.

Dans le cas où l'équation différentielle

$$(A') \qquad z^{(4)} - q_1 z^{\cdot} - q_2 z^{\cdot\cdot} - q_3 z^{\cdot\cdot\cdot} - q_4 z = 0,$$

adjointe de l'équation (A), appartient à la *même classe* que (A), les conditions de réductibilité de l'équation (B) sont toujours vérifiées : la seconde associée de l'équation (A) admet comme solution une fonction dont la dérivée logarithmique est rationnelle.

Les quotients des solutions u de l'équation différentielle (B), par la racine carrée du déterminant principal de l'équation différentielle (A), vérifient une équation différentielle (C) qui appartient à la même classe que son adjointe. M. Fuchs donne une nouvelle démonstration de ce théorème qu'il avait déjà établi dans les *Sitzungsberichte* de 1888 (p. 1116), et cette nouvelle démonstration permet d'apercevoir plus nettement le mode de formation des coefficients de l'expression différentielle qui lie les solutions de l'équation différentielle (C) à celles de son adjointe.

Les mêmes théorèmes et les mêmes démonstrations s'étendent d'ailleurs sans aucune modification essentielle au cas où l'équation (A) est d'ordre $2n$ et où l'équation (B) est son $n^{\text{ième}}$ associée.

Frobenius (*G.*). — Sur la composition des caractères d'un groupe. (330-339).

M. Frobenius se propose d'établir des propriétés des *caractères* d'un groupe donné permettant de déduire, de *caractères* déjà connus, de nouveaux *caractères* de ce groupe. Parmi ces propriétés, celle qui est exprimée par le théorème suivant est des plus utiles pour l'objet qu'il a en vue :

Le produit de deux caractères d'un groupe peut être représenté par une fonction linéaire de tous les caractères de ce groupe; les coefficients de cette fonction linéaire sont des nombres *entiers positifs*.

Quelques exemples permettent ensuite de se rendre compte de l'utilité de ce théorème, ainsi que des applications que l'on peut faire des propriétés des caractères déjà établies par M. Frobenius dans de précédentes communications (Cf. *Sitzungsberichte*, 1898). M. Frobenius donne un Tableau des caractères du groupe symétrique de degré 6 dont les éléments sont les 720 permutations de 6 symboles donnés, et un Tableau des caractères du groupe alterné de degré 6 formé par les 360 permutations paires de ces 6 symboles. Il termine son Mémoire en envisageant les caractères des groupes *binaires* du tétraèdre, de l'octaèdre et de l'icosaèdre qui sont d'ordres 24, 48 et 120.

Planck (*M.*). — Sur les phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles (*suite*).

Après avoir introduit la notion de *rayonnement naturel*, M. Planck établit le principe de l'*augmentation de l'entropie*. Il donne une définition *électromagnétique* de la *température* et obtient à nouveau la loi, déjà établie par W. Wien, que l'on peut désigner sous le nom de *loi de la distribution de l'énergie dans un état de rayonnement stationnaire* (rayonnement du corps noir). Deux constantes qui figurent dans l'expression de l'entropie de rayonnement, jointes à la constante f de la gravitation universelle et à la constante qui donne la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, permettent de

définir des unités *naturelles* de longueur, de masse, de temps et de température, unités qui ne doivent pas leur origine, comme celles du système C.G.S., à des circonstances particulières et à nos besoins actuels. Les dimensions du globe terrestre, son mouvement actuel dans l'espace, la densité et les points de fusion et d'ébullition de l'eau n'y jouent aucun rôle; les unités *naturelles* conservent la même valeur sous la seule hypothèse que les lois de la gravitation universelle, de la propagation de la lumière dans le vide et les deux théorèmes fondamentaux de la Thermodynamique continuent à avoir lieu.

Frobenius (*G.*). — Sur la représentation des groupes finis par des substitutions linéaires (*suite*). (482-500).

Soit H un groupe fini formé de h éléments distincts $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Faisons correspondre à chacun de ces h éléments A_i une substitution linéaire homogène a_i de n variables, de façon que quand on a $A_i A_j = A_k$, on ait aussi $a_i a_j = a_k$. Les substitutions a_i forment alors un groupe holoédrique ou isomorphe méroédrique du groupe donné et l'on dit de ces substitutions qu'elles constituent une *représentation* du groupe envisagé H. On peut aussi entendre par a_1, a_2, ..., les matrices des substitutions; $a_i a_j$ désignera alors la matrice *composée* des matières a_i et a_j.

D'une représentation donnée d'un groupe on peut en déduire une nouvelle en introduisant d'autres variables dans les substitutions a_i; on obtient des représentations du groupe H que l'on désigne sous le nom de *représentations équivalentes*. On peut envisager les représentations équivalentes comme ne constituant qu'une seule représentation du groupe.

Au moyen de plusieurs représentations d'un groupe on peut en obtenir de nouvelles par *composition*. Toute représentation équivalente à une représentation que l'on peut obtenir par composition est dite *inprimitive* ou *réductible;* les représentations *primitives* ou *irréductibles* sont celles qui ne sont équivalentes à aucune représentation obtenue par composition. Chaque représentation d'un groupe se compose d'ailleurs d'une seule manière au moyen des représentations primitives de ce groupe.

A chaque *caractère* d'un groupe fini correspond une et une seule *représentation primitive* de ce groupe. Pour évaluer les coefficients des substitutions qui constituent cette représentation primitive, *il suffit de connaître une seule solution d'un système déterminé d'équations linéaires et quadratiques.*

1899. deuxième semestre.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité des équations fonctionnelles algébriques et des équations différentielles linéaires. (672-676).

Les coefficients des équations envisagées sont supposés développables en séries convergentes dans des domaines déterminés. Parmi les nombreux théorèmes concernant l'irréductibilité des équations envisagées par M. Kœnigsberger, théorèmes qui constituent une extension de théorèmes analogues qu'il avait

déjà établis pour des équations algébriques, nous citerons ici le suivant qui, pour $\rho = 1$, se réduit à une proposition due à M. G. Floquet (*Annales de l'École Normale*, 1879).

Une équation différentielle linéaire de la forme

$$(x-\alpha)^{\rho+1} P_0(x-\alpha) y^{(n)} + (x-\alpha)^{\rho+\mu_1} P_1(x-\alpha) y^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ (x-\alpha)^{\rho+\mu_{n-1}} P_{n-1}(x-\alpha) y' + P_n(x-\alpha) y = 0,$$

dans laquelle $P_0(x-\alpha)$, $P_1(x-\alpha)$, ..., $P_{n-1}(x-\alpha)$, $P_n(x-\alpha)$ désignent des séries entières en $(x-\alpha)$ ayant chacune une valeur différente de zéro pour $x-\alpha=0$, et μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} des nombres plus grands ou égaux à 1, ρ un nombre entier positif quelconque, est *irréductible*, en ce sens qu'elle n'a aucune intégrale commune avec quelque équation linéaire d'ordre inférieur dont les coefficients soient développables en séries entières en $(x-\alpha)$.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité des équations différentielles algébriques. (783-807).

Les résultats concernant l'*irréductibilité* des équations différentielles linéaires, donnés par M. Kœnigsberger dans une Communication précédente, sont étendus à des équations différentielles algébriques non linéaires. Parmi les propositions obtenues par M. Kœnigsberger, signalons la suivante :

Une équation différentielle algébrique homogène, d'ordre n, qui, envisagée comme une équation algébrique en $y^{(n)}$, est irréductible, et qui est de la forme

$$P_0(x-\alpha) y + (x-\alpha)^2 P_1(x-\alpha) y' + (x-\alpha)^3 P_2(x-\alpha) y'' + \ldots$$
$$+ (x-\alpha)^n P_{n-1}(x-\alpha) y^{(n-1)}$$
$$+ (x-\alpha)^{n+1} P_n(x-\alpha) y^{(n)} + P_{00}(x-\alpha) y^2$$
$$+ P_{01}(x-\alpha) y y' + \ldots + P_{n-1,n}(x-\alpha) y^{(n-1)} y^{(n)} + \ldots = 0,$$

où $P_0(x-\alpha)$, $P_1(x-\alpha)$, ..., $P_n(x-\alpha)$ sont des séries entières en $(x-\alpha)$ ayant chacune une valeur différente de zéro pour $x-\alpha=0$, et où $P_{00}(x-\alpha)$, $P_{01}(x-\alpha)$, ..., $P_{n-1,n}(x-\alpha)$, ... sont des séries en $(x-\alpha)$ ne contenant chacune qu'un nombre *fini* de puissances négatives de $(x-\alpha)$, est *irréductible*, en ce sens qu'elle ne peut être réduite à une équation différentielle algébrique du même type et d'ordre moindre dans laquelle la dérivée d'ordre le plus élevé figure effectivement dans un terme de dimension 1 par rapport aux dérivées, comme c'est le cas pour l'équation du $n^{\text{ième}}$ ordre envisagée.

1900; premier semestre.

Fuchs (*L.*). — Sur un genre particulier de courbes rationnelles admettant des points doubles imaginaires. (74-78).

On peut se proposer de déterminer une fonction rationnelle

$$z = F(t)$$

de la variable indépendante t qui satisfasse aux conditions suivantes :

I. La valeur de $F(t)$ ne doit être infinie que pour des valeurs finies non réelles de t, qui, dans le plan représentatif de la variable complexe t, soient figurées par des points situés du même côté de l'axe réel.

II. Dans le plan représentatif de z, le lieu (C) des points z qui correspondent aux valeurs réelles de t, doit passer par un nombre fini de points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ fixées à l'avance.

III. A aucun point z de la courbe (C) ne doivent correspondre deux solutions, distinctes ou confondues, réelles t de l'équation $z = F(t)$.

M. Fuchs communique quelques-uns des résultats auxquels il est parvenu en étudiant ce problème dans le cas où l'on choisit pour infinis de la fonction $F(t)$, n points $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ fixés arbitrairement du même côté de l'axe réel des t, et où l'on fixe arbitrairement, sur l'axe réel des t, n points distincts $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ correspondant aux valeurs données $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Si l'on désigne par $f(x)$ le produit

$$f(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_n),$$

par $g(x)$ le produit

$$g(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n),$$

par $f'(x)$ et $g'(x)$ les dérivées de $f(x)$ et de $g(x)$ prises par rapport à x, et par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les expressions

$$c_h = -\frac{g(\rho_h)}{f'(\rho_h)}\left[\frac{f(\beta_1)}{g'(\beta_1)}\,\frac{z_1}{\beta_1 - \rho_h} + \frac{f(\beta_2)}{g'(\beta_2)}\,\frac{z_2}{\beta_2 - \rho_h} + \ldots + \frac{f(\beta_n)}{g'(\beta_n)}\,\frac{z_n}{\beta_n - \rho_h}\right]$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n),$$

on voit aisément que la fonction

$$F(t) = \frac{c_1}{t - \rho_1} + \frac{c_2}{t - \rho_2} + \ldots + \frac{c_n}{t - \rho_n}$$

vérifie les conditions I et II; M. Fuchs *démontre* qu'elle vérifie aussi la condition III.

Kötter (*F.*). — Sur les cas d'intégrabilité des équations différentielles du mouvement d'un solide rigide dans un fluide, découverts par Stekloff et Liapounoff. (79-87).

Le fluide est supposé incompressible, sans frottement, et les conditions initiales sont supposées quelconques. Le problème du mouvement d'un solide rigide dans un tel fluide se ramène à des quadratures dans les deux cas envisagés par MM. Stekloff et Liapounoff. M. Kötter montre comment, dans ces deux cas, on peut entièrement résoudre le problème, quelles que soient les conditions initiales, en suivant la même marche que celle qui a permis à M. H. Weber de donner, mais seulement dans l'hypothèse de conditions initiales particulières, la solution complète du cas découvert par Clebsch.

Dans les deux cas d'intégrabilité de Liapounoff et de Stekloff la solution ne diffère que par la valeur de certaines constantes; on peut donc se borner à effectuer les transformations analytiques dans l'un de ces deux cas seulement; M. Kötter montre comment on parvient, dans le cas d'intégrabilité de Stekloff, aux formules qui fournissent les expressions, en fonction de t, des éléments du mouvement.

Les formules ainsi obtenues rentrent d'ailleurs dans un type général déjà envisagé par M. Kötter.

Il convient de remarquer que les expressions, en fonction de t, des composantes de la vitesse angulaire de rotation du solide rigide, suivant les trois axes du trièdre trirectangle fixe dans l'espace, sont presque entièrement de la même forme que les expressions, en fonction de t, des coordonnées, par rapport aux mêmes axes fixes dans l'espace, du centre de masse du solide rigide.

Krause (*M.*). — Sur une classe d'équations différentielles du second ordre, intégrables au moyen des fonctions elliptiques. (258-268).

M. Krause envisage celles des équations de Picard, du second ordre, que l'on a désignées sous le nom de *paires;* deux intégrales φ_1, φ_2, linéairement indépendantes d'une quelconque de ces équations sont de la forme

$$\varphi_1 = \prod \frac{\mathfrak{Z}_1(v - a_r)}{\mathfrak{Z}_1(v)} e^{\lambda v},$$

$$\varphi_2 = \prod \frac{\mathfrak{Z}_1(v - a_r)}{\mathfrak{Z}_1(v)} e^{-\lambda v},$$

où les nombres a_r sont distincts des nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, où les nombres a_r^2 sont inégaux et où λ a une valeur déterminée (τ désigne le rapport $\frac{2\omega_3}{2\omega_1}$ des périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ des fonctions elliptiques formées au moyen des fonctions $\mathfrak{Z}$ envisagées).

On peut se demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle de Picard rentre dans ce type particulier. Si l'on pose

$$u = 2\omega_1 v, \qquad z = \operatorname{sn}^2 u,$$

$$\alpha = 2\omega_1 a, \qquad t = \operatorname{sn}^2 \alpha,$$

et

$$\varphi(u, \alpha) = \frac{\mathfrak{Z}_1(v - a)}{\mathfrak{Z}_1(v)} e^{v \frac{\mathfrak{Z}_1' a}{\mathfrak{Z}_1 a}},$$

il est aisé de voir que l'on a

$$\varphi(u, \alpha) = \sqrt{z - t}\, e^{\frac{1}{2} j \sqrt{R(t)}},$$

où

$$j = \int \frac{dz}{(z - t)\sqrt{R(z)}}.$$

$R(z)$ désignant le polynome du troisième degré

$$R(z) = z(1-z)(1-k^2 z),$$

dans lequel k^2 est le module correspondant au rapport $\tau = \frac{2\omega_3}{2\omega_1}$ des périodes envisagées $2\omega_1$, $2\omega_3$. On en conclut que la fonction

$$\varphi_1(u) = \prod_{(r)} \varphi(u, \alpha_r)$$

peut être mise sous la forme

$$\varphi_1(u) = \sqrt{G(z)}\, e^{lJ},$$

où

$$J = \int \frac{F(z)}{G(z)\sqrt{R(z)}}\, dz.$$

$F(z)$ et $G(z)$ désignant des fonctions rationnelles *entières* de z dont la première est de degré inférieur à la seconde; et où, pour chaque indice r, on a

$$2l = \frac{G'(t_r)}{F(t_r)}\sqrt{R(t_r)}.$$

t_r désignant le nombre $\mathrm{sn}^2(2\omega_1 \alpha_r)$. Les racines de l'équation $G(z) = 0$ sont inégales et distinctes des racines de l'équation $F(z) = 0$; on exclut ici les cas où quelqu'une des racines de l'équation $F(z) = 0$ serait égale à 0, 1 ou $\frac{1}{k^2}$, l'étude directe de ces cas ne présentant aucune difficulté.

Il suffit de remplacer l par $-l$ dans l'expression de $\varphi_1(u)$ pour obtenir l'expression de $\varphi_2(u)$ définie par la formule

$$\varphi_2(u) = \prod_{(r)} \varphi(u, -\alpha_r).$$

Si l'on désigne par Z_1, Z_2 les fonctions de z dans lesquelles se transforment $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ par la substitution $z = \mathrm{sn}^2 u$, le problème posé plus haut revient à celui-ci :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle linéaire du second ordre admette les deux intégrales Z_1 et Z_2.

Cette dernière façon de poser le problème est celle de Fuchs dans ses recherches de 1876-1878 publiées dans les *Nachrichten de Gœttingue* et dans le Tome IX de la 2e série des *Annali di Matematica*.

M. Krause résout d'abord le problème sous cette seconde forme; il transforme ensuite les résultats obtenus et montre que, sous les restrictions que comporte le problème, pour qu'une équation différentielle du second ordre de Picard soit *paire, il faut et il suffit* que cette équation soit de la forme

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + q_1 \frac{d\varphi}{du} = q_2 \varphi;$$

et que la fonction

$$\prod_{(r)} \frac{\mathfrak{z}_1(v-a_r)\,\mathfrak{z}_1(v-a_r)}{\mathfrak{z}_1(v)},$$

qui est, comme on sait, une fonction rationnelle entière F de $\operatorname{sn}^2 u$, vérifie l'équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$\frac{d^3F}{du^3} - 3q_1\frac{d^2F}{du^2} - \left(2q_1^2 - \frac{dq_1}{du} - 4q_2\right)\frac{dF}{du} = 2\left(2q_1q_2 + \frac{dq_2}{du}\right)F.$$

Dans ces équations q_1 et q_2 désignent des fonctions *déterminées* de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

M. Krause intègre ensuite, dans un cas particulier, l'équation précédente. Il établit, dans ce cas particulier où les calculs sont entièrement effectués, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle du troisième ordre admette comme intégrale une fonction rationnelle entière de z (dont le degré vérifie d'ailleurs une condition d'inégalité).

Gordan. — Démonstration du théorème de la transcendance du nombre π. (355).

Cette Communication n'est pas publiée.

Landsberg (*G.*). — Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (296-302).

Les principes qui ont guidé Dedekind et Henri Weber dans l'étude (*Journal de Crelle*, t. 92) des fonctions algébriques d'une variable, peuvent être étendus à l'étude des fonctions algébriques de deux variables.

Si

$$F(x, y, z) = a_0(x, y)z^n + a_1(x, y)z^{n-1} + \ldots + a_n(x, y)$$

désigne un polynome *irréductible* de degré l en x, m en y, n en z, et si l'on suppose que l'on ait

$$F(x, y, z) = 0,$$

toute fonction rationnelle u de x, y, z pourra être envisagée comme une fonction algébrique des deux variables x, y et vérifiera une équation algébrique de degré n en u,

$$u^n + b_1(x, y)u^{n-1} + \ldots + b_{n-1}(x, y)u + b_n(x, y) = 0,$$

où $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$, ..., $b_n(x, y)$ sont des fonctions rationnelles déterminées de x, y, et dont le premier membre, s'il n'est irréductible, est une puissance d'une fonction irréductible.

Si l'on désigne par Ω le *corps* formé par l'ensemble des fonctions algébriques u de x, y, toute fonction entière de Ω peut être décomposée d'une et d'une seule manière en diviseurs premiers. A chacun de ces diviseurs premiers p correspond une fonction irréductible déterminée $P(x, y)$ qui est divisible par p; suivant que $P(x, y)$ n'est divisible que par la première

puissance de p ou qu'il est divisible par une puissance plus élevée de p, on rangera p dans un premier groupe qui jouera ici le rôle que joue dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable l'ensemble des points ordinaires de la surface de Riemann sur laquelle on représente la fonction algébrique d'une variable, ou dans un second groupe qui jouera ici le rôle que joue dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable l'ensemble des points de ramification de la surface de Riemann.

En utilisant les propriétés fondamentales des formes de plusieurs variables établies par Kronecker, M. Landsberg étudie les ramifications, les singularités des fonctions algébriques de deux variables ainsi que les nombres qui restent *invariants* dans toutes les transformations birationnelles. Le polygone des points doubles de Dedekind-Weber (*Journal de Crelle*, t. 92, p. 181) est ici, dans la théorie des fonctions algébriques de *deux* variables, remplacé par un *diviseur* θ de la *courbe double* que M. Landsberg définit d'une façon précise et dont il montre la dépendance des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ du premier membre F de l'équation $F = 0$ qui définit la fonction algébrique z de x, y.

Frobenius (G.). — Sur les caractères du groupe symétrique. (516-534).

Les $n!$ permutations de n symboles forment un groupe, le groupe *symétrique* de ces symboles. On peut déterminer les *caractères* de ce groupe symétrique en choisissant convenablement, dans ce groupe, autant de sous-groupes qu'il y a de caractères et en évaluant certains nombres N que ces sous-groupes caractérisent et qui se trouvent être des fonctions linéaires à coefficients entiers des *caractères* cherchés; si k est le nombre des caractères du groupe, chaque caractère a, comme on sait, k valeurs : le système des k nombres N que l'on évalue au moyen de k sous-groupes du groupe symétrique envisagé, est *divisible* par le *module* formé par les k^2 valeurs des k *caractères* du groupe symétrique.

Pour déduire des fonctions linéaires, à coefficients entiers, des caractères cherchés, qui sont égales aux nombres N, les k caractères eux-mêmes, on utilise les relations bilinéaires auxquelles satisfont, comme on sait, ces caractères. Dans ses calculs, M. Frobenius introduit, sous le nom de *caractéristique d'un caractère*, deux systèmes de r nombres chacun qui caractérisent ce caractère. En fait, un caractère est déterminé par n nombres positifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (l'un d'eux peut être nul) ayant pour somme $\frac{1}{2}n(n+1)$; si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ désignent les n nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, rangés dans un ordre convenable, on peut représenter par

$$n-1-a_{r+1},\quad n-1-a_{r+2},\quad \ldots,\quad n-1-a_n$$

ceux des nombres $n-1-a_1$, $n-1-a_2$, ..., $n-1-a_n$ qui figurent parmi les n nombres $k_1, k_2, \ldots, k_n$; on représentera par

$$n+b_1,\quad n+b_2,\quad \ldots,\quad n+b_r$$

les nombres $k_1, k_2, \ldots, k_n$ qui ne sont pas compris dans la suite $n-1-a_1$, $n-1-a_2$, ..., $n-1-a_n$ et qui sont donc plus grands que $n-1$: la *carac-*

téristique du caractère envisagé est alors formée par les $2r$ nombres

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_r \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_r \end{pmatrix}.$$

L'évaluation des caractères de *rang un* est particulièrement aisée : parmi ces caractères il convient de signaler celui qui appartient à chaque groupe de substitution doublement transitif.

Soient S le groupe symétrique, A le groupe alterné de degré n; si T est une permutation impaire quelconque, on peut envisager S comme formé par l'ensemble du complexe A contenant ses $\frac{1}{2}n!$ paires et du complexe $AT = TA$ contenant ses $\frac{1}{2}n!$ permutations impaires; les deux complexes A et $AT = TA$ forment un groupe $\frac{S}{A}$ d'ordre 2 qui a deux caractères $(1, 1)$ et $(1, -1)$; le groupe S a donc un caractère $\chi^{(1)}$ dont la valeur est $+1$ pour les éléments du groupe A et -1 pour les éléments du groupe AT. Si l'on multiplie un quelconque des caractères $\chi^{(k)}$ de S par ce caractère $\chi^{(1)}$ on obtient un autre caractère $\chi^{(\lambda)}$ de S. Deux caractères $\chi^{(k)}$, $\chi^{(\lambda)}$ pour lesquels on a

$$\chi^{(k)} = \chi^{(\lambda)}\chi^{(1)}$$

et

$$\chi^{(\lambda)} = \chi^{(k)}\chi^{(1)}$$

sont dits *associés*.

M. Frobenius se propose d'évaluer les caractères du groupe symétrique S de n éléments, qui sont leurs propres associés. Le nombre de ces caractères est égal au nombre de représentations de n par une somme de nombres impairs tous distincts.

M. Frobenius s'attache ensuite à quelques cas particuliers où certaines valeurs des caractères sont assez faciles à évaluer.

Si les substitutions de la classe ρ sont formées de s cycles et si s est plus petit que r (nombre des a et des b dans la *caractéristique* du *caractère* $\chi^{(k)}$), on a

$$\chi_\rho^{(k)} = 0.$$

M. Frobenius apprend à évaluer $\chi_\rho^{(k)}$ quand $s = r$. Il apprend aussi à évaluer $\chi_\rho^{(k)}$ dans le cas où les permutations de la classe ρ sont formées d'un cycle de c symboles et de $n - c$ cycles chacun d'un seul symbole.

1900; deuxième semestre.

Helmert (*F.-R.*). — Sur la détermination de petites parties de la surface du géoïde, au moyen des écarts du fil à plomb, en tenant compte de sa courbure. (964-982).

La forme affectée par la surface des océans diffère de celle de l'ellipsoïde de révolution aplati aux pôles qui sert de surface de référence (E) pour les

mesures géodésiques. L'écart entre la direction que prend le fil à plomb aux différents points de la Terre et la direction qu'il prendrait si la Terre était l'ellipsoïde de référence (E), permet de déterminer la forme qu'affecterait la surface des mers prolongée à travers les continents. On appelle *géoïde* cette surface; on ne saurait, actuellement du moins, la représenter analytiquement; il faut se contenter d'en étudier certaines parties déterminées expérimentalement. C'est ce que fait M. Helmert en s'aidant de quadratures mécaniques.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur une généralisation du potentiel newtonien. (1150-1158).

Le potentiel newtonien V d'une masse distribuée sur une surface, vérifie, comme on sait, en chacun des points de cette surface, la relation différentielle

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} = -4\pi\sigma,$$

n_i et n_e désignant les deux demi-normales menées à la surface en un point de densité σ. Dans l'hypothèse où la loi de W. Weber remplace la loi de Newton, le potentiel W est de la forme

$$W = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{k^2}\right),$$

où

$$r' = \frac{dr}{dt}.$$

Le potentiel W d'une masse distribuée sur une surface vérifie une relation analogue à la précédente; M. Kœnigsberger montre qu'elle est de la forme

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial n_i'}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial n_e} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial n_e'}\right) = -4\pi\sigma\left(1 + \frac{n'^2}{k^2}\right),$$

où n_i et n_e désignent les deux demi-normales menées à la surface en un point de densité σ; n une quelconque de ces deux demi-normales et où les accents sont réservés aux dérivées prises par rapport à t, en sorte que n' est la vitesse d'un mobile qui serait attiré par la surface sur laquelle est distribuée la masse, lorsque ce mobile s'en écarte normalement.

M. Kœnigsberger étudie ensuite le potentiel wébérien W d'une masse distribuée sur un corps ayant trois dimensions; en s'appuyant sur la relation différentielle précédente et sur plusieurs formules déjà établies dans des Communications précédentes, en particulier sur les formules qui, dans le cas de la loi d'attraction de W. Weber, remplacent les formules de Laplace et de Poisson dans le cas de la loi d'attraction de Newton, il parvient à plusieurs résultats intéressants concernant la continuité du potentiel wébérien dans l'espace.

1901; premier semestre.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (34-48).

Envisageons une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

dont les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ soient des fonctions univoques et partout déterminées de la variable complexe z dans un domaine (T). A *tout* contour U parcouru par z dans (T) appartient une équation fondamentale, de degré n,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega, & \alpha_{21}, & \ldots, & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12}, & \alpha_{22} - \omega, & \ldots, & \alpha_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots \\ \alpha_{1n}, & \alpha_{2n}, & \ldots, & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

et si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ sont les ν racines, d'ordres de multiplicité $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ de cette équation fondamentale, on sait qu'il existe un système fondamental de solutions de l'équation différentielle dans lequel les λ_k éléments de ce système qui correspondent à la racine ω_k d'ordre de multiplicité λ_k sont distribués en *groupes* contenant respectivement $\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots, \mu_{k_z}$ éléments tels que les éléments y_1, y_2, y_μ faisant partie d'un *même groupe* G satisfont à des relations de la forme

$$\overline{y_1} = \omega y_1, \quad \overline{y_2} = \omega y_2 - y_1, \quad \ldots, \quad \overline{y_\mu} = \omega y_\mu - y_{\mu-1},$$

quand on a parcouru le contour U.

Pour établir la forme analytique des solutions de l'équation différentielle linéaire envisagée, on s'est borné jusqu'ici à envisager le cas où le contour U embrasse *un seul* des points de discontinuité $z = a$ des coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'équation différentielle. On sait que, dans ce cas, les éléments $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ faisant partie d'un même groupe G s'expriment aux environs du point singulier a par des expressions de la forme

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & y_\mu = f(t), \\ & y_{\mu-1} = \frac{1}{\mu-1} \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \\ & y_{\mu-2} = \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y_1 = \frac{1}{(\mu-1)!} \frac{\partial^{\mu-1} f(t)}{\partial t^{\mu-1}}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a écrit t pour $\frac{1}{2i\pi} \log(z-a)$, et où $f(t)$ est le produit de

$$(z-a)^{\frac{1}{2i\pi} \log \omega}$$

par une somme

$$\text{(II)} \quad \psi_{\mu-1} + \binom{\mu-1}{1} \psi_{\mu-2} t + \binom{\mu-1}{2} \psi_{\mu-3} t^2 + \ldots + \psi_0 t^{\mu-1},$$

dans laquelle $\psi_{\mu-1}, \psi_{\mu-2}, \ldots, \psi_0$ sont des fonctions univoques de z aux environs du point a.

2me Partie.

Mais dans les problèmes dans lesquels on se propose d'approfondir la nature du groupe de substitutions appartenant à l'équation différentielle, il importerait de connaître aussi la forme analytique par laquelle s'expriment les solutions de l'équation différentielle linéaire qui constituent les éléments d'un même groupe G, dans le cas général où le contour U est *quelconque* dans (T). M. Fuchs montre que cette forme analytique est toujours du type (I). Si, pour un contour U, tous les groupes G ne sont pas formés chacun par un seul élément, et si l'on désigne par η_1 l'élément d'un groupe G qui se reproduit multiplié par la racine ω de l'équation fondamentale quand z a parcouru le contour U, si enfin η_2 est le second élément de ce groupe G qui se transforme en

$$\overline{\eta_2} = \omega\eta_2 + \eta_1,$$

quand z a parcouru le contour U, la quantité t qui figure dans l'expression analytique (I) représente ici l'expression

$$\frac{1}{2i\pi}\log\left[\frac{\eta_2}{\eta_1}e^{2i\pi\sigma}\right],$$

et la fonction $f(t)$ qui figure dans cette même expression (I) désigne ici le produit de

$$\left[\frac{\eta_2}{\eta_1}e^{2i\pi\sigma}\right]^{\frac{1}{2i\pi}\log\omega}$$

par une somme du type (II) dans laquelle $\psi_{q-1}, \psi_{q-2}, \ldots, \psi_0$ ne changent pas quand z a parcouru le contour U. Dans le cas exclu où tous les groupes G sont formés d'*un* élément, la solution est immédiate.

M. Fuchs dit de l'ensemble des relations (I) correspondant aux divers groupes G qu'il constitue la *solution canonique* de l'équation différentielle envisagée, pour le contour U.

Les résultats obtenus permettent d'établir un théorème important dans le cas où un système fondamental $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de l'équation différentielle envisagée satisfait à un nombre fini de relations homogènes à coefficients constants. Soient

$$\varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_\rho(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0$$

ces relations. M. Fuchs montre que si l'on *exclut* certaines formes déterminées des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ qu'il caractérise d'ailleurs complètement, les éléments de chaque système fondamental dont l'ensemble constitue la solution canonique de l'équation différentielle envisagée pour un contour déterminé U, arbitrairement fixé dans le domaine (T), sont simplement multipliés chacun par une constante (racine de l'équation fondamentale) quand z a parcouru U.

De ce théorème fondamental découlent plusieurs conséquences élégantes auxquelles on parvient aisément en particularisant les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$. On rencontre, en particulier, le cas où les quotients $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}$ des n racines de l'équation fondamentale appartenant au contour U sont des racines de l'unité.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur l'équation de Poisson généralisée. (118-120).

M. Kœnigsberger montre que, quelle que soit la direction de la vitesse v d'un mobile attiré par une masse distribuée sur une surface suivant la loi de W. Weber et s'écartant de cette surface, le potentiel W vérifie la relation

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial n_i'}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial n_e} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial n_e'}\right) = -4\pi\sigma\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

dans laquelle n_i et n_e désignent les deux demi-normales menées à la surface en un point de densité σ et n' la dérivée $\frac{dn}{dt}$. C'est une généralisation d'un théorème déjà établi dans une Communication précédente dans le cas où la vitesse du mobile est égale à n'.

Frobenius (*G.*). — Sur les caractères des groupes alternés. (303-315).

Si le groupe symétrique a u paires de caractères associés distincts et v caractères qui soient chacun son propre associé, le nombre des caractères du groupe symétrique est $2u + v$; le groupe alterné contenu dans ce groupe symétrique a alors $u + 2v$ caractères dont u sont chacun son propre conjugué et dont les $2v$ autres se partagent en paires de caractères distincts conjugués. Chacune des u paires de caractères associés du groupe symétrique donne, en effet, naissance à un caractère u du groupe alterné qui est son propre conjugué, tandis que chacun des v caractères du groupe symétrique qui est son propre associé se ramifie dans le groupe alterné en deux caractères conjugués distincts.

Pour $n = 4, 5, 7$ on a $v = 1$; pour $n = 4$ et $n = 5$, M. Frobenius a déjà donné des Tableaux renfermant tous les caractères des groupes alternés et symétriques. Pour $n = 8$ on a $v = 2$, $u = 10$. Dans ce dernier cas, M. Frobenius forme les caractères du groupe symétrique, puis ceux du groupe alterné. Il démontre ensuite, par induction, une règle qui permet, quel que soit n, de déterminer les caractères du groupe alterné par un procédé analogue à celui qu'il a appliqué quand $n = 8$.

Helmert (*F.-R.*). — Sur la composante normale de la pesanteur au niveau de la mer. (328-336).

La formule qui donne la variation de cette composante γ_0 quand on se déplace sur la surface du globe est établie par M. Helmert en tenant compte des observations faites dans les dernières années; elle convient aussi bien aux observations faites à l'intérieur des continents qu'à celles faites le long d'un littoral, à très peu près. Si φ est la latitude d'un lieu, on a en ce lieu, en prenant le centimètre pour unité,

$$\gamma_0 = 978,046[1 + 0,005302\sin^2\varphi - 0,000007\sin^2 2\varphi],$$

l'aplatissement terrestre étant égal à

$$\frac{1}{298,3}.$$

Les valeurs calculées par cette formule doivent d'ailleurs fort vraisemblablement subir une correction de $-0,015$.

Planck (*M.*). — Sur les phénomènes de rayonnement qui sont irréversibles. (544-545).

De la définition de l'entropie électromagnétique donnée par M. Planck dans ses Communications précédentes, il résultait que la loi de distribution de l'énergie de Wien est vérifiée pour toutes les températures et toutes les longueurs d'onde. Des expériences récentes ont mis en évidence qu'il n'en est pas ainsi; il est donc certain que la définition de l'entropie électromagnétique doit être généralisée. C'est à cette généralisation qu'est consacrée la Note de M. Planck; la nouvelle expression par laquelle il définit maintenant l'entropie se réduit d'ailleurs à l'ancienne dans le cas de petites longueurs d'onde ou de basses températures, cas où la loi de distribution de l'énergie de Wien est vérifiée. Cette nouvelle expression jouit encore de la propriété fondamentale d'augmenter toujours de valeur dans tous les phénomènes de rayonnement envisagés; elle fournit de plus (ce que ne fait pas l'ancienne), pour un état de rayonnement stationnaire, une distribution d'énergie qui concorde complètement avec celle qui résulte de toutes les mesures effectuées jusqu'ici.

1901; deuxième semestre.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes résolubles. (849-857).

Si, f et g désignant deux nombres premiers relatifs quelconques, un groupe H d'ordre fg contient un sous-groupe d'ordre f dont deux éléments quelconques ne sont pas conjugués par rapport à H, le groupe H contiendra aussi un et un seul sous-groupe caractéristique d'ordre g. Plus généralement, si un groupe H d'ordre fg contient un sous-groupe F d'ordre f dont deux éléments quelconques ne sont pas conjugués par rapport à H, les éléments de F élevés à la puissance g forment un groupe A d'ordre a, et si B est le groupe des éléments de F dont la puissance g est égale à l'élément-unité E, le groupe H contient un sous-groupe invariant dont font partie tous les éléments de H dont l'ordre est premier relatif à a et qui a, avec le groupe F, le plus grand commun diviseur B.

M. Frobenius déduit du premier de ces deux théorèmes plusieurs conséquences remarquables. Supposons que p^λ soit la puissance la plus élevée du nombre premier p qui soit contenue dans l'ordre h d'un groupe H, et que P désigne un groupe d'ordre p^λ contenu dans H et tel que deux quelconques de ses éléments soient échangeables; désignons par $p^{\lambda_1}, p^{\lambda_2}, \ldots, p^{\lambda_m}$ les invariants de ce groupe P (on a $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$); appelons k_i, pour $i = 1, 2, \ldots, \lambda$, le nombre qui indique combien des $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont plus grands ou égaux à i (on a $\lambda = k_1 + k_2 + \ldots$); soit enfin k la plus grande des différences $k_1 - k_2$, $k_2 - k_3, \ldots$; si le nombre $g = \dfrac{h}{p^\lambda}$ est premier relatif au produit

$$(p-1)(p^2-1)\ldots(p^k-1),$$

le groupe H contient un et un seul sous-groupe (groupe caractéristique) d'ordre g; les éléments de ce sous-groupe sont ceux du groupe H dont l'ordre

n'est pas divisible par p. Ainsi lorsqu'un nombre naturel g est premier relatif à un nombre premier p et à $p-1$ tout groupe d'ordre pg contient un et un seul sous-groupe d'ordre g, et lorsqu'un nombre naturel g est premier relatif à un nombre premier p et à p^2-1, tout groupe d'ordre p^2g contient un et un seul sous-groupe d'ordre g.

Helmert (*F.-R.*). — Sur la détermination de petites parties du géoïde au moyen des écarts du fil à plomb en tenant compte de sa courbure. (958-975).

M. Helmert modifie les formules qu'il avait établies dans une précédente Communication, de façon à permettre d'en faire aisément usage dans la pratique; à cet effet, il fait intervenir dans ses formules la variation de g avec l'altitude du lieu, ainsi que le rapport de la densité moyenne de la région dans laquelle on opère, à la densité moyenne de la Terre.

M. Helmert aborde ensuite le problème de la réduction à une même latitude, de la composante de la déviation du fil à plomb, dirigée vers le sud-est, qui a été observée à diverses latitudes.

Kœnigsberger (*L.*). — Les principes de la Mécanique dans le cas de plusieurs variables indépendantes. (1092-1111).

Dans des Communications précédentes, M. Kœnigsberger avait déjà abordé l'étude du mouvement d'un ensemble de points matériels admettant un potentiel cinétique quelconque du second ordre, dans lequel on ne peut distinguer l'énergie potentielle et l'énergie actuelle comme on le fait dans les Cours classiques de Mécanique rationnelle pour le potentiel cinétique $-T-U$, où T désigne l'énergie cinétique et U la fonction des forces intérieures. En cela il n'avait fait que suivre Helmholtz. Il avait ensuite étendu ses recherches au cas où le potentiel cinétique est d'un ordre *quelconque* ν; mais toujours les mouvements étaient supposés ne dépendre finalement que d'une seule variable indépendante, à l'aide de laquelle on peut mesurer, si l'on veut, le temps écoulé pendant le mouvement; cette variable t figurait donc seule, outre les paramètres dont dépend la position de l'ensemble dans l'espace et les dérivées de ces paramètres, pris par rapport à t, d'ordres inférieurs ou égaux à ν, dans l'expression du potentiel cinétique de l'ensemble.

Il s'agit maintenant d'aborder le problème du mouvement d'un ensemble dans le cas bien plus complexe où le potentiel cinétique dépend d'un nombre quelconque k de variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, d'un nombre quelconque μ de paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et des dérivées partielles de ces paramètres prises par rapport à ces variables indépendantes, d'ordres au plus égaux à un nombre quelconque arbitrairement fixé ν. M. Kœnigsberger se contente d'énoncer les théorèmes auxquels il est parvenu, dans le cas où $k=2$ et $\nu=1$. Les équations de d'Alembert (principe de d'Alembert), d'Hamilton (principe d'Hamilton) et de Lagrange, ainsi que les équations classiques du second ordre auxquelles on réserve généralement le nom d'*équations différentielles de la Mécanique*, sont étendues à ce cas plus général que ceux envisagés jusqu'ici et la même méthode permet de les étendre à tous les cas. Le principe de la conservation de la force vive, celui de la moindre action, les théorèmes généraux des aires et du mouvement du centre de masses sont eux aussi étendus au cas

général envisagé par M. Kœnigsberger. Enfin les équations de Lagrange généralisées sont transformées, comme on le fait en Mécanique rationnelle, en un système d'équations canoniques qui fournissent une généralisation des équations canoniques d'Hamilton et l'on obtient de même une équation aux dérivées partielles du second ordre, généralisation de celle d'Hamilton-Jacobi.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes résolubles. (1216-1230).

Supposons que deux quelconques des éléments conjugués d'un groupe H d'ordre gn, faisant partie d'un sous-groupe G d'ordre $g = rm$, soient déjà conjugués par rapport à ce sous-groupe G; M. Frobenius démontre que, dans ce cas, la puissance n de chacun des caractères linéaires de G est un caractère linéaire de H. Soit r l'ordre et m l'indice du groupe commutateur R de ce sous-groupe G. Si m et n sont premiers relatifs, les éléments du groupe commutateur du groupe H et ceux des éléments de H dont l'ordre est un diviseur de n, constituent un sous-groupe caractéristique S de H dont l'ordre s est divisible par r et par n et dont l'indice est divisible par m. Si g et n sont premiers relatifs, on a

$$s = rn = \frac{h}{m},$$

et le groupe commutatif $\frac{H}{G}$ est isomorphe du groupe $\frac{G}{R}$.

Parmi les corollaires que l'on peut déduire de ce théorème citons celui-ci :

Tout groupe H *d'ordre* $p^2 n$ *contient un sous-groupe invariant d'ordre* n *lorsque* n *est premier relatif à* p *et à* $p^2 - 1$. *Si* H *contient un groupe linéaire d'ordre* p^3 *il faut toutefois que* n *soit, en outre, premier relatif à* $p^2 + p - 1$.

Si un groupe transitif de degré n ne contient *aucune* substitution (sauf la substitution identique) laissant invariables deux symboles du groupe, les $n - 1$ substitutions qui déplacent *tous* les symboles, jointes à la substitution identique, constituent un sous-groupe caractéristique du groupe transitif envisagé.

Si le groupe G d'ordre g est contenu dans le groupe H d'ordre gn, et s'il est conjugué dans H avec n groupes distincts dont deux quelconques soient premiers relatifs, le groupe H contient un et un seul sous-groupe (caractéristique) d'ordre n; ce sous-groupe est constitué par tous les éléments de H dont l'ordre divise n.

Voigt (*W.*). — Sur une extension de la théorie de l'élasticité. (1266-1269).

Les quantités que l'on suppose généralement, dans la théorie de l'élasticité, proportionnelles aux forces données sont ici supposées représentées par des séries entières qui, réduites à leur premier terme, coïncident avec les expressions usuelles. Des expériences récentes de MM. Kohlrausch et Grüneisen sur la flexion des tiges semblent légitimer cette extension de la théorie de l'élasticité qui devient même nécessaire lorsqu'on se propose de rattacher les faits signalés par MM. Kohlrausch et Grüneisen à une théorie générale, au lieu de

se contenter de chercher à établir des formules rendant compte de ces faits et suffisant aux besoins de la pratique.

Frobenius (G.). — Sur les groupes résolubles. (1324-1330).

Soit p^λ la puissance la plus élevée d'un nombre premier p qui soit contenue dans l'ordre h d'un groupe H, et soit P un groupe d'ordre p^λ contenu dans H. Lorsque, soit un élément, soit un sous-groupe de P est échangeable avec p^β éléments de P et avec ap^β éléments de H, a est premier relatif à p. D'autre part, deux éléments ou deux sous-groupes de P conjugués par rapport à H sont aussi conjugués par rapport à P. En s'appuyant sur ces deux propositions, M. Frobenius démontre que *si tout élément de* H *dont l'ordre divise* $\frac{h}{p^\lambda}$ *et qui est échangeable avec un sous-groupe dont l'ordre divise* p^λ, *est aussi échangeable avec chaque élément de ce sous-groupe,* H *a nécessairement un sous-groupe caractéristique d'ordre* $\frac{h}{p^\lambda}$. Ce sous-groupe caractéristique est formé par tous les éléments de H dont l'ordre n'est pas divisible par p.

Comme application, M. Frobenius démontre le théorème dû à M. Burnside, d'après lequel si p, q, r désignent trois nombres premiers distincts, tout groupe d'ordre

$$h = p^\alpha q^\beta r^\gamma$$

est résoluble.

Lorsque $\lambda = 4$ et que P n'est ni un groupe linéaire d'ordre p^4, ni un groupe non commutatif mais contenant un groupe linéaire d'ordre p^3, les hypothèses sous lesquelles le théorème de M. Frobenius s'applique, sont toujours vérifiées quand $\frac{h}{p^4}$ est premier relatif à $p^2 - 1$.

1902; premier semestre.

Fuchs (L.). — Sur des bornes entre lesquelles certaines intégrales définies conservent leurs signes. (4-10).

Soit

$$F(u, u', \ldots, u^{(n)})$$

une forme quadratique d'une fonction réelle inconnue u d'une variable réelle x et des dérivées u', u'', ..., $u^{(n)}$ d'ordres 1, 2, ..., n de cette fonction u, prises par rapport à x; les coefficients de F sont supposés des fonctions réelles données de la variable x; on convient de n'envisager que des fonctions u régulières aux environs d'un point réel donné $x = a$. On demande de déterminer, à partir de a, un intervalle réel $(a, \ldots, b)$ tel que, pour chacune des fonctions u que l'on envisage, le signe de l'intégrale

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx$$

reste le même pour toutes les valeurs de x situées dans cet intervalle, ou,

d'une façon plus précise, pour toutes les valeurs de x vérifiant les inégalités

$$a < x < b.$$

M. Fuchs apprend à déterminer pratiquement b dans le cas particulier où les coefficients de la forme quadratique F sont des *constantes* réelles.

Schur (*J.*). — Sur un théorème de la théorie des matrices échangeables. (120-125).

M. J. Schur donne une nouvelle démonstration du théorème de M. Frobenius d'après lequel si $f(x, y, \ldots)$ désigne une fonction rationnelle entière de m variables $x, y, \ldots$ et A, B, ...; m formes dont deux quelconques soient échangeables; si, de plus, $a_1, a_2, \ldots$ sont les racines de l'équation caractéristique de A; $b_1, b_2, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique de B; $c_1, c_2, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique de C, etc.; on peut se faire correspondre ces racines, et cela indépendamment du choix du polynome f, de façon que les racines de l'équation caractéristique de la forme $f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots)$ soient respectivement égales à

$$f(a_1, b_1, c_1, \ldots), \quad f(a_2, b_2, c_2, \ldots), \quad f(a_3, b_3, c_3, \ldots), \quad \ldots.$$

Dans sa démonstration, M. Schur ne fait usage d'aucune décomposition en facteurs des formes A, B, C, ... envisagées.

Helmert (*F.-R.*). — Détermination de l'intensité de la pesanteur sur l'océan Atlantique, due au Dr Hecker. (126-128).

Entre Lisbonne et Bahia, dès qu'en s'éloignant des côtes on a atteint une profondeur sensible, l'intensité de la pesanteur observée par le Dr Hecker sur l'Océan coïncide partout, avec une grande approximation, avec celle que l'on obtient par le calcul en faisant usage des formules établies par M. Helmert en 1901 pour les continents, supposées réduites au niveau de la mer. L'hypothèse de Pratt sur la distribution isostatique des masses de la croûte terrestre est ainsi confirmée. On sait que déjà les mesures effectuées par Nansen pendant son célèbre voyage dans les régions polaires étaient sensiblement conformes à l'hypothèse de Pratt.

Dans les baies peu profondes, le long même du littoral, il y a quelques anomalies, mais on a déjà entrepris de les expliquer et, en tout cas, elles ne sauraient infirmer les conclusions précédentes.

Schlesinger (*L.*). — Sur un problème de la théorie des équations différentielles linéaires posé par Riemann. (283-290).

Dans le plan de la variable complexe x envisageons σ points $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$; traçons des coupures $(a_1 \ldots \infty), (a_2 \ldots \infty), \ldots, (a_\sigma \ldots \infty)$ joignant ces points au point ∞ du plan. On demande de déterminer un système de fonctions monogènes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la variable x qui soient univoques, finies et continues, sauf aux points $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma, \infty$; qui subissent des substitutions linéaires homogènes unimodulaires données $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\sigma$ lorsque x a parcouru des contours fermés traversant dans le sens positif les coupures $(a_1 \ldots \infty)$,

$(a_2 \ldots \infty)$, ..., $(a_\sigma \ldots \infty)$, et qui ne soient pas indéterminées aux points a_1, a_2, ..., a_σ, ∞.

L'existence de ces fonctions, postulée par Riemann dans un fragment de ses Œuvres posthumes (Werke, édition 1892, p. 377-390), a été démontrée par M. Schlesinger qui a d'ailleurs étudié quelques-unes de leurs propriétés (*Comptes rendus*, 7 mars 1898; *Journal de Crelle*, t. 123, p. 138 et suivantes). Il suppose maintenant que a_1, a_2, ..., a_σ soient des *variables indépendantes*, tandis que les coefficients des substitutions A_1, A_2, ..., A_σ sont des constantes (indépendantes de ces variables) et recherche la façon dont les fonctions postulées par Riemann dépendent des variables a_1, a_2, ..., a_σ.

Adresse à Richard Dedekind à l'occasion du cinquantième anniversaire de son Doctorat. (329-331).

Frobenius (*G.*). — Sur certains groupes de degré p ou $p+1$. (351-369).

Dans ce Mémoire, M. Frobenius démontre les deux théorèmes que voici :

I. Théorème de Sylow. — *Il n'y a que quatre groupes transitifs dont le degré soit un nombre premier p et qui contiennent les $p+1$ sous-groupes d'ordre p; ce sont les groupes alterné et symétrique de degré* 5 *dont les ordres sont égaux à* 60 *et à* 120, *et les deux groupes simples de degré* 7 *et* 11 *dont les ordres sont égaux à* 168 *et à* 660.

II. *Si p est un nombre premier différent de* 7, *il n'y a pas plus d'un groupe transitif de degré $p+1$ et d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Il y a deux groupes transitifs de degré* 8 *et d'ordre* 168.

Le théorème I se déduit aisément du théorème II.

Parmi les corollaires du théorème II, M. Frobenius mentionne plusieurs propositions intéressantes. Ainsi si p est un nombre premier plus grand que 3, il y a un et un seul groupe simple d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Si p est un nombre premier quelconque, il n'y a pas plus d'un groupe transitif de degré $p+1$ et d'ordre $p(p^2-1)$.

M. Frobenius montre aussi que, plus généralement, si p est un nombre premier de la forme $4k+1$ et si q est premier relatif à p, un groupe d'ordre $(p+1)pq$ ne peut contenir $p+1$ sous-groupes d'ordre p que quand q est divisible par $\frac{1}{2}(p-1)$. Enfin il communique quelques résultats obtenus, dans le cas où le nombre premier p est de la forme $4k+3$, pour les groupes transitifs de degré $p+1$ et d'ordre $(p+1)pq$ qui contiennent $p+1$ groupes d'ordre p.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes primitifs de degré n et de classe $n-1$. (455-459).

I. Lorsqu'un groupe H ne contient aucune substitution, autre que la substi-

tution identique, laissant invariables deux symboles de ce groupe, les $n-1$ substitutions qui déplacent *tous* les symboles du groupe, jointes à la substitution identique, forment un sous-groupe caractéristique d'ordre n. Si l'ordre du groupe H est gn, ce groupe contient n groupes conjugués G d'ordre g. Un de ces groupes G contient toutes les substitutions de H qui laissent invariable un symbole déterminé choisi parmi n symboles conjugués. Chacun des autres symboles est conjugué à gn autres symboles et est changé par toute substitution de H autre que la substitution identique.

Quand n est plus grand que 1, les composantes transitives de H sont toutes *isomorphes* (simplement isomorphes) de H et sont donc d'ordre gn. L'une d'elles est de degré n et de classe $n-1$. Chacune des autres forme un groupe régulier de degré gn.

II. Envisageons un groupe H d'ordre gn contenant n groupes conjugués distincts G d'ordre g dont deux quelconques soient premiers relatifs, et par suite un sous-groupe caractéristique R d'ordre n. Supposons que H contienne un sous-groupe H' d'ordre $g'n'$, où g', supposé plus grand que 1, soit un diviseur de g, et où n' soit un diviseur de n. On démontre qu'alors H' contient n' groupes conjugués distincts G' d'ordre g' dont deux quelconques sont premiers relatifs, et un groupe caractéristique R' d'ordre n'. Chacun de ces groupes G' est le plus grand commun diviseur de H' et d'un groupe déterminé G, le groupe R' est le plus grand commun diviseur de H' et de R. Chacun des groupes d'ordre g' par lesquels H est divisible est contenu dans *un* et *un seul* des n groupes G.

III. *Un groupe transitif* H, *de degré* n, *de classe* $n-1$, *ne peut être primitif que quand* n *est une puissance d'un nombre premier et que le sous-groupe* R *d'ordre* n *contenu dans* H *est élémentaire.*

Si ces conditions sont vérifiées, H est primitif et n'est primitif que si R est un sous-groupe invariant minimé de H.

1902; deuxième semestre.

Prix de cinq mille marks proposé par l'Académie. (799-800).

Les Mémoires peuvent être écrits en français; ils doivent être parvenus au Bureau de l'Académie avant le 31 décembre 1905.

On demande de réaliser des progrès notables dans les parties essentielles de la théorie des fonctions de plusieurs variables qui admettent des substitutions linéaires.

Helmert (*F.-R.*). — Sur la réduction à un même niveau de la valeur de l'accélération de la pesanteur observée sur la surface physique de la Terre. (843-855).

M. Helmert n'est pas d'avis de prendre, comme l'a fait M. Marcel Brillouin, pour surface de réduction une surface de niveau passant à 10^{km} environ au-

dessus du niveau de la mer. Le procédé le plus ancien, dit *de Bouguer* (qui n'a d'ailleurs, en fait, été introduit que par Young), convenablement interprété, fournit un procédé de réduction exact et permet d'obtenir, pour les constantes numériques des valeurs qui peuvent servir de fondement à une théorie mathématique de la figure de la Terre.

Adresse à l'Université de Christiania, à l'occasion des fêtes données lors du centième anniversaire de la naissance d'Abel. (1001-1002).

Schur (*I.*). — Nouvelle démonstration d'un théorème sur les groupes finis. (1013-1019).

Sans faire usage des *caractères* linéaires des groupes introduits par M. Frobenius, mais au moyen de considérations empruntées à la théorie générale des groupes, M. Schur donne une nouvelle démonstration du théorème de M. Frobenius que l'on trouve énoncé dans le compte rendu de la seconde des trois Communications faites par M. Frobenius sur les groupes résolubles, pendant le second semestre de 1901.

J. M.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série, Tome XIX; 1902 [1].

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions périodiques (8-61).

La première Partie de ce Mémoire contient la démonstration complète d'un théorème antérieurement énoncé par l'auteur (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 18 mars 1901) au sujet des fonctions entières dont les zéros admettent, relativement à chaque variable prise à part, la période $2i\pi$. Une fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est supposée entière par rapport aux n variables complexes x_p; on suppose en outre que le quotient de F par la fonction qu'on obtient quand on y change x_p ($p = 1, 2, \ldots, n$) en $x_p + 2i\pi$ est fini et différent de zéro pour chaque système de valeurs des variables et se réduit par conséquent à une fonction entière $\Phi(x_p)$ qui ne s'annule pas. Il s'agit de prouver que, si dans cette fonction $\Phi(x_p)$ on change x_p en $x_p + 2m_p i\pi$, la fonction se multiplie par une exponentielle de base e et d'exposant

$$m_n^p x_n + m_{n-1}^p x_{n-1} + \ldots + m_{p+1}^p x_{p+1},$$

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVII, p. 1.

ce qui est l'extension aux fonctions de n variables d'un résultat dû à M. Appell.

Dans la seconde Partie, l'auteur applique le théorème précédent aux fonctions méromorphes de n variables qui sont $(n+1)$ ou $(n+2)$ fois périodiques. Il expose d'abord comment on peut former une fonction méromorphe admettant $(n+1)$ systèmes de périodes absolument arbitraires. Abordant ensuite l'objet principal de son étude, il prouve que, *pour les fonctions* $(n+2)$ *fois périodiques de n variables, les systèmes de périodes ne peuvent pas être quelconques.* Soit, en effet, (T) le Tableau de $(n+2)$ lignes et de n colonnes formé par le système des $(n+2)$ systèmes de périodes conjuguées. On peut déduire de (T), en supprimant simultanément deux lignes, de toutes les manières possibles, des déterminants d'ordre n, au nombre de

$$C_{n+2}^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Entre ces déterminants il existe une relation linéaire et homogène, à coefficients non tous nuls, qui n'est pas une identité, et qui constitue une relation entre les périodes. Le cas le plus simple de ce théorème est celui des fonctions abéliennes de deux variables et l'on retrouve la relation ordinaire entre les périodes prises sous leur forme la plus générale.

Le Mémoire se termine par quelques indications sommaires sur les fonctions méromorphes $(n+q)$ fois périodiques de n variables $(q \leqq n)$ parmi lesquelles sont les fonctions abéliennes $(q = n)$.

Anissimoff (*W.*). — Complément au Mémoire *Sur la théorie des courbes géodésiques* (63-64).

L'auteur a reconnu que la distinction qu'il avait cru devoir établir entre les surfaces réelles (*Annales de l'École Normale*, 1901) n'est pas fondée.

Picard (*Em.*). — Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables (65-73).

M. Picard développe, en se bornant aux intégrales de première espèce, les résultats qu'il a énoncés dans deux Notes des *Comptes rendus* (18 novembre et 23 décembre 1901). Partant d'une surface de degré m,

$$f(x, y, z) = 0,$$

placée arbitrairement par rapport aux axes et ne présentant que les singularités ordinaires, on considère une intégrale double de première espèce

$$(1) \qquad \iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

relative à cette surface. Q désigne un polynome de degré $m-4$ en x, y, z s'annulant sur la courbe double de la surface. Si l'on envisage la courbe entre x et z, de genre p pour y arbitraire,

$$f(x, y, z) = 0,$$

les $2p$ périodes de l'intégrale simple

$$\int \frac{Q(x, \overline{y}, z)\, dx}{f'_z}$$

sont des fonctions de y satisfaisant à une équation différentielle linéaire (E) à coefficients rationnels dont les points critiques $b_1, b_2, \ldots, b_N$ correspondent aux N points simples où la surface, supposée de classe N, a son plan tangent parallèle au plan des zx. Quand y tourne autour du point b_i, *toute période de l'intégrale se reproduit à un terme additif près, de la forme*

$$m_i \Omega_i(y) \qquad (m_i \text{ entier}),$$

et l'on a identiquement

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

En vertu de cette identité la somme

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy$$

ne dépend pas de a. On peut se demander si *toute* expression de cette forme peut être envisagée, quand a lieu l'identité

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0,$$

comme une période de l'intégrale double (1). L'auteur prouve que la réponse à la question ainsi posée est *affirmative*.

Il montre ensuite que le nombre des périodes distinctes ainsi obtenues est au plus égal à $N - 2p$.

Picard (*Ém.*). — Sur les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle (75-78).

On sait que, pour les intégrales doubles de fonctions rationnelles, les périodes provenant d'un cycle à deux dimensions situé à distance finie et ne rencontrant pas la ligne singulière de la fonction, se ramènent à des résidus. Mais la question se pose de savoir si une pareille intégrale *peut avoir d'autres périodes que des résidus*. L'affirmative résulte d'un exemple relatif à la surface unicursale

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

c'est celui de l'intégrale de seconde espèce

$$\iint \frac{y\, dx\, dy}{z},$$

qui n'admet pas de résidu et qui possède effectivement deux périodes.

Picard (*Ém.*). — Sur le nombre des conditions exprimant que certaines intégrales doubles sont de seconde espèce (79-87).

M. Picard a montré antérieurement que toutes les intégrales doubles de seconde espèce relatives à une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

de degré m et sans autres singularités que les singularités ordinaires, se ramènent à une intégrale de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f_z},$$

P étant un polynome de degré limité qui s'annule tout le long de la courbe double, et qui doit satisfaire, en général, à $2\pi + m - 1$ conditions, π désignant le genre d'une section plane quelconque de la surface. L'objet du présent travail est de montrer que ce nombre est susceptible de réduction. L'auteur prouve de diverses manières que $m - 1$ de ces conditions *sont remplies d'elles-mêmes,* de sorte qu'il en reste seulement 2π.

Stouff. — Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite (89-118).

L'objet de ce travail est de démontrer deux théorèmes de M. Hermite.

Le premier, énoncé dans une lettre à Jacobi (*Journal de Crelle,* t. 40), consiste en ce que, dans une forme quadratique définie réduite, à coefficients quelconques, le produit des coefficients des carrés des indéterminées est inférieur au déterminant de la forme, multiplié par un coefficient numérique dépendant seulement du nombre des indéterminées.

Pour énoncer le second (*Journal de Crelle,* t. 47), M. Stouff introduit les formes qu'il appelle *réduites d'Hermite.* Considérant une forme quadratique

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

à n indéterminées, à coefficients quelconques, mais essentiellement positive, il dit que cette forme est une *réduite d'Hermite* si elle satisfait aux conditions suivantes : dans toutes les formes équivalentes à f, le coefficient de x_1^2 a une valeur au moins égale à celle qu'il a dans f; dans toutes les formes équivalentes à f et où le coefficient de x_1^2 est a_{11}, le coefficient de x_2^2 a une valeur au moins égale à a_{22}, et ainsi de suite. Il s'agit alors de prouver que, si

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-p}^2 - V_1^2 - \ldots - V_p^2$$

est une forme à coefficients *entiers* et de déterminant D ($D \neq 0$) et si

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-p}^2 - V_1^2 - \ldots - V_p^2$$

est une réduite d'Hermite, tous les coefficients de F ont des limites qui ne dépendent que de D.

Delassus (*Et.*). — Sur les systèmes articulés gauches (119-152).

Deuxième partie du Mémoire dont la publication a commencé dans les *Annales de l'École Normale* en 1900.

Padé (*H.*). — Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction (153-189).

Dans la première Partie de son Mémoire, l'auteur approfondit, en se plaçant au point de vue le plus général, la notion de *fraction rationnelle approchée*. Il obtient des caractères concernant l'ordre de l'approximation donnée par cette fraction et la somme des degrés de ses termes, qui permettent de reconnaître, de la façon la plus simple, les différents couples de nombres entiers positifs ou nuls auxquels elle correspond. L'exposition de cette première Partie est faite sous une forme aussi simple que naturelle et permet une généralisation immédiate. Elle est complétée par le calcul d'un exemple numérique où se rencontrent de nombreuses fractions approchées anormales.

Dans la deuxième Partie sont étudiées les lois de récurrence qui lient les termes des fractions rationnelles approchées et la formation des fractions continues holoïdes qui en découle immédiatement. On y trouve des exemples de fractions continues holoïdes tirés des exemples numériques calculés dans la première Partie.

La troisième Partie traite des rapports qui existent entre la théorie des fractions continues holoïdes et la théorie classique du développement en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes de la variable (développement *canonique*). Ces rapports, qu'il était nécessaire d'établir une fois pour toutes, s'aperçoivent aisément dans le cas de fractions approchées toutes normales. Leur discussion prépare la démonstration du théorème important par lequel M. Padé explique la présence, dans un développement canonique, d'un quotient incomplet de degré supérieur à l'unité : cette élévation de degré correspond à l'existence d'une fraction rationnelle approchée anormale et est liée à la loi de distribution des fractions rationnelles approchées.

A propos de cette étude, l'auteur a rattaché les belles recherches de Stieltjes à la théorie des fractions continues holoïdes et indiqué l'interprétation que reçoivent, quand on se place à ce point de vue, les résultats obtenus par Stieltjes.

« A ce point de vue, dit-il, le Mémoire de Stieltjes apparaît comme la plus profonde tentative qui ait été faite jusqu'ici pour obtenir la définition d'une fonction au moyen d'un système de fractions rationnelles approchées, défini *a priori* par l'une de ses fractions continues holoïdes, et se rattache complètement aux vues que j'ai brièvement indiquées dans un Mémoire paru, en 1893, dans le t. XVIII des *Acta mathematica* et ayant pour titre : *Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles*. Depuis ce Mémoire, des tentatives remarquables ont été faites dans d'autres directions pour arriver à une utilisation, dans le calcul, des séries divergentes; je demeure néanmoins dans la conviction qu'une nouvelle étude des méthodes de Stieltjes, *faite en se plaçant au point de vue de la théorie des fractions continues holoïdes*, reste encore la voie la meilleure à suivre pour parvenir au but désiré. »

Le Mémoire se termine par quelques réflexions sur la question de la généralisation des fractions continues algébriques, dont un essai de M. Hermite a montré les difficultés, et sur les conséquences que les résultats obtenus par l'auteur pourraient avoir dans la théorie des nombres.

Stekloff (*W.*). — Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique (191-259, 455-490).

Avant d'analyser ce Mémoire, il convient d'énoncer trois conditions auxquelles l'auteur se réfère constamment, pour les surfaces fermées (S) qui interviennent dans ses énoncés :

Condition I. — En tout point de (S) il existe un plan tangent déterminé.

Condition II. — Autour de chaque point P de (S) on peut décrire une sphère de rayon D assez petit mais déterminé, de telle façon qu'une parallèle à la normale à (S) en P ne puisse rencontrer (S), à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point.

Condition III. — L'angle aigu $\mathfrak{S}$, que font les normales à (S) en deux points P et P′ de (S) satisfait à la condition

$$\mathfrak{S} < ar^{\alpha},$$

a et $\alpha \leqq 1$ étant des nombres ne dépendant pas du choix des points P et P′, r étant la distance PP′.

Le premier Chapitre traite de l'existence des fonctions fondamentales de M. Poincaré, du problème de la distribution de l'électricité, du problème hydrodynamique, des problèmes de Dirichlet et de Gauss. Désignant par f une fonction des coordonnées rectangulaires (x, y, z) continue sur (S), par λ un paramètre, M. Stekloff se propose d'abord de *trouver un potentiel de simple couche répandue sur* (S), *satisfaisant sur* (S) *à la condition*

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial n} - 2f.$$

Il pose à cet effet

$$V = V_1 + \lambda V_2 + \lambda^2 V_3 + \ldots + \lambda^k V_{k+1} + \ldots$$

et démontre que cette série converge absolument et uniformément sur (S) pour toutes les valeurs de λ dont le module est plus petit que l'unité, quelle que soit la fonction f, si la surface (S) satisfait aux conditions 1, 2 et 3.

Il examine ensuite le cas particulier $\alpha = 1$ et, s'aidant de certains résultats dus à M. Zaremba, parvient à démontrer que les fonctions V_k sont les fonctions fondamentales de M. Poincaré, dont l'existence est ainsi établie (indépendamment de la transformation de M. Poincaré) pour toute surface (S) satisfaisant *seulement* aux trois conditions 1, 2 et 3 (pour $\alpha = 1$).

Entre autres conséquences de son analyse, l'auteur établit le théorème suivant :

La méthode de G. Robin résout le problème de la distribution de l'électricité pour toute surface (S) *satisfaisant aux conditions* 1, 2 et 3 (*pour* $\alpha = 1$).

Les méthodes de C. Neumann et de G. Robin pour résoudre le problème hydrodynamique s'appliquent à toute surface (S) *satisfaisant aux trois mêmes conditions, quelle que soit la fonction continue* f *à laquelle doit se réduire sur* (S) *la dérivée normale de la fonction harmonique cherchée.*

Dans le second Chapitre sont étudiés à l'aide des résultats précédents divers

problèmes de physique mathématique qui se rattachent au problème hydrodynamique (problème de Neumann), en premier lieu le problème des températures stationnaires : Trouver une fonction v des coordonnées rectangulaires x, y, z continue avec ses dérivées des deux premiers ordres à l'intérieur de la surface donnée (S) et satisfaisant aux conditions

$$\Delta v + \varphi = 0 \qquad \text{à l'intérieur de (S)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0 \qquad \text{sur (S)},$$

φ étant une fonction donnée, continue et admettant des dérivées premières à l'intérieur de (S), h étant une constante positive différente de zéro.

Passant ensuite au problème du refroidissement d'un corps solide homogène, l'auteur retrouve, en les généralisant, les théorèmes énoncés pour la première fois par M. Poincaré et que M. Zaremba avait étendus à des surfaces satisfaisant à des conditions assez générales.

Dans les paragraphes suivants on démontre, en toute rigueur, l'existence de certaines fonctions discontinues, analogues à la fonction de Green, qui interviennent utilement dans le développement des fonctions arbitraires en série procédant suivant les fonctions V_n qui fournissent la solution du problème précédent. Une application de ce mode de développement donne le potentiel des vitesses dans le problème du mouvement vibratoire d'une masse gazeuse enfermée dans un vase solide.

Au Chapitre III, l'auteur revient sur la théorie des fonctions fondamentales pour donner une nouvelle extension aux résultats obtenus dans cette théorie par lui-même, par M. Poincaré, puis par MM. Ed. Le Roy et Zaremba. Sans employer aucune transformation, il démontre l'existence des fonctions fondamentales de M. Le Roy *pour toute surface* (S) *satisfaisant aux conditions* 1, 2 *et* 3, *quel que soit le nombre* α, *inférieur ou égal à l'unité.*

Suivent quelques applications au potentiel de simples couches attirant suivant une loi fonction quelconque de la distance et en particulier au problème de Dirichlet. M. Stekloff fait observer en terminant qu'on obtient ainsi une autre solution de ce problème, conformément aux idées de Lamé, par une série procédant suivant des fonctions de Laplace.

Alezais (*R.*). — Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent. (261-323).

Ce travail est le résumé d'un Mémoire étendu que l'auteur a présenté à la Faculté des Sciences de Paris comme thèse de Doctorat et dont il a été rendu compte dans la première Partie du *Bulletin* (t. XXVI$_2$, p. 127).

Bianchi (*L.*). — Sur les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une sphère. (325-334).

Après avoir rappelé le lien qui rapproche les deux théories de la déformation des surfaces et des congruences de cercles normaux à une série de surfaces (systèmes cycliques) l'auteur considère en particulier les systèmes cycliques dont les plans enveloppent une sphère, pour étudier les relations des surfaces à

courbure totale constante avec ces systèmes, dont chaque exemple connu fournirait une surface *à courbure totale nulle* dans l'espace courbe à trois dimensions que définit l'élément linéaire

$$ds^2 = a^2(du^2 + \sin^2 a\, dv^2) + dw^2 \qquad (a = \text{const.})$$

Quand les plans des cercles d'un système cyclique enveloppent une sphère de rayon a, les axes de ces cercles forment une congruence de normales et les surfaces (Σ) orthogonales à ces axes ont même image de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante. Elles satisfont à une équation de la forme

$$(1) \qquad \rho_1\rho_2 - (p - a)(\rho_1 + \rho_2) + 2q + b = 0$$

(notations de Weingarten). De chaque surface (Σ) dérive par quadratures, d'après la méthode de Weingarten, une surface admettant l'élément linéaire harmonique

$$ds^2 = A\,\frac{u - v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(1-u)^4} - \frac{v\,dv^2}{(1-v)^4}\right] \qquad (A = \text{const.}),$$

de la quadrique imaginaire

$$x^2 - 2z^2 - 2xy + 2ixz - 2iyz = A,$$

qui est *osculée* par le cercle imaginaire de l'infini.

De toute surface (S) à courbure constante K, *dont on connaît les lignes géodésiques*, on peut déduire par quadratures, ainsi que le montre M. Bianchi, une triple infinité de surfaces (Σ) vérifiant l'équation (1) et ayant même image sphérique que (S), ce qui fait connaître les systèmes cycliques correspondants, dont les plans enveloppent une sphère. Ces cercles ne sont réels que quand la courbure K de (S) est négative. Lorsque la courbure K de (S) est positive, la détermination des surfaces (Σ) correspondantes résulte d'une construction géométrique donnée par Ribaucour.

On sait que quand on connaît, comme l'exige le problème précédent, non seulement les *coordonnées* d'une surface (S) à courbure totale constante K, mais aussi *ses lignes géodésiques*, on en déduit par la transformation de M. Bäcklund une autre surface (S′) ayant même courbure que (S) et dont les géodésiques peuvent être déterminées soit en termes finis, soit par une quadrature. M. Bianchi donne la raison géométrique de ce fait contenue dans l'énoncé que voici :

Prolongez géodésiquement sur (S) le rayon qui joint un point M au point correspondant M′, dans le sens de M vers M′; sur cette géodésique portez, à partir de M, un arc constant $MM_1 = \delta$ tel que l'on ait

$$\sin h\left(\frac{\delta}{R}\right) = \operatorname{cotg}\sigma \qquad \left(K = -\frac{1}{R^2}\right)$$

$R\cos\sigma$ étant la distance constante MM′. La surface (S′) sera applicable sur (S), de telle manière que chaque point M′ de S′ vienne coïncider avec le point correspondant M_1 de (S).

Ce résultat peut être mis sous la forme suivante :

Étant donné un habillement d'une surface à courbure constante, il en existe

une simple infinité d'autres pour chacun desquels chaque point se transporte sur la surface à une distance géodésique fixe, donnée arbitrairement à l'avance, de sa position primitive.

Le Vavasseur (*R.*). — Les groupes d'ordre p^2q^2, p étant un nombre premier plus grand que le nombre premier q. (335-355).

Hürwitz (*A.*). — Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. (357-408).

La théorie générale des courbes et des surfaces, envisagée au point de vue de l'Analyse, revient à l'étude des fonctions arbitraires. C'est pourquoi les séries de Fourier et les développements analogues interviennent tout naturellement dans cette théorie. Leur emploi a fourni à M. Hürwitz des résultats géométriques de nature à appeler l'attention sur un ordre de recherches qui semble devoir être fécond.

L'auteur place au début de son Mémoire un théorème fondamental que voici :

Étant données deux fonctions réelles $f(x)$ et $\varphi(x)$ bornées et intégrables dans l'intervalle de 0 *à* 2π, *limites comprises, on calcule les deux séries d'intégrales*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad a'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos kx\,dx, \qquad b'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx.$$

Si l'on forme à l'aide de ces deux séries d'intégrales la série

$$S = \frac{1}{2}a_0b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_kb_k + a'_kb'_k),$$

cette série est convergente et l'on a

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Pour rappeler comment les *constantes de Fourier* a_k et a'_k se déduisent de la fonction $f(x)$, M. Hürwitz écrit l'*équivalence*

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + a'_1\sin x) + (a_2\cos 2x + a'_2\sin 2x) + \ldots,$$

qui ne devient une égalité que quand la fonction $f(x)$ est développable en série de Fourier.

L'auteur considère d'abord une courbe plane fermée (C) admettant en chaque point une tangente et appelle u l'angle de cette tangente menée dans le sens direct de la courbe avec sa direction initiale. Les coordonnées rectangulaires des points de la courbe sont des fonctions continues et périodiques de u. On suppose qu'elles aient des dérivées finies et déterminées. Cela étant, la

courbe admet en chaque point un rayon de courbure ρ fini et déterminé. Si l'on suppose que ρ est une fonction bornée et intégrable de u, on aura l'équivalence

$$\rho \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_k \cos ku + a'_k \sin ku).$$

On voit immédiatement que la longueur L de la courbe est égale à πa_0. A l'aide du théorème fondamental, on trouve pour l'aire F l'expression

$$F = \frac{\pi}{4}\left(\frac{L^2}{\pi^2} - 2\sum_{k=2}^\infty \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k^2 - 1}\right),$$

qui montre que l'on a toujours

$$L^2 \geqq 4\pi F,$$

la signe d'égalité ne convenant qu'au cas où la courbe est un cercle. De plus, la quantité

$$\frac{L^2}{4\pi} - F$$

est un invariant par rapport au groupe des mouvements du plan et chacun des termes de la série qui l'exprime est aussi un invariant.

Passant ensuite à la considération de la développée, M. Hürwitz suppose que le rayon de courbure ρ considéré comme fonction de u admet une dérivée finie et intégrable. Quand le point P parcourt (C) dans le sens direct, le centre de courbure M parcourt la développée dans un sens déterminé, dont dépend le signe de l'aire E de cette développée supposée ne pas se couper elle-même. On trouve

$$E = -\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^\infty \frac{k^2}{k^2 - 1}(a_k^2 + a_k'^2);$$

ainsi l'aire de la développée est essentiellement négative (nulle seulement dans le cas du cercle). Donc, si la développée ne se coupe pas elle-même, le centre de courbure la parcourt dans le sens indirect quand le point P décrit (C) dans le sens direct. L'expression de E donne lieu à une inégalité remarquable

$$F + \frac{1}{4}|E| \leqq \frac{L^2}{4\pi}$$

qui complète l'inégalité

$$F \leqq \frac{L^2}{4\pi}$$

du théorème des isopérimètres. Cette nouvelle inégalité se change en égalité quand (C) est un cercle ou une courbe parallèle à l'astéroïde

$$x = c\cos^3 u, \qquad y = -c\sin^3 u.$$

Autre conséquence : *parmi les cercles osculateurs d'une courbe fermée convexe il y en a au moins un dont la circonférence est plus grande que le périmètre* L *de la courbe.*

Le paragraphe suivant traite, en particulier, de ce que M. Minkowski a appelé la *projection* d'une courbe convexe suivant la direction u; c'est la distance de deux tangentes parallèles correspondant respectivement aux angles u et $u+\pi$. Il est prouvé que la moyenne des carrés des projections ne peut être inférieure à $L^2 : \pi^2$. Si elle est égale à cette limite, *toutes les projections* de la courbe sont égales à $L : \pi$. Les courbes convexes pour lesquelles cette circonstance se présente ont toutes leurs normales doubles (normales en leurs deux extrémités). Elles sont parallèles à des courbes présentant un nombre impair de rebroussements : parmi elles, on peut citer les courbes convexes qui sont parallèles à l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Toute courbe fermée et rectifiable peut être représentée par des équations de la forme

$$x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ku - a'_k \sin ku),$$

$$y = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos ku - b'_k \sin ku),$$

le paramètre u, qui varie de 0 à 2π, étant proportionnel à l'arc de la courbe. Supposons que x et y, considérés comme fonctions de u, admettent des dérivées dans la direction des arcs croissants et que ces dérivées soient des fonctions intégrables. Alors les coefficients a_k, b_k, a'_k, b'_k sont des constantes caractéristiques : le point de coordonnées $\frac{1}{2} a_0$, $\frac{1}{2} b_0$ est le barycentre du périmètre de la courbe; le vecteur qui joint l'origine au point (a_k, b_k) ou au point (a'_k, b'_k), si $k \geqq 1$, est un invariant de la courbe par rapport aux mouvements du plan.

Si l'on suppose que les coordonnées x et y admettent des dérivées par rapport à l'arc jusqu'à un certain ordre n, les dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ étant continues, tandis que celles de l'ordre n sont au moins intégrables, on obtient diverses égalités ou inégalités, dont l'une des conséquences est que, *parmi les cercles osculateurs d'une courbe convexe fermée, il y en a au moins un dont la circonférence est plus petite que la longueur* L *de la courbe.*

Le Mémoire se termine par quelques indications sur l'extension des recherches précédentes aux surfaces; ici l'auteur se rencontre quelquefois avec M. Minkowski. Il considère des surfaces fermées divisant l'espace en deux parties (l'une intérieure, l'autre extérieure) et suppose qu'il y ait un point et un seul où la normale extérieure ait une direction donnée arbitrairement. Les cosinus directeurs ξ, η, ζ de cette normale s'introduisent d'eux-mêmes et avec eux les développements en fonctions sphériques. On arrive, en particulier, à ce résultat remarquable : *une surface de l'espèce considérée est parfaitement déterminée, à une translation près, quand la somme* $\rho_1 + \rho_2$ *des rayons de courbure principaux est donnée pour chaque direction de la normale;* en particulier, *si cette somme est constante, la surface est une sphère.*

L'aire O de la surface peut être exprimée au moyen des fonctions sphériques qui figurent dans le développement de p, distance de l'origine au plan tangent. On trouve ainsi, en désignant par M l'intégrale

$$\int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) d\sigma$$

2 me partie.

étendue à toute la surface, l'inégalité

$$M^2 \geqq 4\pi O,$$

qui ne devient une égalité que pour la sphère.

Nielsen (*Niels*). — Recherches sur les séries de factorielles. (409-453).

On n'avait point encore résolu le problème général qui consiste à trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de x soit développable en une série de la forme

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, b_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

ou *série de factorielles*. M. Nielsen y est parvenu en approfondissant les méthodes et les vues de Schlömilch, dans le Mémoire dont nous analysons successivement les cinq Chapitres.

I. Il est d'abord démontré que, si l'on fait abstraction des valeurs entières et non positives de x et y, l'expression

$$\frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$$

tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers zéro, vers une valeur finie ou vers l'infini, suivant que la différence $x-y$ a sa partie réelle $\mathcal{R}(x-y)$ positive, nulle ou négative (lemme fondamental).

L'auteur définit ensuite le champ de convergence de la série Ω comme la partie du plan où la série modifiée

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n!\, b_n}{\Gamma(x+n-1)}$$

est convergente; dans cette partie du plan, la fonction définie par la série $\Omega(x)$ ne peut avoir de points singuliers, sauf peut-être des pôles simples aux points 0, -1, -2, ... La limite du champ de convergence *absolue* de la série Ω est une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels, et le développement en série de factorielles n'est possible que d'une seule manière.

Ici sont données les trois conditions *nécessaires* pour la possibilité du développement en séries de factorielles, tirées de la considération de la *fonction génératrice* φ ainsi définie

$$\varphi(1-z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

et liée à Ω par l'équation

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(z) z^{x-1}\, dz.$$

II. Les trois conditions imposées à $\varphi(z)$ par la possibilité du développement

de $\Omega(x)$ sont démontrées suffisantes, et il en est fait diverses applications, notamment à certains résultats obtenus par Stirling ou par Schlömilch. L'auteur ne manque pas de faire remarquer que ses résultats, rigoureusement démontrés, confirment la divination de Schlömilch, suivant laquelle l'origine des séries de factorielles devait être cherchée dans les intégrales définies de la forme ci-dessus ou de la forme équivalente

$$\Omega(x) = \int_0^\infty f(t) e^{-tx}\, dt.$$

III. La forme même des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série de factorielles donne immédiatement la détermination du champ complet de convergence de la série obtenue : le champ de convergence (*absolue ou non*) est limité par une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels, conformément à un théorème, énoncé sans démonstration par M. Jensen.

Ces conditions permettent, en outre, d'étudier les propriétés générales des séries de factorielles : addition des arguments dans une série de factorielles, représentation des dérivées successives, généralisation d'une formule de Stirling. L'auteur discute la célèbre méthode de Stirling pour le développement en séries de factorielles des fonctions mises sous la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots$$

Cette méthode n'apprend rien sur le champ de convergence ni sur la légitimité du développement en factorielles. Il est curieux de savoir que, quand la série (α) est divergente, la fonction $F(x)$ qui lui a donné naissance peut néanmoins être développable en série de factorielles et que, dans ce cas, l'application de la méthode de Stirling, qui n'a plus qu'une signification *purement formelle*, fournit précisément la série de factorielles donnée par la méthode rigoureuse.

IV. Il est fait des applications particulières au développement de certaines fonctions remarquables : séries de Binet, séries de Schlömilch, etc.

V. Le dernier Chapitre traite de la multiplication de l'argument dans une série de factorielles, fondée sur les deux formules

$$\Omega\left(\frac{x}{a}\right) = \alpha \int_0^1 \varphi(z^\alpha) z^{x-1}\, dz = \alpha \int_0^\infty \varphi(e^{-\alpha t}) e^{-xt}\, dt,$$

où les intégrations doivent être effectuées le long de l'axe des nombres positifs.

Andoyer (*H.*). — Sur la forme doublement quadratique et ses rapports avec la théorie des fonctions elliptiques. (491-513).

« Les pages qui suivent, dit l'auteur, ont été écrites à l'occasion de conférences faites aux candidats à l'agrégation à la Sorbonne : on peut les considérer comme un commentaire du beau Chapitre consacré par Halphen à l'équation d'Euler, dans son *Traité des fonctions elliptiques* (t. II, Chap. IX); peut-être aussi pourra-t-on y trouver quelques points de vue nouveaux, en

raison du rôle prépondérant que nous attribuons à la considération des invariants de la forme doublement quadratique. »

M. Andoyer étudie la forme doublement quadratique binaire à deux couples de variables susceptibles de substitutions linéaires différentes et il constitue un système d'invariants et de covariants dont la connaissance permet, inversement, de déterminer la forme elle-même. Il est ainsi conduit à intégrer l'équation d'Euler, prise sous sa forme générale, et à résoudre le problème de l'inversion des intégrales elliptiques de la manière qui s'impose quand on ne veut introduire dans les calculs que des quantités invariantes ou covariantes.

Supplément.

Clairin (*J.*). — Sur les transformations de Bäcklund. (3-63).

Ce Mémoire, présenté comme Thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, a été analysé dans la première Partie du Bulletin (t. XXVI_2, p. 198).

L. R.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, fondé par J. LIOUVILLE et continué par C. JORDAN.

5e série, tome I; 1895 (1).

Maillet (*Ed.*). — Sur les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symétriques ou alternés. (5-34).

Introduction. — Soit T un sous-groupe d'ordre $\mathfrak{T}$ du groupe symétrique ou alterné S de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'ordre $\mathcal{S}$: supposons $\mathcal{S} > 2\mathfrak{T}$ et $n > 4$. Considérons un isomorphe S′ holoédrique et régulier de S (c'est-à-dire transitif et d'ordre égal à son degré) : au groupe T correspond une répartition des lettres de S′ en systèmes de non-primitivité $\mathfrak{T}$ à $\mathfrak{T}$, et le groupe G des substitutions opérées par S′ entre les systèmes de cette répartition est transitif, de degré $\rho = \frac{\mathcal{S}}{\mathfrak{T}}$ et holoédriquement isomorphe à S, le groupe T correspondant au groupe H des substitutions de G qui laissent une même lettre de G immobile.

Réciproquement, tout isomorphe holoédrique de S est de cette forme.

Dès lors, T étant donné, G se trouve complètement déterminé; nous disons que G est l'isomorphe de S issu de S et correspondant à T.

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 302.

Les groupes transitifs de ce genre ont été étudiés par MM. Kronecker, Jordan et Netto.

M. A. Bochert a montré que si T ne contient pas de substitution circulaire d'ordre 3, on a

$$\text{Pour le groupe symétrique....} \quad \rho = \left[E\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]!$$

$$\text{Pour le groupe alterné.....} \quad \rho = \frac{1}{2}\left\{\left[E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]!\right\}$$

$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n-1}{2}$.

Ce théorème nous a permis d'établir, au sujet des groupes G définis précédemment, quelques propriétés qui font l'objet de ce Mémoire et que l'on peut résumer ainsi :

G n'est qu'une fois transitif, il ne peut contenir de groupe de degré $< \rho$ transitif entre les lettres qu'il déplace, ou de substitution circulaire. Les exceptions n'ont lieu que pour $n \leqq 6$ quand S est le groupe symétrique, et pour $n \geqq 8$ quand S est le groupe alterné.

Jordan (*Camille*). — Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné. (35-60).

Parmi les résultats remarquables que M. Bochert a publiés (*Math. Annalen.* t. XXIX, XXXIII et XL) sur la théorie des substitutions figurent en particulier les suivants :

S'il existe un groupe t fois transitif, de degré n et de classe u, et ne contenant pas le groupe alterné, les trois nombres t, n, u satisfont (si $u > 3$) aux deux inégalités

$$(1) \qquad u \geqq \frac{n}{2} - 1,$$

$$(2) \qquad \log n \geqq a\sqrt{t \log t},$$

a désignant un facteur numérique qu'on peut prendre égal à $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\log 2}{8}}$ si $t \geqq 8$.

Le Mémoire de M. Jordan a pour but de montrer que l'inégalité (1), combinée avec les résultats de M. Sylow, permet d'établir entre n et t une relation de la forme (2), mais où le coefficient a est sensiblement réduit.

Après avoir établi (§ I) quelques résultats préliminaires, l'auteur cherche une limite inférieure de $n - t$. Il y a lieu, dans cette étude, de distinguer deux cas, qui sont traités séparément dans les Paragraphes II et III. On arrive ainsi au résultat suivant.

Soit k un entier arbitraire supérieur à 4 et inférieur à t; soit δ le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité

$$\delta < t - \frac{(t-k+1)\log 2}{t + \log 2}.$$

On aura l'une des deux inégalités

$$\log(n-t) \leq (k-3)\log 2 - \log k,$$

$$\log(n-t) \leq \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta)$$

en posant

$$\varphi(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12x}.$$

Dans le Paragraphe IV, l'auteur discute les inégalités précédentes pour déterminer l'entier k de la manière la plus avantageuse et parvient à la relation finale

$$\log(n-t) \geq a\sqrt{t\log t}$$

où le coefficient numérique a tend rapidement vers la valeur asymptotique $\log 2$ quand t augmente indéfiniment.

Andoyer. — Sur la division algébrique appliquée aux polynomes homogènes. (61-90).

Soient g et f deux formes binaires, des degrés n et p par rapport aux variables homogènes x_1 et x_2. Soient y_1 et y_2 un autre couple d'indéterminées, covariantes aux premières. On peut déterminer deux autres formes f et f_1 des degrés $n-p$ et $p-1$ par rapport aux variables x_1 et x_2 et telles que l'on ait identiquement

$$g + fq + (x_1y_2 - x_2y_1)^{n-p+1} f_1 = 0.$$

Cette opération, qui est possible d'une seule façon, est la généralisation naturelle de la division algébrique.

Avant d'en faire des applications, l'auteur établit une proposition importante sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que tous les déterminants d'ordre p tirés d'une matrice à p lignes et à $p+q$ colonnes soient nuls, indépendamment de toute hypothèse faite *a priori*.

Grâce à ce théorème, M. Andoyer parvient, en poursuivant sur les formes f et f_1 l'opération définie plus haut, à former une série de covariants simultanés des deux formes f et g, renfermant une ou deux séries de variables, dont l'évanouissement identique est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux formes f et g aient un nombre donné de facteurs linéaires communs : c'est la solution complète du problème de l'élimination, au point de vue de la théorie des formes.

En appliquant les résultats obtenus au cas particulier où les deux formes f et g sont les dérivées partielles d'une même forme, on résout le problème des racines égales, par la formation de covariants dont l'évanouissement identique exprime qu'une forme donnée admet un nombre donné de facteurs linéaires égaux ; ces covariants sont d'ailleurs analogues aux fonctions de Sturm et jouissent des mêmes propriétés.

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. (91-180).

On sait que l'équilibre d'un corps flottant sur un liquide pesant est assuré

lorsque le flotteur déplace un volume liquide aussi pesant que lui et que les deux centres de gravité du flotteur et du liquide déplacé sont sur une même verticale. Mais cet équilibre est-il stable? Cette question a fait l'objet de nombreux travaux sans recevoir de réponse décisive. Poisson et Duhamel ont énoncé cette condition : *le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre.* Leur démonstration a été rejetée par Clebsch pour des raisons qui semblent péremptoires.

Le travail de Clebsch est critiqué par M. Duhem : « La méthode suivie par Clebsch pour obtenir la condition de stabilité d'un corps flottant renferme un cercle vicieux... Clebsch ne forme pas la fonction qu'il désigne par $f(\sigma^2)$; en sorte que, bien qu'il affirme l'existence d'une distinction essentielle entre la règle de stabilité imaginée par Poisson et Duhamel et celle qu'il propose, on ne voit pas que cette distinction soit établie dans son Mémoire. Un calcul complet lui aurait prouvé que cette distinction n'est qu'apparente.

» Pour éviter l'objection que l'on peut adresser à la méthode de Clebsch, une seule voie se présente : elle consiste à faire usage du principe si rigoureusement démontré par Lejeune-Dirichlet, et à chercher les conditions de stabilité du système en cherchant à rendre minimum le potentiel des actions auxquelles il est soumis. »

C'est ce qu'a fait M. Guyou dans sa *Théorie du navire.* M. Duhem critique le raisonnement de M. Guyou et, en fin de discussion, conclut que les conditions de stabilité d'un corps flottant sont loin encore d'être établies d'une manière rigoureuse, même dans le cas simple où le fluide et le flotteur sont soumis seulement à l'action de la pesanteur.

M. Duhem s'est proposé de traiter le cas plus général, inabordé jusqu'ici, où le fluide et le flotteur sont soumis à des forces extérieures admettant une fonction potentielle quelconque.

Considérant comme acquis l'énoncé de Dirichlet, aux termes duquel tout état où le potentiel d'un système a une valeur minima est un état d'équilibre stable, il se demande si la réciproque est vraie. Bien que cette réciproque, généralement admise à titre de postulat, ne paraisse pas démontrable dans l'état actuel de la Mécanique, M. Duhem la fait dépendre, *pour les systèmes dépourvus de frottement et de viscosité,* de cet autre postulat qu'il considère comme s'imposant plus facilement à l'esprit :

Un état d'équilibre stable d'un système ne peut cesser d'être stable parce qu'on introduit dans le système de nouvelles liaisons indépendantes du temps.

Après cette introduction, l'auteur consacre un premier Chapitre à la stabilité de l'équilibre des liquides qui ne portent pas de flotteur. Un deuxième Chapitre traite des conditions d'équilibre des corps flottants.

C'est au troisième Chapitre que l'auteur aborde l'étude générale de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. A cet effet, il opère le long développement de la variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système de fluides qui renferme un flotteur et en conclut : 1° deux conditions qui sont *nécessaires* pour la stabilité de l'équilibre; 2° deux conditions qui assurent cette stabilité, mais dont l'une peut n'être pas nécessaire.

Dans le cas particulier où les deux fluides qui portent le flotteur confinent par une surface illimitée, M. Duhem résout complètement le problème de la stabilité.

Examinant ensuite le cas des fluides homogènes pesants, il retrouve la condition posée par Poisson et Duhamel. En conséquence :

Pour que l'équilibre d'un corps solide pesant, qui flotte sur la surface de

séparation, limitée ou illimitée, de deux fluides homogènes pesants, soit un équilibre stable, il faut et il suffit : 1° que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense; 2° que le petit métacentre soit au-dessus du centre de gravité du corps solide.

Humbert (*G.*). — Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches. (181-218).

Le but du présent Mémoire, dit l'auteur, est de montrer que, sur une courbe algébrique quelconque, on peut toujours, d'une infinité de manières, déterminer un certain nombre d'arcs dont la somme algébrique s'exprime par des fonctions rationnelles : dans un travail publié au LVIIe Cahier du *Journal de l'École polytechnique,* j'avais esquissé l'étude de la même question, mais les résultats que j'obtenais étaient très incomplets et, sur certains points de détail, peu précis; ils étaient d'ailleurs limités aux courbes planes.

Le Mémoire actuel comprend trois Parties. Dans la première, on établit une formule qui donne la somme des arcs interceptés sur une courbe, gauche ou plane, par des surfaces convenablement choisies et l'on montre, par la discussion de la formule, que cette somme est, en général, rationnelle et ne peut devenir logarithmique que pour certaines courbes particulières.

La deuxième Partie est consacrée à des applications générales de la formule fondamentale; on y étudie spécialement les cas où les arcs introduits sont susceptibles d'une définition géométrique simple et l'on examine avec quelque détail, dans cet ordre d'idées, les propriétés des courbes planes.

Le travail se termine, dans la troisième Partie, par des applications aux coniques et à des courbes particulières des troisième et quatrième ordres.

Poincaré (*H.*). — Remarques diverses sur les fonctions abéliennes. (219-314).

Au début de ce Mémoire, l'auteur revient sur un théorème qu'il a démontré antérieurement (*Bull. Soc. Mathém. de France,* t. X) :

Soient p fonctions θ d'ordres respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$; le nombre de leurs zéros communs est

$$n_1 n_2 \ldots n_p (p!).$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_p,$$

ce nombre de zéros communs est $n^p p!$.

M. Poincaré démontre ce résultat par un procédé nouveau, auquel conduit l'interprétation géométrique suivante. Considérons les n^p fonctions θ (linéairement indépendantes) d'un faisceau de genre p et d'ordre n comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions; si l'on donne aux p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$, dont dépendent ces fonctions, toutes les valeurs possibles, le point M décrira une certaine variété V, à p dimensions, qui sera algébrique et de degré $n^p p!$. Ce degré s'abaisse d'ailleurs dans le seul cas $n = 2$ qui est toujours excepté. Ainsi la double hypothèse $n = p = 2$ donne pour V une surface de l'espace ordinaire, qui est du quatrième degré : c'est la surface de Kummer.

Ensuite viennent les énoncés de deux théorèmes de Riemann, relatifs aux fonctions abéliennes *spéciales* (fonctions abéliennes provenant d'une courbe algébrique). Dans ces énoncés, Θ est la fonction θ du premier ordre, ayant pour arguments les p intégrales de première espèce $v_1, v_2, \ldots, v_p$ qui correspondent à une courbe algébrique (x, y) de genre p.

THÉORÈME I. — *Soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des constantes quelconques au nombre de p; l'équation*

$$\Theta(v_i - e_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

admet p solutions.

THÉORÈME II. — *Soient $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}$ les solutions de l'équation précédente et $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \ldots, v_i^{(p)}$ les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i. On a, aux multiples près des périodes,*

$$e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)} + c_i,$$

les c_i étant des constantes indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.

M. Poincaré généralise ces deux théorèmes de diverses manières.

Comme première généralisation du théorème I, il considère l'équation

$$\theta(v_i - e_i) = 0,$$

où θ est l'une des fonctions d'un faisceau d'ordre n et de genre p, et prouve que cette équation admet np solutions. Le lieu du point qui a pour coordonnées homogènes les n^p fonctions $\theta(v_i - e_i)$ du faisceau sera une courbe située sur la variété V; cette courbe sera du degré np, de genre p et sera située dans un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Voici la seconde généralisation du théorème I. Donnant toujours à Θ la même signification que ci-dessus, M. Poincaré considère q équations simultanées à q inconnues.

$$\Theta[v_i + v_i^{(1)} + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

et cherche combien ces équations admettent de solutions communes, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux solutions que l'on déduit l'une de l'autre en permutant les q points inconnus

$$x, \quad x^{(1)}, \quad \ldots, \quad x^{(q-1)}$$

de la courbe C et, par conséquent, les q intégrales correspondantes

$$v_i, \quad v_i^{(1)}, \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Le théorème de Riemann apprend que ce nombre est égal à p pour $q = 1$. On voit facilement que, pour $q = p$, le nombre cherché est $p!$ M. Poincaré démontre que, dans le cas général, ce nombre est égal à

$$\frac{p!}{(p-q)!}.$$

A l'égard du théorème II, l'auteur commence par faire observer que, sauf

dans le cas $p = 1$, on peut supposer nulles toutes les constantes c_i, et il fait voir que toute fonction Θ spéciale (au sens précisé plus haut) égalée à zéro, représente, d'après ce théorème, une *surface de translation* si $p = 3$, une *variété de translation* si p est quelconque. En d'autres termes, l'équation

$$\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$

admet une solution de la forme

$$u_i = \varphi_i^{(1)}(t_1) + \varphi_i^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_i^{(p-1)}(t_{p-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$t_1, t_2, \ldots, t_{(p-1)}$ étant $p - 1$ variables indépendantes. Si l'on convient d'exprimer ce fait en disant que l'équation $\Theta = 0$ est *translative* pour tout système *spécial* de fonctions abéliennes, il y a lieu de se demander : *l'équation* $\Theta = 0$ *est-elle encore translative pour des fonctions abéliennes non spéciales?* M. Poincaré prouve que la réponse à cette difficile question doit en général être négative.

André (*Désiré*). — Mémoire sur les permutations quasi-alternées. (315-350).

Après avoir rappelé la définition des permutations quasi-alternées des n premiers nombres, l'auteur établit une relation fondamentale. Ensuite il détermine les fonctions génératrices des nombres de ces permutations et donne différentes relations entre ces fonctions et entre ces nombres; puis il cherche les propriétés asymptotiques de ces mêmes nombres lorsque n augmente indéfiniment. Enfin il détermine la probabilité pour qu'une permutation soit quasi-alternée, et la valeur asymptotique de cette probabilité.

Pepin (*le P.*). — Solution de l'équation $X^4 + 35Y^4 = Z^2$. (351-358).

L'équation

$$ax^4 + by^4 = cz^2,$$

à laquelle s'applique la *méthode de descente* de Fermat, admettant une infinité de solutions (quand elle n'est pas impossible), on doit la considérer comme complètement résolue lorsqu'on a trouvé une méthode permettant d'obtenir toutes les solutions en nombres entiers premiers entre eux qui ne surpassent pas une limite assignée, et de démontrer que l'on ne laisse échapper aucune solution plus simple que les solutions calculées. L'auteur a déjà (*Journal de Mathématiques*, 1879) résolu complètement, dans ce sens, l'équation

$$(1) \qquad 7x^4 - 5y^4 = 2z^2.$$

Celle qu'il traite aujourd'hui,

$$X^4 + 35Y^4 = Z^2,$$

se ramène à la précédente quant aux solutions où Y est impair. En effet, ces solutions sont exprimées au moyen des solutions de l'équation (1) par les formules

$$Z = \frac{7x^4 + 5y^4}{2}, \qquad X = z, \qquad Y = xy.$$

Il ne reste donc plus qu'à obtenir les solutions où Y est pair : c'est ce dont l'auteur donne le moyen.

Coculesco (*N.*). — Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. (359-442).

Duporcq (*E.*). — De l'aire plane balayée par un vecteur variable. (443-465).

L'auteur expose une méthode géométrique générale qui lui a permis de retrouver la plupart des résultats connus (Steiner, Holditch, Williamson, Leudesdorf, Kempe, Zeuthen, Darboux) sur la matière, de les compléter par des propriétés nouvelles et de les généraliser. Nous citerons les deux propositions suivantes :

Si un polygone fermé quelconque ABC...LA de grandeur invariable se déplace d'une manière quelconque dans le plan, la somme des aires balayées par les vecteurs AB, BC, ..., LA est nulle.

Les aires balayées par trois vecteurs qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan sont liées par une relation linéaire.

Tome II; 1896.

Appell (*Paul*). — Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. (5-20).

Le but de ce Mémoire est d'obtenir pour l'étude des percussions des équations analogues à celles de Lagrange et ne contenant pas les percussions de liaison provenant des liaisons nouvelles qui sont brusquement introduites au moment du choc.

Parmi les liaisons qui existent au moment du choc (intervalle de temps très petit de t_0 à t_1), il en est qui existent encore après le choc : ce sont les liaisons *persistantes*. Quand les liaisons qui existent au moment du choc sont toutes persistantes, le problème est complètement résolu par l'équation de M. Appell

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_{t_1} = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_{t_0}$$

qui signifie que *les dérivées partielles de la force vive* T, *par rapport aux dérivées de ceux des paramètres qui ne sont pas assujettis à s'annuler au moment du choc, ont les mêmes valeurs avant et après le choc.*

Quand il y a d'autres liaisons, le nombre des inconnues est supérieur à celui des équations ci-dessus, qui sont toujours valables. Il faut alors recourir à d'autres considérations pour achever de déterminer le problème.

L'auteur traite les exemples du choc direct de deux sphères et du pendule balistique; puis il déduit des équations précédentes la démonstration du théorème de Carnot, énoncé sous sa forme la plus générale de la manière suivante :

Si, dans un système dont les liaisons sont réalisées sans frottement, on

introduit brusquement de nouvelles liaisons persistantes, la force vive perdue est égale à la force vive qui serait due aux vitesses perdues.

Guyou (*E.*). — Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. (21-22).

Réponse à certaines observations formulées par M. Duhem (*Journal de Mathématiques*, 1895).

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide. (23-40).

A la surface de séparation de deux fluides flotte un solide contenant du lest liquide. Imaginons que le flotteur et le lest liquide aient pris leur état d'équilibre; si l'on solidifie le lest liquide, il formera avec le vaisseau qui le porte un flotteur entièrement solide dont la stabilité pourra être étudiée par des méthodes connues. Mais les conditions de stabilité ainsi obtenues ne sont pas celles qu'il convient de réaliser pour assurer la stabilité du vaisseau portant du lest supposé liquide. Il importe de rechercher en quoi les secondes conditions diffèrent des premières. C'est ce que M. Guyou a fait dans un cas particulier important. M. Duhem étudie le problème d'une manière entièrement générale en s'appuyant sur les résultats de son précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1895).

Kœnigs (*G.*). — Sur un théorème de Kronecker. (41-48).

Soient F_1, F_2, F_3 trois fonctions de x, y, z finies, continues et uniformes dans une certaine région de l'espace et soient ($i = 1, 2, 3$)

$$X = \left[\!\left[F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right]\!\right], \qquad Y = \left[\!\left[F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right]\!\right], \qquad Z = \left[\!\left[F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right]\!\right].$$

M. Kœnigs considère le système différentiel

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

et démontre que tout multiplicateur de ce système est une fonction homogène de degré -3 de F_1, F_2, F_3 et que, réciproquement, toute fonction de cette nature est un multiplicateur.

Il conclut de là que l'intégrale de surface

$$\frac{1}{4\pi}\iint \frac{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

étendue à une surface ne contenant d'autres points de discontinuité que des zéros de F_1, F_2 et F_3 est égale à l'excès $(p - n)$ du nombre des points où le déterminant fonctionnel de F_1, F_2 et F_3 est positif sur le nombre de ceux où il est négatif; c'est là le théorème de Kronecker.

Mais la méthode employée par l'auteur lui permet de généraliser cette proposition; et ses remarques s'appliquent au théorème par lequel M. Picard a complété le résultat de Kronecker.

Mannheim (*A.*). — Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux. (51-55).

Soient (E) une surface du second ordre de centre o; m un point de cette surface, N la normale en ce point. Du point a où N rencontre l'un des plans principaux de E, on mène un plan perpendiculaire à cette droite. Il coupe le diamètre om en un point α, d'où l'on abaisse, sur le plan principal qui contient a, la perpendiculaire A. De même les points de rencontre b, c de N et des plans principaux de (E) conduisent à des droites B, C : les droites M_1, M_2 perpendiculaires à N et qui rencontrent A, B, C sont parallèles aux axes de l'indicatrice en m et leurs pieds sur N sont les centres de courbure principaux de (E) pour le point m.

Poincaré (*H.*). — Sur l'équilibre et les mouvements des mers. (59-102; 217-262).

Introduction. — Le problème des marées présente une telle complication qu'il ne peut guère être abordé du premier coup dans toute sa généralité et qu'il convient de partager la difficulté. Il faudrait tenir compte à la fois de l'attraction des astres, de celle du bourrelet liquide qu'ils soulèvent, de l'inertie du liquide, de la présence des continents, de la rotation du globe et de la force centrifuge composée, etc.

Peut-être serait-ce s'acheminer vers la solution complète que d'examiner séparément chacune de ces difficultés et de chercher à résoudre le problème quand on n'a à triompher que d'une seule d'entre elles.

Si les astres étaient fixes par rapport à la Terre et entraînés dans son mouvement de rotation, le problème serait beaucoup plus simple, puisque la surface des océans prendrait une position d'équilibre dont elle ne s'écarterait plus. On n'aurait plus alors à tenir compte ni de l'inertie du liquide, ni de la force centrifuge composée et l'on serait ramené à une simple question de statique.

On pourrait encore se contenter de cette simple approximation si le mouvement des astres était très lent; les mers prendraient alors une forme très peu différente de leur figure d'équilibre.

Malheureusement il n'en est pas ainsi et cependant la solution de cette question peut avoir une importance pratique; les oscillations réelles des mers peuvent être regardées comme la superposition d'un grand nombre d'oscillations périodiques, les unes à courte, les autres à longue période. Chacune de ces oscillations partielles se comporte comme si elle était seule. Les oscillations à très longue période peuvent alors se calculer par la méthode statique. C'est ce qu'ont très bien aperçu Lord Kelvin et M. Tait (*Cf.* Thomson et Tait, *Traité de Philosophie naturelle*).

Cette étude statique serait extrêmement simple si les océans recouvraient toute la surface de la Terre; l'emploi des fonctions sphériques donnerait une solution immédiate, soit que l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, soit qu'on en tienne compte.

La présence des continents complique le problème; si l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, il suffit d'appliquer une correction très simple; c'est ce qu'ont fait Tait et Thomson.

J'ai voulu le traiter en tenant compte à la fois de l'attraction du bourrelet

et de la présence des continents; j'y suis parvenu en introduisant certaines fonctions dont les propriétés rappellent celles des fonctions sphériques, mais qui dépendent de la forme des continents.

Je me suis occupé ensuite des oscillations à courte période, mais *en négligeant d'abord l'attraction du bourrelet liquide.* Il est d'abord aisé de voir que l'étude des oscillations éprouvées par la mer sous l'influence des mouvements des astres se ramène à celle de ses oscillations propres, c'est-à-dire de celles qu'elle éprouverait, *si elle était soustraite à cette influence* et si elle était écartée de sa figure d'équilibre, puis abandonnée à elle-même. C'est ainsi que l'intégration des équations différentielles linéaires à second membre se ramène à l'intégration des équations sans second membre.

J'ai donc été conduit à étudier les oscillations propres d'un liquide. J'ai supposé d'abord que ce liquide était enfermé dans un vase assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface d'équilibre; j'ai distingué le cas où la profondeur est finie et celui où elle est infiniment petite.

J'ai abordé ensuite le cas où le vase est assez grand pour qu'on doive regarder la surface d'équilibre comme sphérique.

J'ai fait ressortir l'analogie de ce problème avec celui des vibrations d'une membrane tendue dont je me suis occupé dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*

Enfin j'ai abordé un problème se rapprochant beaucoup plus de la réalité et j'ai tenu compte de la rotation du globe et de la force centrifuge composée.

Borel (Émile). — Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. (103-122).

Étant donnée une suite de nombres réels, rangés dans un ordre déterminé

$$(1) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n, \quad \ldots$$

on fait correspondre à cette suite la fonction

$$x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots + x_n \frac{a^n}{n!} + \ldots$$

en supposant les x_n tels que $x(a)$ soit une fonction entière de a. Si, pour a croissant indéfiniment par valeurs positives, on a

$$\lim [e^{-a} x(a)] = x$$

l'auteur dit que la suite (1) a une *limite généralisée,* qui est x.

Considérant ensuite une série à termes réels

$$(2) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

et désignant par s_n la somme de ses n premiers termes ($s_0 = 0$), M. Borel dit que cette série est *sommable* si la suite $s_0, s_1, \ldots s_n, \ldots$ a une *limite généralisée* s, qu'il prend alors pour *somme* de la série.

Pour que la série (2) soit sommable il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} u(a) da$$

ait un sens, $u(a)$ étant la fonction entière qui correspond à la suite u_0, $u_1, \ldots u_n \ldots$, comme la fonction $x(a)$ correspond à la suite (1).

Après avoir donné des exemples et généralisé le théorème d'Abel sur les séries entières, l'auteur passe aux suites dont les termes $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ sont des fonctions analytiques d'une variable complexe z. La fonction $x(a)$ est alors une fonction $x(a, z)$ La suite des x_n est dite admettre une *limite généralisée* si l'on a

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} x(a, z) = x(z)$$

et de plus tendre *uniformément* vers sa limite généralisée si $e^{-a} x(a, z)$ tend *uniformément* vers $x(z)$ lorsque a augmente indéfiniment. Lorsqu'une suite de fonctions analytiques dans un domaine D tend uniformément dans ce domaine vers une limite généralisée, cette limite est aussi une fonction analytique dans D.

Si les sommes s_n d'une série de fonctions tendent uniformément vers une limite généralisée $s(z)$, la série est dite *uniformément sommable* dans le domaine correspondant et l'on a cette proportion fondamentale : si une série uniformément sommable dans un domaine d'un seul tenant est uniformément convergente dans une portion de ce domaine, sa somme est dans tout le domaine une même fonction analytique.

Le Mémoire se termine par la détermination, dans quelques cas simples, du domaine de sommabilité uniforme et par des applications numériques.

Guichard (*C.*). — Sur la déformation des surfaces. (123-215).

Introduction. — Nous avons cherché surtout à mettre en évidence les propriétés des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation. Nous avons suivi deux méthodes : dans la première partie, nous faisons correspondre une congruence type (congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à une quadrique) à tout couple de surfaces applicables. Tous les couples qui correspondent à une même congruence ont les mêmes propriétés comme direction d'éléments. Dans la deuxième partie, c'est une surface qui correspond à un couple de surfaces applicables, les lignes asymptotiques de la surface correspondant aux lignes conjuguées. Tous les couples qui correspondent à une même surface ont encore mêmes directions. Nous avons donné d'abord la propriété caractéristique de ces systèmes conjugués, puis étudié les cas où ils se projettent sur un plan suivant un système orthogonal, suivant un système de courbes également inclinées sur deux directions fixes; le cas où la projection de l'un des systèmes est formée de droites; puis le cas où ces courbes sont courbes de contact de cylindres circonscrits à la surface; enfin le cas où ces lignes se coupent sous un angle constant, etc.

Nous avons fait usage de considérations sur l'espace à quatre dimensions. Nous appelons *surfaces* les variétés de points doublement indéterminés, *plans* les systèmes linéaires doublement infinis de points. La recherche des couples de surfaces applicables revient à celle des surfaces de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan. Ces surfaces jouissent de cette propriété caractéristique : c'est que leurs plans tangents sont normaux à une série de surfaces.

Nous avons dit quelques mots des théories qui se rattachent à la déformation. Nous avons montré que les systèmes conjugués qui se conservent dans la

correspondance par orthogonalité sont à invariants égaux en coordonnées tangentielles.

Parmi les résultats obtenus, signalons les deux suivants :

1° Trouver tous les couples de surfaces applicables tels que la distance d d'un point de la première à un point fixe et la distance z du point correspondant de la seconde à un plan fixe soient liées par la relation

$$d^2 - z^2 = \text{const.};$$

nous montrons qu'on peut obtenir ces surfaces sous forme finie.

2° Trouver deux surfaces applicables telles que les normales aux points correspondants forment un angle constant.

Humbert (Georges). — Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois. (263-293).

Les surfaces hyperelliptiques, pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres, peuvent être définies d'une manière purement géométrique; soient, en effet, ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2 les coordonnées de deux points variables sur une courbe plane (C) de genre deux ; les formules

$$x_i = F_i(\xi_1, \eta_1 ; \xi_2, \eta_2), \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les F_i sont des fonctions rationnelles, qui restent inaltérées quand on permute ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2, représentent les trois coordonnées d'une surface hyperelliptique (S).

Plus généralement, on peut définir des surfaces algébriques à l'aide d'une correspondance *point par couple* avec des courbes planes de genre quelconque p : si à un couple de points de la courbe correspond un seul point de la surface et, à un point de la surface, un seul couple de points de la courbe, la surface sera de genre $\frac{1}{2}p(p-1)$, le genre désignant ici le nombre des intégrales doubles, linéairement distinctes, attachées à une surface et qui restent finies sur toute la surface.

La surface (Σ) que considère M. Humbert est liée à une courbe (C) de genre *trois :* à un point de cette surface correspondent *deux* couples de points de la courbe (C). Le genre de cette surface est égal à *trois;* son ordre égal à *six*. Elle présente un point triple et seize points doubles qui sont les points doubles d'une surface de Kummer, quelle que soit la position du point triple par rapport aux points doubles, ce qui permet de la définir par une relation remarquable avec une surface de Kummer.

L'auteur étudie ensuite les intersections de la surface (Σ) avec les surfaces adjointes, et il est ainsi conduit à des propriétés nouvelles des courbes planes de la quatrième classe.

Si les fonctions thêta qui servent à définir analytiquement la surface (Σ) proviennent d'une courbe *hyperelliptique* de genre trois, la surface reste algébrique, mais son ordre s'abaisse à cinq. Elle a toujours un point triple et seize points doubles. M. Humbert donne, en terminant, l'équation et quelques propriétés de cette surface.

Picard (Émile). — Sur la détermination des intégrales d'une

équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé. (295-304).

L'auteur revient, pour les généraliser, sur certains résultats qu'il a établis antérieurement (*Journal de Mathématiques*, 1890) au sujet de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

où les coefficients d, e, f sont des fonctions analytiques de x et y, continues dans une aire A.

Si, dans cette région, f est constamment négatif, une intégrale continue de l'équation est déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé (tracé dans A), pourvu que ce contour enveloppe une aire suffisamment petite. M. Picard avait démontré cette proposition en supposant que le contour restait dans le voisinage d'un point; il prouve maintenant que, étant donnée une courbe fermée quelconque C, on peut tracer une autre courbe fermée C', limitant avec C une aire assez petite, de telle sorte qu'une intégrale s'annulant sur C et sur C' soit identiquement nulle dans l'aire.

Supposant ensuite f identiquement nul, M. Picard montre que, si l'on peut obtenir une intégrale continue ayant des valeurs données sur un contour fermé C, on pourra la déterminer sur un contour C' suffisamment rapproché de C, mais enveloppant une aire plus grande, de telle sorte que l'on pourra passer de proche en proche à un contour quelconque, après être parti d'un contour enveloppant une aire suffisamment petite, pour lequel on sait résoudre le problème.

Ce résultat acquis, on établit que, dans toute région où f est constamment négatif, une intégrale continue est toujours déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé.

Le procédé de démonstration dont l'auteur fait usage peut être utilisé dans beaucoup d'autres questions; il a, de plus, l'avantage de *s'étendre de lui-même au cas de plusieurs variables*.

Mathy. — Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ et ζ. (305-316).

Gravé (*D.-A.*). — Sur la construction des Cartes géographiques. (317-361).

Lagrange a fait connaître toutes les représentations conformes d'une surface de révolution dans lesquelles les méridiens et les parallèles sont figurés par des droites ou des cercles.

L'auteur s'est proposé le même problème pour les Cartes équivalentes, ou Cartes conservant les aires. Il traite successivement les cas où la projection est *rectiligne* (les méridiens et les parallèles étant représentés par des droites), où elle est *mixte* (l'une des deux familles coordonnées étant représentée par des droites, l'autre par des cercles), et où elle est circulaire (les méridiens et les parallèles étant représentés par des cercles).

2me Partie

Maillet (*Ed.*). — Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones. (363-380).

L'auteur démontre le théorème suivant :

Si l'expression

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5,$$

où a, a_1, ..., a_5 sont des entiers ou des nombres fractionnaires donnés, est entière et positive pour toute valeur de x supérieure ou égale à un nombre fini, tout nombre entier supérieur à une certaine limite fonction de a, a_1, ..., a_5 est la somme d'un nombre limité (au plus 6 *pour le degré deux,* 12 *pour le degré trois,* 96 *pour le degré quatre,* 192 *pour le degré cinq) de nombres positifs $\varphi(x)$, à un nombre limité d'unités près.*

En appliquant ce résultat aux nombres pyramidaux $\frac{x^3 - x}{6}$, on trouve que *tout nombre entier supérieur ou égal à* 19272 *est la somme de* 12 *nombres pyramidaux au plus.*

Hamy (*Maurice*). — Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. (381-439).

Ce Mémoire fait suite à celui que l'auteur a publié sous le même titre en 1894 (*Journal de Mathématiques*). Dans ce premier travail, M. Hamy traitait le cas où l'orbite de l'une des planètes est *circulaire* et enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite de l'autre planète, supposée *elliptique*. Dans le présent Mémoire, il s'occupe du cas inverse où l'orbite *elliptique* enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite *circulaire*.

Borel (*Émile*). — Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. (441-451).

Pour qu'une série de Taylor n'admette pas son cercle de convergence comme coupure, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit sommable (au sens de l'auteur; *voir* ci-dessus) *en quelque région extérieure à ce cercle.*

Comme conséquence de ce théorème, l'auteur donne d'un résultat dû à M. Hadamard une généralisation qui s'énonce ainsi :

La série

$$\sum a_n x^{c_n},$$

dans laquelle les exposants c_n sont des entiers croissants et les coefficients a_n des nombres quelconques, admet son cercle de convergence comme

coupure si le rapport

$$\frac{c_{n-1} - c_n}{\sqrt{c_n}}$$

est, à partir d'un certain rang, supérieur à un nombre fixe.

Jordan (*Camille*). — Henry Resal. (453).

Lévy (*Maurice*). — Notice sur Amé-Henry Resal. (455-460).

L. R.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXX; 1902 (1).

Combebiac. — Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace. (1-12).

Les transformations conformes de l'espace sont caractérisées par la propriété de conserver les sphères de rayon nul. L'équation générale des sphères étant

$$\alpha_0(x^2 + y^2 + z^2) + 2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y + 2\alpha_3 z + \delta = 0,$$

on peut prendre α_0, α_1, α_2, α_3 et δ comme coordonnées homogènes de la sphère et représenter une transformation conforme de l'espace par une transformation linéaire et homogène de ces cinq coefficients, laissant invariante l'expression

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_0\delta.$$

Lipschitz a résolu le problème qui consiste dans la détermination d'un système numérique complexe susceptible de représenter un groupe de transformations linéaires et homogènes, à un nombre quelconque de variables, laissant invariante la somme des carrés des variables.

En appliquant ses résultats au cas présent, l'auteur parvient à un système à seize unités qu'il appelle *quadriquaternions*. Le calcul des quadriquaternions constitue une analyse géométrique, comme celui des triquaternions, déjà étudié par M. Combebiac, et dont il est le prolongement.

Goursat. — Sur un problème relatif aux lignes asymptotiques. (12-18).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXVI$_2$, p. 185.

Les surfaces réglées et les hélicoïdes présentent une famille de lignes asymptotiques composée de courbes égales. Il y a donc lieu de rechercher toutes les surfaces jouissant de cette propriété.

Le problème revient à trouver une courbe gauche Γ telle qu'on puisse lui imprimer un mouvement continu dans lequel elle reste constamment ligne asymptotique de la surface qu'elle engendre. Les courbes gauches Γ répondant à la question sont celles dont les binormales appartiennent à un complexe linéaire (cas des hélicoïdes) ou à une infinité de complexes linéaires et par suite à une congruence linéaire.

Connaissant une pareille courbe Γ, on déterminera par des quadratures tous les mouvements à un paramètre dans lesquels Γ engendre une surface dont elle est constamment ligne asymptotique. Ces mouvements dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante.

La recherche des courbes Γ dont les binormales appartiennent à une congruence linéaire dépend d'une équation différentielle du second ordre qui n'est pas intégrable. M. Goursat forme cette équation en supposant rectangulaires les droites focales de la congruence : elle rentre dans le même type analytique que l'équation des lignes géodésiques d'une surface quelconque.

Servant. — Sur la déformation des quadriques. (18-23).

L'équation différentielle du réseau conjugué commun à une quadrique et à une surface applicable sur elle s'obtient en égalant à zéro une forme quadratique de différentielles dont la courbure est nulle. On peut donc déterminer ce réseau par quadratures.

Pour qu'un réseau d'une quadrique soit un réseau conjugué persistant dans une déformation continue, il faut que ce réseau soit isotherme conjugué (au sens de M. Bianchi) sur la quadrique. Après avoir donné ces résultats, l'auteur indique divers moyens d'aborder le problème de la déformation des quadriques.

Humbert (*G.*). — Détermination des courbes algébriques de degré donné qu'on peut tracer sur la surface de l'onde. (23-28).

Ces courbes sont toutes de degré pair.

Celles d'un degré donné $2l$ forment $32(2l-1)$ familles. Les courbes d'une même famille passent toutes une fois par 0, 4, 6, 8, 10, 12 ou 16 points doubles du tétraédroïde.

De là résultent diverses conséquences relatives aux courbes gauches du quatrième ordre.

De Montessus (*R.*). — Sur les fractions continues algébriques. (28-36).

L'auteur s'occupe des fractions rationnelles que M. Padé a appelées *normales* et démontre à leur sujet plusieurs propositions qui résolvent, dans le cas particulier où toutes les réduites considérées appartiennent à la même ligne horizontale du tableau de M. Padé, l'importante question que voici :

Une suite de réduites consécutives d'un tableau de fractions normales définit-elle une fonction identique à la fonction définie par la série entière qui a

donné naissance au tableau? Dans le cas de l'affirmative, la fraction continue correspondant à la suite prolonge-t-elle la série en dehors de son cercle de convergence?

Clairin (*J.*). — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. (37-40).

Il s'agit de trouver toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui admettent une infinité de transformations infinitésimales de contact permutables.

En convenant de considérer comme identiques deux équations qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation de contact, M. Clairin montre que les seules équations qui jouissent de cette propriété sont :

1° Les équations linéaires;

2° Les équations du type

$$(\alpha) \qquad r = \varphi(x, y, p, s);$$

3° Les équations de la forme

$$(\beta) \qquad (x+y)s = q + \chi(x, y, r).$$

Les équations (α) et (β) sont de celles auxquelles s'applique la méthode d'intégration de M. Darboux. Pour l'un de leurs systèmes de caractéristiques, il existe un invariant du premier ordre; pour le second, il existe trois invariants du second ordre.

Hadamard. — Sur les dérivées des fonctions de lignes. (40-43).

Grâce aux travaux de M. Volterra, on sait étendre aux fonctions de lignes la notion de dérivée. Désignant par U une fonction de la ligne fermée L, on fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ de L trois *dérivées* $U'_x(L, M)$, $U'_y(L, M)$, $U'_z(L, M)$, qui donnent lieu, pour une variation infiniment petite δx, δy, δz des divers points M, à l'égalité

$$(1) \qquad \delta U = \int_L (U'_x \delta x + U'_y \delta y + U'_z \delta z)\, ds.$$

Cette relation implique diverses hypothèses; il est facile, comme le montre M. Hadamard, de la mettre en défaut. En outre, cette relation ne subsiste pas quand on y remplace U par l'une de ses *dérivées*, U'_x par exemple.

Delassus (*Ét.*). — Sur les engrenages à contact ponctuel. (43-47).

Poincaré (*H.*). — Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'*Analysis situs*. (49-70).

Étude, au point de vue de l'*Analysis situs*, de la surface

$$z = \sqrt{F(x, y)}.$$

où $F(x, y)$ est un polynome. Les hypothèses faites sur la courbe

$$F(x, y) = 0$$

sont les suivantes :

Elle ne présente que des points ordinaires pour lesquels F'_x est différent de zéro, ou bien pour lesquels F'_x est nul, mais sans que F'_y ni F''_{x^2} s'annulent, ou des points doubles ordinaires mais pour lesquels on ait

$$F''_{x^2} \neq 0, \qquad F''_{x^2} F''_{y^2} - F''^2_{xy} \neq 0.$$

Lecornu (*L.*). — Sur les petits mouvements d'un corps pesant. (71-82).

On ne sait pas intégrer, dans le cas général, les équations différentielles du mouvement d'un corps pesant, fixé par l'un de ses points. Mais le problème peut être résolu si l'on se borne au cas où les vitesses sont infiniment petites : son étude a conduit M. Lecornu à des résultats simples dont voici le principal :

Le mouvement le plus général (infiniment lent) d'un corps solide possédant un point fixe s'obtient par la composition d'une rotation uniforme autour de la verticale et de deux mouvements oscillatoires autour de deux axes inclinés qui sont situés dans deux plans verticaux rectangulaires et appartiennent au plan conjugué de la verticale par rapport à l'ellipsoïde d'inertie.

L'auteur généralise ensuite cette étude du mouvement infiniment lent en recherchant s'il est possible de choisir les conditions initiales de telle façon qu'un solide pesant, fixé en un point, tourne avec une vitesse finie autour d'un axe immobile passant par ce point. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que cet axe soit vertical et soit en outre principal en l'un de ses points; la vitesse de rotation ω est constante et vérifie la relation

$$\omega^2 \rho = g,$$

dans laquelle ρ désigne la distance du point fixe au point pour lequel l'axe de rotation est principal.

d'Ocagne (*M.*). — Sur les barycentres cycliques dans les courbes algébriques. (83-91).

On sait que le barycentre G des points communs à une courbe algébrique et à un cercle quelconque de centre C est indépendant du rayon de ce cercle. La courbe algébrique fait ainsi correspondre à tout point C de son plan un point G que l'auteur appelle le *barycentre cyclique* du point C par rapport à cette courbe algébrique.

Les barycentres cycliques pris par rapport à une courbe algébrique quelconque recouvrent, en général, l'ensemble continu des points du plan. Mais, pour une catégorie nombreuse de courbes, à cet égard *singulières*, les barycentres cycliques G fournissent seulement l'ensemble continu des points d'une droite Δ, tous les points C qui correspondent à un même point G de Δ étant ceux d'une droite D, de direction fixe, située à une distance constante de G.

M. d'Ocagne fait connaître et détermine ces courbes singulières, dont les plus

simples sont les courbes dont toutes les directions asymptotiques sont confondues, entre autres, les paraboles générales.

Servant. — Sur une extension des formules de Gauss. (92-100).

L'auteur étend les formules de Gauss aux variétés à deux dimensions contenues dans un espace à quatre dimensions; il généralise ensuite les formules de Codazzi et termine par quelques indications relatives au réseau conjugué (généralement unique) qui existe sur les variétés considérées.

Clairin (*J.*). — Sur une classe de transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. (100-105).

Étant donnée une équation du second ordre

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

admettant deux transformations infinitésimales de contact qui engendrent un groupe g, soient $\varphi_1(x, y, z, p, q)$, $\varphi_2(x, y, z, p, q)$, $\varphi_3(x, y, z, p, q)$ les trois invariants du premier ordre de g. Les équations

$$(2) \qquad x' = \varphi_1, \qquad y' = \varphi_2, \qquad z' = \varphi_3$$

font correspondre à chaque intégrale de (1) une surface (Σ'). L'auteur prouve que ces surfaces (Σ') sont les intégrales d'une équation du second ordre (e), linéaire par rapport aux dérivées secondes. De toute intégrale de (e) on peut déduire ∞^2 intégrales de (1) par l'intégration d'équations différentielles ordinaires : si donc l'une de ces équations est intégrable par la méthode de M. Darboux, l'autre l'est également.

A une caractéristique d'ordre n de (1) correspond une caractéristique d'ordre $n-1$ de (2), tandis qu'à une caractéristique d'ordre n de (e) correspondent ∞^2 caractéristiques d'ordre $n+1$ de (1).

Si l'on sait résoudre le problème de Cauchy pour l'une des deux équations, on sait aussi le résoudre pour l'autre.

Raffy (*L.*). — Sur la déformation des surfaces et sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre. (106-108).

A l'équation de la déformation des surfaces, qui est une équation de Monge-Ampère pour la fonction x des variables u et v, on peut faire correspondre une autre équation, linéaire par rapport aux dérivées secondes de la nouvelle fonction inconnue t. On obtient ce résultat en posant *trois* relations convenables de la forme

$$F_i(u, v, x'_u, x'_v, x''_{u^2}, x''_{uv}, x''_{v^2}) = f_i(u, v, t, t'_u, t'_v) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qui constituent un système complètement intégrable pour x.

Après avoir signalé ce mode de transformation, l'auteur fait voir qu'on peut

aussi substituer à l'équation de la déformation *deux* équations aux dérivées partielles du troisième ordre que vérifie la courbure moyenne des surfaces admettant l'élément linéaire considéré.

Combebiac. — Sur les équations générales de l'élasticité. (108-110).

Les composantes de l'effort qui s'exerce sur l'élément superficiel, en un point appartenant à un milieu élastique, s'expriment par une substitution linéaire homogène en fonction des cosinus directeurs de la normale à l'élément.

Les neuf cosinus, qui devraient ainsi intervenir, se réduisent à six, parce qu'on admet que les pressions exercées sur un élément superficiel infinitésimal donnent lieu à une résultante unique. Or cette hypothèse est en défaut, tout au moins pour une substance aimantée placée dans un champ magnétique. L'auteur croit donc devoir l'écarter de la théorie de l'élasticité et il établit à nouveau les équations de l'équilibre et du mouvement d'un milieu élastique, en s'affranchissant de cette restriction.

Hadamard. — Sur une condition que l'on peut imposer à une surface. (111).

Cette condition, rencontrée par M. Zaremba, est que, a, b, c désignant trois points quelconques de la surface, N_a, N_b, N_c les normales en ces trois points, on ait

$$\frac{\cos(bc, N_b)}{\cos(cb, N_c)}\,\frac{\cos(ca, N_c)}{\cos(ac, N_a)}\,\frac{\cos(ab, N_a)}{\cos(ba, N_b)} = 1.$$

M. Hadamard montre qu'elle est caractéristique des surfaces du second degré.

Delaunay (*N.*). — Sur le calcul graphique des fonctions elliptiques et de quelques fonctions ultra-elliptiques. (113-121).

Constructions graphiques simples propres à donner les valeurs des intégrales elliptiques et de certaines intégrales hyperelliptiques.

Autonne (*Léon*). — Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux. (121-134).

L'auteur considère un groupe G_x de substitutions linéaires n-aires de déterminant 1

$$A = |x_j \Sigma a_{jk} x_k| = |x_j A[x_j]| = |x A[x]| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

supposées : 1° avoir tous leurs coefficients a_{jk} réels; 2° admettre pour invariant absolu la somme des carrés des variables. Il dit que G_x est un groupe linéaire *réel* et *orthogonal*.

Si l'on change de variables en posant

$$x_j = \sum_k r_{jk} t_k,$$

le nouveau groupe Γ_t, qui est d'ailleurs $r^{-1}Gr$, n'est plus, en général, ni réel, ni orthogonal. Il n'est cependant pas quelconque, puisque, par un changement visible de variables, il redevient réel et orthogonal.

L'objet du travail de M. Autonne est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe n-aire Γ_t soit *réalisable*, c'est-à-dire puisse devenir réel et orthogonal après une substitution convenable.

Maillet (*Edm.*). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières et quasi-entières. (134-155).

Les polynomes $F(x)$ à coefficients rationnels jouissent, entre autres, de trois propriétés que l'on pourrait chercher à étendre aux fonctions entières et aux fonctions que M. Maillet appelle *quasi-entières* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 17 février 1902) :

1° Le produit de deux polynomes à coefficients rationnels a ses coefficients rationnels;

2° Si x est rationnel ou algébrique, $F(x)$ l'est aussi;

3° Si b est rationnel ou algébrique, $F(x+b)$, ordonné suivant les puissances croissantes de x, a ses coefficients rationnels ou algébriques.

L'auteur prouve par des exemples décisifs que, si la première propriété peut subsister pour les fonctions entières, les deux autres ne subsistent pas, et qu'aucune des trois ne s'étend aux fonctions quasi-entières.

Il montre ensuite qu'il y a une infinité de fractions continues non algébriques dont l'ensemble a la puissance du continu et qui sont racines d'équations de la forme

$$1 + \sum_{1}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

où les c_n sont rationnels et décroissent suffisamment vite quand n augmente.

Goursat (*E.*). — Sur un groupe de transformations. (155-165).

Dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes, Hermite a considéré un groupe de substitutions, linéaires et fractionnaires, où figurent seize coefficients entiers a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 0, 1, 2, 3$) liés par six relations quadratiques. Ce groupe a joué depuis un rôle important dans un grand nombre de travaux relatifs à la théorie des fonctions.

Mais on ne pouvait prévoir que ce même groupe de substitutions, où a_i, b_i, c_i, d_i ne sont plus assujettis à être entiers, interviendrait dans les transformations de contact des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires par rapport à r, s, t, $rt - s^2$.

C'est là un curieux rapprochement que M. Goursat établit entre deux parties bien distinctes de l'Analyse. Il fait d'abord observer que l'on satisfait aux six conditions d'Hermite en prenant pour les seize coefficients les dérivées par rapport à x, y, p, q de quatre fonctions

$$x \quad X(x, y, p, q), \qquad p' \quad P(x, y, p, q),$$
$$y \quad Y(x, y, p, q), \qquad q' \quad Q(x, y, p, q).$$

qui se trouvent définir une transformation de contact, visiblement particulière. Ce résultat s'étend aux transformations de contact les plus générales; mais il reste à trouver, dans le même ordre d'idées, le groupe algébrique, linéaire et fractionnaire, qui généralise le groupe arithmétique d'Hermite.

L'auteur montre que ce groupe est précisément celui des substitutions par lesquelles s'expriment, en fonction de r, s, t, $rt - s^2$, les quatre expressions correspondantes R, S, T, RT $-$ S^2, qui résultent de la transformation de contact générale

$$x' = X(x, y, z, p, q), \qquad p' = P(x, y, z, p, q),$$
$$y' = Y(x, y, z, p, q), \qquad q' = Q(x, y, z, p, q),$$
$$z' = Z(x, y, z, p, q).$$

En terminant, il donne pour un système de $4n^2$ quantités

$$A_i^h, \quad B_i^h, \quad C_i^h, \quad D_i^h, \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n)$$

les conditions analogues à celles d'Hermite et indique un procédé général pour établir l'équivalence des deux formes sous lesquelles on peut les écrire.

Fabry (*Eug.*). — Sur le genre des fonctions entières. (165-176).

Dans un Mémoire récent, M. Lindelöf s'est proposé de préciser la détermination du genre d'une fraction entière, donnée par son développement

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots.$$

Il est arrivé à cette importante conclusion que le genre ne dépend pas uniquement de l'ordre de grandeur des coefficients c_n. Mais, tout en indiquant les raisons qui doivent faire considérer comme très probables les deux théorèmes qui suivent, il n'en donne pas de démonstration proprement dite.

1° La fonction

$$f(x) = \prod_0^\infty \left[1 - \frac{x}{n(\log n)^2} \right] \qquad (1 < \alpha < 2)$$

est du genre zéro et la série

$$\sum_0^\infty \sqrt[n]{c_n}$$

est divergente;

2° La fonction

$$f(x) = \sum \left(\frac{x}{n^2 \log n} \right)^{n^2}$$

est de genre 1 et la série

$$\sum_0^\infty \sqrt[n]{c_n}$$

est convergente.

Le travail de M. Fabry contient la démonstration rigoureuse de ces deux propositions.

Pellet (*A.*). — Sur l'approximation des racines réelles des équations. (176-177).

Contribution à la méthode d'approximation de Newton.

Auric (*A.*) — Sur une propriété très générale des déterminants. (177-179).

Zoukis (*Aristide*). — Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache. (181-194).

L'auteur démontre, relativement aux fonctions homogènes de deux variables, une proposition qui, appliquée aux fonctions entières, fournit la démonstration d'un théorème énoncé par M. Cyp. Stephanos et dont celui de Budan-Fourier est une conséquence.

Maillet (*Edm.*). — Sur les équations différentielles et la théorie des ensembles. (195-201).

M. Cantor a établi le théorème suivant :

L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, tandis que l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu.

Le présent Mémoire contient l'extension de ce théorème aux solutions des équations rationnelles et d'autres analogues.

Lecornu (*L.*). — Sur le mouvement vertical d'un projectile dans un milieu résistant. (202-207).

Pour un projectile de forme donnée, lancé verticalement avec une force vive donnée, il existe une valeur de la masse qui correspond au maximum d'ascension. C'est cette masse que l'auteur détermine, en représentant la résistance de l'air par $g\lambda v^2$, par T le travail dépensé pour lancer le projectile. Voici les résultats obtenus :

La masse du mobile cherchée est égale à $\sqrt{\frac{\lambda T}{2}}$ et sa vitesse initiale est double de la vitesse limite vers laquelle il tendrait en tombant verticalement.

Sa hauteur d'ascension est égale aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur à laquelle il parviendrait dans le vide en vertu de sa vitesse initiale.

La résistance qu'il éprouve de la part de l'air, à l'instant initial, est quadruple de son poids.

Hadamard. — Sur une classe d'équations différentielles. (208-220).

Les équations dont s'occupe l'auteur sont des équations du second ordre appartenant au type

$$(1) \qquad y'' = R(y', x, y),$$

où R représente une fonction rationnelle de la dérivée y'. Ce sont celles dont l'intégrale générale peut être mise sous forme *algébrique* par rapport aux constantes d'intégration a et b, soit

$$(2) \qquad F(x, y, a, b) = 0,$$

F étant un polynome entier en a et b, dont les coefficients sont des fonctions de x et de y.

Moyennant quelques conditions très peu restrictives qu'il impose à ces fonctions, M. Hadamard établit tout d'abord, comme l'avait déjà constaté M. Painlevé, que l'*équation* (1) *admet deux intégrales premières rationnelles en* y'.

Par suite, la courbe (C) représentée par l'équation (2), où a et b sont regardés comme les coordonnées courantes, est une courbe unicursale. En étudiant cette courbe, l'auteur obtient le moyen d'engendrer l'intégrale des équations (1) de la classe particulière dont il s'agit :

On assujettira une courbe algébrique (C) de degré m à présenter d points doubles et r rebroussements, dont le nombre total soit maximum

$$d + r = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

On l'assujettira de plus à toucher h courbes données, le nombre h étant choisi de manière que le nombre total des conditions ainsi imposées à (C) soit inférieur de *deux* unités à celui qui est nécessaire pour la déterminer :

$$d + 2r + h = \frac{m(m+3)}{2} - 2.$$

La courbe (C) dépendra de deux paramètres x, y et son équation aura la forme (2); la fonction y de x définie par l'équation (2) satisfera à une équation différentielle du second ordre du type (1). La forme analytique de cette équation différentielle dépend surtout du nombre r des points de rebroussement : quand r est nul, y'' est un polynome entier du troisième degré en y', pourvu que, l'équation (2) étant supposée analytique, une courbe intégrale quelconque ne corresponde qu'à un système de valeurs de a et de b.

Estanave (*E.*). — Sur les coefficients des développements en séries de tang x, séc x et d'autres fonctions. Caractères de périodicité que présentent les chiffres des unités de ces coefficients. (220-226).

L'auteur prouve d'abord que les nombres d'Euler satisfont à la loi suivante :

$$E_{2p+1} = \text{mult. } 10 + 1, \qquad E_{2p} = \text{mult. } 10 + 5.$$

Il considère ensuite les nombres introduits dans la science par M. Désiré André, et qui sont ainsi définis :

$2A_n$ est le nombre de *permutations alternées* de n lettres, et $2D_n$ le nombre de *permutations quasi-alternées* de ces n lettres distinctes. On a d'ailleurs

$$D_n = A_{n-1} - 2A_n.$$

En mettant à part A_0, A, D_0, D_1, M. Estanave établit la périodicité des chiffres qui terminent ces nombres, savoir 1, 2, 5, 6 pour les A et 0, 1, 6, 9 pour les D.

Il montre ensuite qu'il y aurait lieu de ne considérer que la série des nombres A de M. D. André, à l'exclusion des nombres E d'Euler et des nombres B de Bernoulli, attendu que les A sont tous entiers, qu'ils existent par eux-mêmes, indépendamment des développements de la tangente et de la sécante où ils interviennent, et qu'on en déduit très simplement les nombres E et les nombres B par les relations

$$E_p = A_{2p}, \qquad B_p = \frac{2pA_{2p-1}}{2^{2p}(2^{2p}-1)}.$$

Raffy (*L.*). — Sur le réseau diagonal conjugué. (226-233).

L'auteur commence par établir quelques propriétés simples des *lignes diagonales* ou courbes tangentes en chacun de leurs points à l'un des diamètres conjugués égaux de l'indicatrice et du réseau conjugué (*réseau diagonal*) formé par ces deux familles de lignes. Ces propriétés tiennent à ce fait que les tangentes aux lignes diagonales, les tangentes aux lignes asymptotiques et les tangentes aux lignes de courbure qui se croisent en un point ordinaire d'une surface quelconque, forment trois couples de droites qui, pris deux à deux, constituent des faisceaux harmoniques.

Le rayon de courbure R de la section normale déterminée par la direction (du, dv) ayant pour expression

$$R = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2},$$

l'équation différentielle des lignes diagonales est

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2} = \frac{G\delta - 2F\delta' + E\delta''}{\delta\delta'' - \delta'^2}.$$

Cette équation, qu'on obtient en égalant R à la demi-somme des rayons de courbure principaux, permet de déterminer par quadratures les lignes diagonales de diverses classes de surfaces.

L'auteur rapporte ensuite la surface à son réseau diagonal et obtient, pour l'élément linéaire $d\sigma^2$ de la représentation sphérique, une expression qui ne diffère que par le signe de celle qu'on trouve quand la surface est rapportée à ses lignes asymptotiques.

Enfin, il donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme quadratique

$$c\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

dont la courbure totale est égale à 1, soit l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes diagonales.

Cahen (*E.*). — Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques. (234-242).

Combebiac. — Sur les équations générales de l'élasticité. (242-246).

Dans une Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur a indiqué les termes qu'il est nécessaire d'introduire dans les équations générales de l'élasticité pour tenir compte des couples extérieurs qui peuvent agir sur les particules d'un corps, comme, par exemple, les couples magnétiques.

Les coefficients qui interviennent dans la détermination des efforts en un point sont alors au nombre de neuf. Il y a lieu de rechercher comment ils sont liés aux six paramètres qui caractérisent la déformation au point considéré.

M. Combebiac montre que les trois nouveaux coefficients L, M, N (qui sont nuls dans les équations classiques) doivent être considérés comme des fonctions données de x, y, z aussi bien à la surface qu'à l'intérieur du corps.

De Séguier. — Sur la forme canonique des substitutions linéaires. (247-252).

L'auteur établit simplement la forme canonique des substitutions linéaires et quelques-unes de ses conséquences, en partant du lemme suivant :

Étant donnée une substitution linéaire $\alpha = (\alpha_{ik})$ des variables $x_1, \ldots, x_n$, on peut toujours trouver n fonctions linéairement indépendantes des x formant une ou plusieurs suites $y_1, \ldots, y_m$; $y'_1, \ldots, y'_m, \ldots$, telles que α remplace les y d'une même suite $y_1, \ldots, y_\mu, \ldots, y_m$ respectivement par

$$s_i y_1, \quad \ldots, \quad s_i(y_\mu + y_{\mu-1}), \quad \ldots, \quad s_i(y_m + y_{m-1}) \qquad (\mu \geq 2),$$

s_i étant racine du déterminant caractéristique Δ_α de α, qu'il y ait au moins une suite répondant à chaque racine et que le nombre des y figurant dans les suites répondant à une racine coïncide avec la multiplicité de cette racine.

Hadamard. — Sur une question de calcul des variations. (253-256).

L'auteur signale et rapproche deux conditions, l'une suffisante, l'autre nécessaire pour assurer le minimum d'une intégrale multiple portant sur n variables indépendantes et où figurent m fonctions de ces variables avec leurs mn dérivées du premier ordre.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

5e série, t. III : 1897 [1].

Appell (*P.*). — Sur les équations de l'hydrodynamique et la théorie des tourbillons. (5-16).

Le Mémoire de Cauchy intitulé *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* (1815) contient tous les éléments de la théorie des tourbillons. M. Appell reproduit d'abord l'analyse de Cauchy, en vue d'interpréter certains de ses résultats.

Soient a, b, c les coordonnées d'une molécule fluide à l'instant initial $t = 0$, et u_0, v_0, w_0 les composantes de la vitesse initiale de cette molécule. Soient x, y, z les coordonnées de cette molécule au temps t et u, v, w les composantes de sa vitesse; les forces qui agissent sur le fluide sont supposées dépendre d'un potentiel U.

Trois des équations données par Cauchy signifient que, *pour chaque valeur de t, l'expression* de

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc),$$

où t est regardé comme une constante et x, y, z comme des fonctions de a, b, c, t, *est une différentielle totale exacte.*

Cette interprétation rend intuitif le théorème de Lagrange sur le potentiel des vitesses et celui de Helmholtz aux termes duquel on a, quel que soit t,

$$\int_{C} (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_{C_0} (u_0\,da + v_0\,db - w_0\,dc),$$

C_0 étant une courbe fermée prise dans le fluide à l'instant $t = 0$ et C la courbe fermée suivant laquelle sont disposées à l'instant t les molécules qui étaient primitivement sur C_0. De plus, elle conduit directement aux équations de Weber.

Le fait que *les lignes de tourbillon se conservent* est une conséquence immédiate de trois équations que M. Appell emprunte au Mémoire de Cauchy.

Duport. — Mémoire sur les équations différentielles. (17-80).

Ce Mémoire est consacré à l'étude du système

$$(1) \qquad \Sigma a_i\,dx_i = 0 \qquad \Sigma b_i\,dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

formé par deux équations de Pfaff quand le nombre total des variables est six.

L'auteur commence par rechercher les formes distinctes auxquelles on peut

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVII₂, p. 122.

réduire le système proposé. Elles sont au nombre de neuf. Pour les écrire, convenons que les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_6$ seront des fonctions des x_i pouvant être prises pour nouvelles variables; les lettres c_i désigneront des fonctions de y_1, $y_2, \ldots, y_6$; quant à H et K, ce seront deux fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_5$.

Type I :

$$dy_1 = 0, \qquad dy_2 = 0.$$

Dans ce cas, les équations

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c',$$

où c et c' désignent des constantes arbitraires, donnent la solution du système (1), quel que soit le nombre des variables *indépendantes*, qui peut aller jusqu'à quatre.

Type II :

$$dy_1 = 0, \qquad dy_3 - y_3 dy_2 = 0.$$

Dans ce cas, les formules

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = f(\alpha), \qquad y_4 = f'(\alpha),$$

donnent la solution du système, c étant une constante arbitraire, α une variable indépendante, $f(\alpha)$ une fonction arbitraire, $f'(\alpha)$ sa dérivée. Le nombre des variables indépendantes peut aller jusqu'à trois.

Type III :

$$dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_4 dy_1 = 0.$$

Dans ce cas, les formules qui résolvent le système sont :

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = f''(\alpha).$$

Le nombre des variables indépendantes peut encore être de trois.

Type IV :

$$dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_4 - y_5 dy_1 = 0.$$

Dans le cas d'une ou deux variables indépendantes, les formules de solution sont

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = f'(\alpha), \qquad y_4 = \varphi(\alpha), \qquad y_5 = \varphi'(\alpha),$$

les deux fonctions f et φ étant arbitraires. Dans le cas de trois variables indépendantes, on a

$$y_1 = c, \qquad y_2 = c', \qquad y_4 = c''$$

avec trois constantes arbitraires.

Type V :

$$dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \qquad dy_3 - \mathrm{H}\, dy_1 - \mathrm{K}\, dy_4 = 0.$$

Le nombre des variables indépendantes étant de une ou deux, les solutions

sont données par la formule

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha) \quad y_3 = f'(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \quad f''(\alpha) - A - B\varphi'(\alpha) = 0.$$

Il ne peut plus y avoir que des solutions singulières dans le cas de trois variables indépendantes.

Type VI :

$$dy_1 = 0, \quad dy_4 - y_5 dy_2 - y_6 dy_3 = 0.$$

Dans le cas d'une variable indépendante, les solutions sont données par

$$y_1 = c, \quad y_2 = \alpha, \quad y_3 = f(\alpha),$$
$$y_4 = \varphi(\alpha), \quad \varphi'(\alpha) - y_5 - y_6 f'(\alpha) = 0.$$

Dans le cas de deux variables indépendantes, on a

$$y_1 = c, \qquad y_2 = \alpha, \qquad y_3 = \delta,$$
$$y_4 = f(\alpha, \delta), \qquad y_5 = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad y_6 = \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

$f(\alpha, \delta)$ étant une fonction arbitraire des deux variables indépendantes α et β.

Type VII :

$$dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \quad dy_5 - y_6 dy_4 = 0.$$

Dans le cas d'une variable indépendante, on a

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha),$$
$$y_5 = \psi(\alpha), \quad \psi'(\alpha) - y_6 \varphi'(\alpha) = 0,$$

les trois fonctions f, φ, ψ étant arbitraires.

Dans le cas de deux variables indépendantes, on a

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(a),$$
$$y_4 = \delta, \quad y_5 = \varphi(\delta), \quad y_6 = \varphi'(\delta),$$

les fonctions f et φ étant arbitraires.

Type VIII :

$$dy_2 - y_3 dy_1 = 0, \quad c_1 dy_1 + c_3 dy_2 + c_4 dy_4 + c_5 dy_5 = 0.$$

Dans le cas d'une variable indépendante, on a, avec trois fractions arbitraires

$$y_1 = \alpha, \quad y_2 = f(\alpha), \quad y_3 = f'(\alpha), \quad y_4 = \varphi(\alpha),$$
$$y_5 = \psi(\alpha), \quad c_1 + c_3 f''(\alpha) + c_4 \varphi'(\alpha) + c_5 \psi'(\alpha) = 0.$$

Dans le cas de deux variables indépendantes, on ne peut plus comprendre toutes les solutions dans un même système de formules.

2me Partie -

Type général IX :

$$(2)\quad \begin{cases} dy_3 - y_1 dy_1 - y_2 dy_2 = 0, \\ c_1 dy_1 + c_2 dy_2 + c_3 dy_3 + c_4 dy_4 = 0. \end{cases}$$

Dans le cas d'une variable indépendante, on a, avec trois fractions arbitraires

$$y_1 = \alpha, \qquad y_2 = f(\alpha), \qquad y_3 = \varphi(\alpha),$$
$$y_4 = \Psi(\alpha), \qquad y_3 = \varphi'(\alpha) - \psi(\alpha) f'(\alpha).$$
$$c_1 + c_2 f'(\alpha) + c_3 [\varphi''(\alpha) - \psi'(\alpha) f'(\alpha) - \psi(\alpha) f''(\alpha)] + c_4 \psi'(\alpha) = 0.$$

Il reste à traiter le cas général, celui où le nombre des variables indépendantes dans le système (2) est égal à deux. L'intérêt de ce cas tient à ce qu'il forme une transition entre les équations différentielles du premier ordre et celles du second. Les solutions dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. M. Duport a trouvé notamment deux cas nouveaux où l'on peut obtenir, moyennant l'intégration d'équations différentielles ordinaires, des solutions du système proposé, renfermant une fonction arbitraire, sans que l'on puisse, pour cela, obtenir sa solution générale.

Liapounoff (*A.*). — Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas un maximum. (81-94).

On sait que la position d'équilibre d'un système matériel est stable si, dans cette position, la fonction des forces est maximum. Quant aux positions d'équilibre pour lesquelles cette dernière condition n'est pas remplie, on les caractérise souvent comme instables, quoique leur instabilité n'ait jamais été démontrée d'une manière générale.

M. Liapounoff démontre sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles, un théorème général, d'où résulte comme conséquence l'instabilité de l'équilibre dans les deux cas étendus que voici :

1° La non-existence du maximum pour la fonction des forces se reconnaît sur les termes du second ordre, sans qu'il soit nécessaire de considérer les termes des ordres plus élevés;

2° La fonction des forces, dans la position d'équilibre considérée, est minimum, et ce minimum se reconnaît sur les termes de l'ordre le moins élevé qu'on puisse trouver dans son développement.

Günther (*P.*). — Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques (traduction L. Laugel). (95-111).

Voici quelques passages de la conclusion de cette étude.

Ainsi Gauss, et cela en partie au moyen d'une méthode qui, par son originalité singulière, nous intéresse au plus haut degré, s'était créé, plusieurs dizaines d'années environ avant Abel et Jacobi, une théorie des fonctions elliptiques qui renfermait une partie des résultats les plus importants énoncés plus tard par ces géomètres.... Bien plus, la théorie de Gauss renferme encore, en différents endroits, les points de départ de recherches plus étendues que la postérité seule a su mener à terme.

Bricard (Raoul). — Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. (113-148).

Existe-t-il des octaèdres à faces triangulaires susceptibles d'une série continue de déformations dans lesquelles les faces restent invariables, les angles solides et les dièdres étant seuls modifiés?

Telle est la difficile question que l'auteur résout complètement dans le présent Mémoire, après en avoir fait connaître (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1895) une solution particulière.

Les octaèdres trouvés possèdent nécessairement (Cauchy) des angles dièdres rentrants ou bien des faces qui s'entrecroisent à la manière des faces des polyèdres d'espèces supérieures. Pendant leur déformation, leurs dièdres opposés restent deux à deux égaux ou supplémentaires. M. Bricard donne le moyen de réaliser ces solides.

Dans le premier, les arêtes opposées sont égales deux à deux : les trois diagonales sont perpendiculaires à une même droite qui les partage chacune en deux parties égales.

Le second possède un plan de symétrie passant par deux sommets opposés.

Dans le troisième octaèdre, tous les angles tétraèdres ont leurs faces opposées égales ou supplémentaires deux à deux.

Le problème résolu peut être transformé de diverses manières; il revient notamment à trouver les hexagones gauches déformables avec conservation de leurs côtés et de leurs angles.

Mannheim (A.). — Remarques à propos du Mémoire précédent. (149-150).

Duhem (P.). — Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. (151-193).

I. Sur les équations générales de l'équilibre des fluides.

II. Généralisation des résultats précédents.

III. Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. — Variation seconde du potentiel thermodynamique.

IV. Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles. — Conditions nécessaires.

V. Conséquence de la première condition nécessaire.

VI. Cas des actions newtoniennes.

VII. Fluides dont les divers éléments se repoussent ou s'attirent en raison inverse du carré de leur distance mutuelle.

VIII. Masse fluide, animée d'un mouvement de rotation uniforme et dont les divers éléments s'attirent en raison inverse du carré de la distance.

Gordan (Paul). — Le résultant de trois formes ternaires quadratiques. (195-201).

L'auteur donne le moyen de transformer le résultant de trois formes ter-

naires, de manière que les coefficients de ces trois formes y figurent rationnellement. Il fait l'application du procédé au résultant de trois formes quadratiques.

Poincaré (*H.*). — Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. (203-276).

Introduction. — Soient u et u' les anomalies excentriques de deux astres et D leur distance. Le carré D^2 est un polynome entier par rapport aux lignes trigonométriques de u et de u'.

La partie principale de la fonction perturbatrice est précisément $\frac{1}{D}$. Elle peut se développer soit suivant les cosinus et sinus des anomalies moyennes, soit suivant ceux des anomalies excentriques.

Le premier développement est le plus employé et le plus utile; néanmoins il peut y avoir quelque intérêt à étudier les propriétés du second pour plusieurs raisons :

1° Quand les deux excentricités sont nulles, les deux développements se confondent, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison;

2° Hansen s'est servi de développements procédant suivant l'anomalie moyenne d'une des planètes et l'anomalie excentrique de l'autre;

3° Enfin la connaissance des propriétés du second développement, qui sont plus simples, peut nous guider dans l'étude du premier développement.

Quoi qu'il en soit, le carré D^2 est un polynome du second degré par rapport à $\cos u$, $\sin u$, $\cos u'$, $\sin u'$.

Si nous posons

$$e^{iu} = x, \qquad e^{iu'} = y,$$

D^2 sera un polynome du deuxième degré en x, $\frac{1}{x}$, y, $\frac{1}{y}$ et $x^2y^2D^2$ sera un polynome entier en x, y, soit

$$x^2y^2D^2 = F(x,y).$$

d'où

$$\frac{1}{D} = \frac{xy}{\sqrt{F}}.$$

Nous sommes donc conduits à développer $\frac{1}{\sqrt{F}}$ suivant les puissances positives et négatives de x et de y.

Je traiterai la question pour un polynome F quelconque. Pour que le développement soit possible et valable pour

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1,$$

il faut d'abord que F ne s'annule pour aucun des systèmes de valeurs de x et de y, dont le module est égal à 1.

Sans cela, l'expression $\frac{1}{\sqrt{F}}$ devenant infinie ne pourrait plus être développée par la formule de Fourier.

Il faut ensuite que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de x augmente de 2π, de telle façon que la variable x décrive la circonférence tout entière du cercle

$$|x| = 1.$$

Regardons y comme une constante; le polynome F, considéré alors comme fonction de x seulement, a un certain nombre de zéros. Il faut que le nombre de ces zéros, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, soit pair. Cela doit avoir lieu pour toutes les valeurs de y dont le module est égal à 1.

Mais il suffit que cela ait lieu pour $y = 1$; en effet, faisons décrire au point y le cercle $|y| = 1$ tout entier; le nombre des racines de l'équation $F = 0$, qui sont à l'intérieur du cercle $|x| = 1$, demeurera constant. En effet, il ne pourrait changer que si une des racines venait sur la circonférence $|x| = 1$. Or, cela n'est pas possible, car nous avons supposé plus haut que F ne pouvait s'annuler pour $|x| = 1$, $|y| = 1$.

Nous supposerons donc que, pour $y = 1$, l'équation $F = 0$ a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle

$$|x| = 1.$$

Il faut enfin que le radical $\sqrt{F}$ revienne à sa valeur primitive quand l'argument de y augmente de 2π.

Nous supposerons donc encore que, pour $x = 1$, l'équation $F = 0$ (où y est regardée comme l'inconnue) a un nombre pair de racines à l'intérieur du cercle $|y| = 1$.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Maillet (Ed.). — Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. (277-310).

L'auteur commence par établir le théorème suivant :

Soit C un groupe k fois transitif entre n lettres, Γ_α l'isomorphe holoédrique de C formé par les substitutions que C opère entre les combinaisons α à α de ses lettres ($\alpha < k$). Le groupe Γ_α sera primitif :

1° Quand $k \geq \alpha + 1$;
2° Quand $k = \alpha + 1$, si $n - \alpha$ est à la fois premier à $(\alpha - 1)!$ et $\not\equiv 0 \pmod{\alpha}$.

Viennent ensuite les applications de ce théorème aux divers cas où C est un groupe symétrique ou alterné; où C est un des groupes cinq fois transitifs de Mathieu; où C est un groupe linéaire fractionnaire; où C contient le groupe linéaire fractionnaire; où C est un groupe linéaire.

M. Maillet démontre ensuite diverses propositions parmi lesquelles nous citerons celle-ci :

Soit C un groupe transitif de degré n et de classe $\geq u \geq \frac{n}{l}$; soit Γ_α le groupe des substitutions opérées par C entre les C_n^α combinaisons α à α de ses n lettres

$\left(1 < \alpha < \frac{n}{2}\right)$. Le degré de Γ_α est égal à C_n^α; sa classe ω satisfait aux inégalités suivantes :

1° Si $u \geq \frac{n}{2}$, $l = 2$, on a

$$\omega \geq \frac{2}{3} C_n^\alpha;$$

2° Si $u \geq \frac{n}{3}$, $l = 3$, on a

$$\omega \geq \frac{1}{2} C_n^\alpha;$$

3° Si $u \geq \frac{n}{4}$, $l = 4$, on a

$$\omega \geq \frac{2}{5} C_n^\alpha; \qquad \omega \geq \frac{1}{2} C_n^\alpha \qquad (\alpha \geq 3);$$

4° Enfin on a en général, pour $\alpha < u$,

$$\omega > \frac{u}{n} C_n^\alpha.$$

Zaremba (*S.*). — Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. (311-329).

La méthode des approximations successives, imaginée par M. Picard pour les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, peut être étendue aux équations à trois variables, de la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

pourvu que l'on établisse les trois propriétés suivantes de la fonction de Green.

Soient (S) une surface fermée; $M(x, y, z)$ et $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ deux points situés à son intérieur; ρ leur distance; $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ la fonction de Green relative à ces deux points.

Posons

$$v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} - G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta),$$

et désignons par Dv la dérivée de v prise par rapport à l'une des variables x, y, z, par $D_2 v$ l'une quelconque des dérivées secondes par rapport à ces mêmes variables.

1° On a l'inégalité

$$|Dv| < \frac{A}{\rho^2},$$

où A est une constante positive qui ne dépend que de la surface S et qui ne croît pas indéfiniment quand on fait décroître indéfiniment l'étendue de la surface S suivant une loi convenable;

2° On a pareillement

$$|D_2 v| < \frac{B}{\rho^3},$$

B étant une constante qui jouit de propriétés analogues à celles de la constante A;

3° L'intégrale triple

$$\iiint D_2 v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

étendue à tout le domaine limité par la surface S, ne dépasse jamais en valeur absolue une constante positive C qui dépend uniquement de la nature de la surface (S).

M. Zaremba avait démontré antérieurement le premier de ces théorèmes, en se bornant au cas d'une surface convexe. Dans le présent Mémoire, il établit les trois énoncés précédents sans supposer la surface (S) convexe.

Hadamard. — Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. (331-387).

« L'étude des équations différentielles, dit l'auteur, se poursuit actuellement dans deux directions différentes. On peut avoir en vue la nature analytique des fonctions cherchées et les considérer dans tout le champ des valeurs réelles ou complexes de la variable indépendante. Mais on peut aussi, en restant dans le domaine réel, suivre la voie tracée par les travaux de Sturm, et par ceux de MM. Poincaré et Picard, où l'on se propose simplement de discuter le sens dans lequel varient les inconnues, et où les relations d'inégalité jouent un rôle prépondérant.

» C'est à ce dernier point de vue que je me placerai exclusivement, pour étendre aux cas généraux certaines remarques simples qui s'offrent dans l'étude des problèmes les plus élémentaires de la Dynamique. »

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible. (389-403).

Dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1895), M. Duhem avait étudié la stabilité de l'équilibre d'un solide flottant à la surface de séparation de deux fluides compressibles, soumis à des forces extérieures quelconques dépendant d'une fonction potentielle.

Il avait obtenu d'une part des conditions *nécessaires*, d'autre part des conditions *suffisantes* pour la stabilité. Mais il n'avait donné les conditions à la fois *nécessaires et suffisantes* que dans le cas où les deux fluides confinent par une surface illimitée.

Les résultats du présent travail sont les suivants :

1° Si le solide flotte à la surface qui sépare un fluide compressible d'un espace vide, quelle que soit la force extérieure, dépendant d'une fonction potentielle, à laquelle le fluide est soumis, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du flotteur soit stable;

2° La méthode qui fournit ces résultats ne s'applique pas, en général, au cas où le solide flotte à la surface de séparation de deux fluides; toutefois, dans le cas particulier où les deux fluides sont homogènes et incompressibles, elle

s'applique et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du flotteur;

3° Cette méthode s'étend, dans le premier cas, à un flotteur portant un lest fluide compressible suivant une loi quelconque; dans le second cas, à un navire chargé d'un lest liquide incompressible.

Pirondini (*G.*). — Quelques propriétés des surfaces moulures. (405-422).

Les surfaces *moulures* dont s'occupe l'auteur sont les surfaces engendrées par une ligne plane A (*profil*) dont le plan roule, sans glisser, sur une surface développable quelconque Σ (*développable directrice*).

Voici la génération nouvelle qu'il donne de ces surfaces :

Soient C une ligne quelconque tracée sur un plan P; R une droite de P et A un point de R. On déplace le plan P de façon qu'il soit toujours le plan rectifiant d'une courbe arbitraire L, tandis que le point A décrit cette courbe et que la droite R lui demeure tangente. Si, pendant le mouvement du plan P, on fait glisser la courbe C sur ce plan, parallèlement à la droite R avec une vitesse égale à celle du point A, la courbe C engendre une surface moulure dont elle est le profil.

Après avoir discuté le problème (déterminé) qui consiste à faire passer par une courbe donnée une surface moulure ayant une développable directrice donnée, M. Pirondini examine le problème (généralement indéterminé) qui consiste à faire passer une moulure par une courbe donnée, connaissant les normales à la surface le long de cette courbe.

Il montre ensuite que :

Quelle que soit la ligne qu'on trace sur une surface moulure à développable directrice cylindrique (et à profil non circulaire), les rayons de courbure principaux de la surface vérifient, tout le long de cette ligne, une même relation finie.

Cette proposition remarquable donne lieu à diverses questions dont l'auteur fait connaître la solution.

Saltykow (*N.*). — Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues. (423-428).

Il s'agit du système suivant

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z_v}{\partial x_h} + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_v}{\partial x_k} - X^{hv} = 0 \\ (h = 1, 2, \ldots, m;\ v = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Si l'on connaît n intégrales distinctes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ du système

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{v=1}^{m} X^{hv} \frac{\partial f}{\partial z_v} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les équations obtenues en égalant ces n solutions à zéro fournissent une solution des équations (1).

Si le système (2) est jacobien, on obtient la solution la plus générale des équations (1) en égalant à zéro $n+p$ fonctions arbitraires distinctes de f_1, $f_2, \ldots, f_{p+n}$, ces $n+p$ fonctions formant un système d'intégrales distinctes des équations (2).

Saltykow (*N.*). — Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles. (429-433).

Les n fonctions qui définissent une transformation infinitésimale du système d'équations aux différentielles totales

$$dx_k - \sum_{h=1}^{m} X_k^h \, dx_h = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, m+n)$$

sont connues si l'on peut trouver n solutions distinctes du système qu'on obtient en adjoignant au proposé un système analogue, contenant n nouvelles inconnues, que l'auteur enseigne à former.

Tome IV; 1898.

Duhem (*P.*). — L'intégrale des forces vives en Thermodynamique. (5-19).

Dans ce travail, qui fait suite à son *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques*, 1892, 1893, 1894) et à sa *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres* (1896), M. Duhem étudie un système dont les diverses parties sont à des températures différentes.

Il prouve d'abord que le nombre des équations fournies par la Thermodynamique, pour déterminer le mouvement d'un système, est inférieur au nombre des variables à déterminer d'autant d'unités qu'il y a, dans le système, de parties susceptibles d'être portées à des températures différentes, d'où la nécessité de relations supplémentaires.

Il traite ensuite des systèmes qu'il nomme *systèmes classiques* (ce sont les systèmes, soumis à des actions extérieures dérivant d'un potentiel, qui admettent une intégrale des forces vives, quelle que soit la forme des relations supplémentaires), puis des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives en vertu des relations supplémentaires; de ce nombre sont ceux pour lesquels les relations supplémentaires entraînent l'adiabatisme de toute modification.

Jordan (*Camille*). — Sur les groupes d'ordre $p^m q^2$. (21-26).

M. Sylow a démontré qu'un groupe d'ordre p^m (p premier, $m > 1$) est nécessairement composé.

Cette proposition a été étendue par M. Frobenius aux groupes d'ordre $p^m q$ (q premier et différent de p).

M. Jordan montre qu'elle subsiste encore pour les groupes d'ordre $p^m q^2$.

Hadamard. — Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. (27-73).

Dans son précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1897), M. Hadamard avait appliqué des considérations élémentaires de maximum et de minimum à l'étude des géodésiques réelles des surfaces quelconques. Il considérait, en particulier, un cas où les résultats se simplifient : celui des surfaces *à courbure partout positive*.

Dans le travail actuel, il traite, en restant dans le domaine réel et faisant complètement abstraction de la nature analytique de la surface, le cas où *la courbure totale est partout négative*. Ce qui fait l'intérêt de ce cas particulier, c'est qu'on obtient des résultats beaucoup plus complets que dans le premier et qu'on peut discuter complètement la forme des géodésiques.

L'auteur emploie les mêmes principes que dans son précédent Mémoire et fait un usage constant des ressources que fournit l'*Analysis situs*.

« Si la méthode employée est simple, dit-il, par contre les résultats auxquels nous parviendrons sont compliqués ou, du moins, très différents de ceux que l'on est habitué à rencontrer. C'est cette complication même qui est instructive, en mettant en évidence ce qu'a d'exceptionnel la simplicité des discussions obtenues par l'intégration directe, dans les cas où elle est possible, et en montrant combien les discussions simples donnent une idée fausse de ce qui se passe dans le cas général. »

Laurent (H.). — Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions. (75-119).

« Dans le travail qui suit, dit l'auteur en commençant, je me propose de créer un algorithme pour exposer la théorie générale des substitutions; à la considération de la notion de produits et de puissances de substitutions, on peut joindre les notions de somme, de différence et en général de fonctions de substitutions. Les substitutions deviennent ainsi de véritables quantités imaginaires dans le sens le plus large du mot : elles jouent dans le calcul le même rôle exactement que les clefs; ce sont des *clefs*. Les clefs imaginaires reçoivent ainsi une interprétation concrète; elles auront désormais une signification précise.

» Le calcul des substitutions tel que je le présente n'est pas un pur objet de curiosité; on verra qu'il vient ajouter des ressources au calcul ordinaire et qu'il permet de découvrir de nouveaux groupes: entre autres résultats, il permet d'énoncer, sous une forme simple, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient échangeables.

» Dans ce qui suit, je laisse de côté tout ce qui concerne la théorie des invariants, mon seul but étant de montrer l'utilité de la nouvelle théorie. Ceux

qui voudront bien lire les pages qui suivent se convaincront que je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste; ainsi, pour ne parler que d'une application que j'ai laissée de côté, on pourrait faire une théorie des congruences de substitutions en ne considérant que les substitutions linéaires à coefficients entiers en négligeant tous les multiples d'un entier donné. Cette théorie des congruences de substitutions linéaires viendrait compléter la théorie des substitutions d'indices dans les substitutions de lettres. »

Duporcq (*Ernest*). — Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. (121-136).

Ce Mémoire contient la solution complète d'un problème dont on ne connaissait que deux solutions :

1° Si quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, tous les points de cette droite restent aussi sur des sphères dont les centres ont pour lieu une conique; deux points, réels ou imaginaires, de la droite décrivent des courbes planes (Mannheim);

2° Dans le mouvement à deux paramètres d'une droite dont trois points se déplacent sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les points de la droite décrivent des sphères ayant leurs centres en ligne droite; un point de la droite décrit un plan (Darboux).

M. Duporcq commence par prouver que :

Étant données cinq positions d'une même droite, il existe en général quatre points de cette droite dont les cinq positions sont sur une même sphère; par suite, si cinq points d'une droite décrivent des trajectoires sphériques, il en est de même de tous ses points.

Il montre ensuite que :

Si tous les points d'une droite se déplacent sur des sphères, le lieu des centres de ces sphères est une cubique gauche, une conique ou une droite.

Le cas de la cubique est le seul à étudier, les autres étant ceux qu'ont traités M. Mannheim et M. Darboux. L'auteur établit que :

Si tous les points d'une droite mobile se déplacent sur des sphères dont les centres appartiennent à une cubique gauche, ces points décrivent, en général, des biquadratiques sphériques.

Si tous les points d'une droite décrivent des biquadratiques sphériques, il existe sur cette droite une involution (m, m') telle que les trajectoires des points m et m' sont semblables.

Réciproquement, si quatre segments égaux joignent les sommets homologues de deux tétraèdres semblables, les droites qui portent ces segments sont quatre positions d'une droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques.

Ce théorème résout la question; il reste à étudier les particularités que peut présenter le déplacement de la droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques. Soit k le rapport de similitude des deux tétraèdres précédents. Si $k^2 \neq 1$, on est conduit au résultat suivant :

Soit (a) une cartésienne, située sur une sphère de centre ω et soit P le plan mené par ω normalement à la direction commune des axes de révolution des

quadriques qui passent par (a). Soient α la projection du point a sur le plan P, enfin b un point de ce plan tel que les segments αO et αb soient égaux et fassent entre eux un angle constant φ. Tous les points de la droite ab, dont la grandeur est invariable, décrivent des cartésiennes, quand le point a décrit (a).

Si le rapport $k = -1$, le déplacement de D est ainsi défini :

Soit dans un sphéroïde aa' une corde ayant pour longueur celle de l'axe de révolution et dont les deux extrémités se trouvent sur deux parallèles égaux : si le point a décrit sur l'ellipsoïde une trajectoire sphérique, il en est de même de tous les points de la droite aa'.

Quand le rapport $k = 1$, on peut amener le tétraèdre $(aa_1a_2a_3)$ en coïncidence avec le tétraèdre directement égal $(a'a'_1a'_2a'_3)$ par une rotation autour d'un certain axe $\omega\zeta$, suivie d'une translation parallèle à cet axe. Le lieu des points a, tels que la droite aa' ait une longueur donnée, est un cylindre de révolution autour de $\omega\zeta$. Si le point a décrit sur ce cylindre une courbe sphérique, il en sera de même de tous les points de la droite aa'.

Ce dernier déplacement, étudié par M. Bricard, est le déplacement le plus général d'une figure dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques, de sorte que les centres correspondant aux points d'une droite soient les points d'une cubique gauche.

Poincaré (*H.*). — Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. (137-230).

Introduction. — Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)\, v. \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) admettra un certain nombre de points singuliers qui seront les infinis de la fonction rationnelle φ; pour chacun de ces points singuliers on pourra former l'équation déterminante.

Pour que x puisse être une fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un nombre entier. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Nous dirons que deux équations de la forme (1) appartiennent au même *type* :

1° Si la relation (2) est la même pour ces deux équations;
2° Si les infinis de la fonction φ sont les mêmes;
3° Si, pour chacun de ces infinis, les équations déterminantes sont les mêmes.

La question suivante se pose alors :

Dans un type quelconque (pourvu que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un entier), y a-t-il toujours une équation

fuchsienne, c'est-à-dire telle que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales?

Cette question est d'une importance capitale dans la théorie des fonctions fuchsiennes; mais elle est extrêmement difficile; on voit assez aisément que, dans un type quelconque, il ne peut y avoir plus d'une équation fuchsienne; mais il est plus difficile d'établir qu'il y en a toujours une.

La première démonstration qui ait été donnée est fondée sur ce qu'on appelle la *méthode de continuité*. Nous y avons été conduits, M. Klein et moi, d'une façon indépendante. Dans mon Mémoire sur *les groupes des équations linéaires,* inséré dans le Tome III des *Acta mathematica,* j'ai insisté sur les ressemblances et les différences des résultats de M. Klein et des miens et j'ai donné en même temps un exposé complet de la méthode; je n'ai plus à y revenir. Je crois être arrivé à donner à cette méthode une forme parfaitement rigoureuse, mais elle n'en reste pas moins extrêmement compliquée et a un caractère indirect.

Peu de temps après, la Société royale des Sciences de Göttingen attira l'attention des géomètres sur une autre manière d'aborder la question, en proposant comme sujet de concours l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u.$$

L'intégration de cette équation conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe.

La question posée par la Société de Göttingen fut résolue par M. Picard dans un Mémoire inséré au *Journal de Jordan* (1890) et complété par une Note des *Comptes rendus* (t. CXVI).

La solution proposée par M. Picard consiste à intégrer d'abord l'équation dans un contour assez petit et à étendre ensuite le résultat à un contour quelconque par la méthode alternée de M. Schwarz.

On peut revenir sur la question et chercher à se passer de ce détour. C'est ce que je me propose de faire ici.

Je me bornerai, dans ce Mémoire, aux fonctions fuchsiennes des première, deuxième et sixième familles, c'est-à dire à celles qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Le polygone R_0 qui engendre la fonction fuchsienne est alors tout entier à l'intérieur de ce cercle; il a un certain nombre de sommets se répartissant en un certain nombre de cycles.

Mais parmi ces cycles nous distinguons :

1° Ceux de la première espèce où la somme des angles est égale à 2π;

2° Ceux de la seconde espèce où la somme des angles est égale à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier plus grand que 1;

3° Ceux de la troisième espèce dont tous les angles sont nuls.

Nous ferons une étude particulière des *fonctions fuschiennes de la première espèce,* où tous les cycles des sommets sont de la première espèce; nous étendrons ensuite nos résultats aux autres fonctions fuchsiennes.

Mathy. — De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène. (231-237).

L'auteur commence par exprimer, à l'aide des fonctions p et ζ, les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde homogène sur un point de sa surface; les formules obtenues permettent de retrouver celles qui conviennent aux deux ellipsoïdes de révolution.

L'ellipsoïde est ensuite considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène tournant uniformément autour d'un axe fixe et dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles, suivant la loi de la gravitation : on reconnaît que l'ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, dont les molécules s'attirent suivant cette loi, devient une figure d'équilibre relatif quand il tourne autour de son plus petit axe, avec une vitesse angulaire uniforme et unique dépendant de la forme de la surface.

Quant aux sphéroïdes de révolution, l'ellipsoïde aplati est une figure d'équilibre relatif dans les mêmes conditions; l'ellipsoïde allongé ne peut jamais être une figure d'équilibre relatif.

Liapounoff (*A.*). — Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. (241-311).

La question qui fait l'objet principal de ce Mémoire est la recherche de la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur soustrait à toute influence extérieure. Il faut démontrer l'existence de la fonction qui représente la densité de la couche en équilibre. Ceci exige la considération des valeurs, sur la surface du conducteur, de la dérivée normale de la fonction harmonique dont la recherche constitue le problème de Dirichlet. Or les méthodes connues pour résoudre ce problème ne prouvent pas l'existence des valeurs en question. C'est pourquoi M. Liapounoff reprend la question pour déduire la démonstration requise des principes des méthodes que la Science possède aujourd'hui pour traiter le problème de Dirichlet.

Il considère une surface *fermée* S à laquelle sont imposées les conditions suivantes :

1° En tout point de S il existe un plan tangent déterminé;

2° Il existe une longueur D telle que, un point quelconque p de S étant pris pour centre de la sphère de rayon D, une parallèle à la normale à S en p ne puisse rencontrer S, à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

3° $\mathfrak{I}$ étant l'angle aigu que fait la normale au point quelconque p de S avec la normale en un autre point p' de cette surface et r la distance pp', on peut assigner deux nombres positifs a et α indépendants du choix des points p et p' et tels qu'on ait

$$\mathfrak{I} < ar^{\alpha},$$

quelles que soient les positions de ces points;

4° La surface est telle que *le principe de Neumann* lui soit applicable (on sait que ce principe s'applique à toute surface convexe).

A l'aide de ces hypothèses, M. Liapounoff établit la possibilité du problème électrostatique et retrouve la méthode que M. Robin a proposée pour résoudre ce problème.

Ces résultats acquis, l'auteur en fait usage pour aborder le cas général du problème de Dirichlet et rechercher les conditions assurant l'existence, sur la

surface qui sert de frontière au domaine considéré, des valeurs limites des dérivées de la fonction harmonique cherchée. Il parvient à montrer qu'en ce qui concerne la dérivée normale la question se ramène à la question analogue pour le potentiel de la double couche dont la densité est égale à la valeur de la fonction harmonique sur la surface.

Picard (*Émile*). — Sur l'équation $\Delta u = e^u$. (313-316).

A l'occasion du Mémoire de M. Poincaré (*voir* ci-dessus), M. Picard indique les différents Mémoires ou Notes qu'il a consacrés à l'équation considérée, et il insiste sur le lemme suivant, qui peut être utile dans beaucoup d'autres questions :

Soit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y)$$

une équation où F désigne une fonction continue de u, x et y, pour toute valeur réelle de u, quand le point (x, y) est dans une certaine région (R) du plan, fonction qui, de plus, est supposée croître toujours avec u. On considère une aire limitée par deux courbes C et C′. Si u_1 et u_2 sont deux intégrales prenant les mêmes valeurs sur C et telles que $|u_1 - u_2|$ reste inférieur tout le long de C′ à un nombre positif M, on aura, en tout point A intérieur à l'aire limitée,

$$|u_1 - u_2| < Mq,$$

q étant inférieur à l'unité.

Fabry (*Eugène*). — Sur les points singuliers d'une série de Taylor. (317-358).

L'auteur étudie les points singuliers des séries entières par une méthode nouvelle qui repose sur les propositions suivantes :

Étant donnée une série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

on forme l'expression

$$\Delta_\nu^n = \lambda^\nu a_{n+\nu} - \frac{\nu}{1}\lambda^{\nu-1} a_{n+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\lambda^{\nu-2} a_{n+\nu-1} - \ldots + (-1)^\nu a_n,$$

où λ est une quantité donnée, réelle ou imaginaire. S'il existe une quantité positive θ telle que l'expression

$$(1) \qquad \sqrt[n]{\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\,|\Delta_\nu^n|\,\theta^\nu}$$

ait pour n infini, quel que soit ν, une limite supérieure finie $\frac{1}{A}$, il n'y a aucun point singulier z vérifiant l'inégalité

$$|z| - \theta|\lambda - z| < A.$$

Réciproquement, si $f(z)$ n'a aucun point singulier vérifiant l'inégalité pré-

cédente, où A et θ sont positifs, et si lorsque $\theta \leqq 1$ le point $z = \infty$ est un pôle ou un point ordinaire, la limite supérieure pour n infini de l'expression (1) est au plus égale à $\frac{1}{A}$.

Par l'application de ces principes, on pourra, quand on connaîtra l'ordre de grandeur des différences d'ordre infini, déterminer des régions qui ne contiendront aucun point singulier et l'on connaîtra les points singuliers situés sur la limite de ces régions, qui peuvent s'étendre au delà du cercle de convergence et, dans bien des cas, jusqu'à l'infini. On peut alors former des exemples assez généraux où, les coefficients a_n étant des fonctions continues convenablement choisies, il n'existera qu'un seul point singulier sur la circonférence du cercle de convergence.

Le Roux (*J.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (359-408).

Introduction. — La plupart des propriétés des équations linéaires du second ordre, à deux variables indépendantes, peuvent s'étendre sans difficulté aux équations d'ordre supérieur. Guidé par cette idée, j'avais déjà, dans ma Thèse, rédigé quelques-unes des démonstrations, de manière à les rendre immédiatement applicables aux équations d'un ordre quelconque.

Je reprends, dans ce travail, l'étude générale des équations linéaires à deux variables indépendantes. Laissant de côté le problème de l'intégration sous forme finie, qui concerne seulement des cas très intéressants sans doute, mais tout à fait exceptionnels, j'ai cherché surtout à déterminer les principales propriétés analytiques des intégrales. Tel est le théorème sur la nature des courbes singulières accidentelles. La démonstration que j'en avais donnée dans ma Thèse exigeait quelques restrictions dans la forme des singularités. Je donne ici une démonstration nouvelle pour laquelle je me suis servi d'une idée ingénieuse de M. Delassus : la notion du *domaine d'un arc de courbe* que j'ai étendue au cas des variables complexes. Pour la détermination des intégrales sur les caractéristiques, j'ai démontré un théorème général permettant d'étendre aux équations d'ordre supérieur au second la notion des *intégrales principales* dans le cas des caractéristiques simples et même des caractéristiques multiples lorsque certaines conditions se trouvent réalisées. On peut obtenir ainsi une représentation des intégrales qui met en évidence leurs propriétés analytiques les plus importantes.

Il existe des cas où l'équation admet des intégrales particulières de la forme que j'ai appelée *la forme d'Euler,* s'exprimant linéairement à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre déterminé. La méthode des intégrales principales, en mettant ce fait en évidence, permet en outre de reconnaître, par un nombre limité d'opérations, si ces intégrales particulières existent, et conduit directement à leur détermination effective.

On obtient des indications intéressantes sur la forme des singularités accidentelles lorsque la solution est donnée complètement par des intégrales principales; on reconnaît ainsi, par exemple, que, dans le voisinage d'une caractéristique singulière accidentelle, l'intégrale ne peut pas, en général, être uniforme.

Comme dans le cas des équations du second ordre à caractéristiques distinctes,

la connaissance d'une seule intégrale particulière dépendant d'un paramètre permettra d'obtenir, dans certains cas, soit l'intégrale générale de l'équation, soit une autre intégrale dépendant d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires.

Bricard (*Raoul*). — Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points dérivent des lignes sphériques. (409-448).

Le problème traité dans ce Mémoire est le suivant :

Quel est le mode de déplacement le plus général d'un plan, dans lequel tous les points de ce plan décrivent des lignes appartenant à des sphères dont les centres sont sur un plan fixe?

Ce problème admet deux solutions évidentes, mais sans intérêt : la première est fournie par la rotation d'un plan autour d'un point fixe, la seconde par la translation d'un plan dont tous les points restent sur des sphères égales. M. Bricard en signale une autre, beaucoup moins immédiate, puis aborde la question dans toute sa généralité.

Pour la résoudre, il admet que le déplacement cherché existe réellement et il détermine les conditions, de plus en plus restrictives, auxquelles doivent satisfaire les éléments du système constitué par le plan fixe et par le plan mobile, jusqu'à ce qu'il parvienne aux conditions nécessaires et suffisantes qui définissent toutes les solutions.

Ces solutions sont au nombre de deux. Elles sont absolument distinctes et irréductibles l'une à l'autre. C'est pourquoi il est fort remarquable qu'elles puissent être réalisées *en même temps* dans le déplacement d'un système que M. Bricard définit comme il suit :

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle fixe. Imaginons une droite L qui s'appuie sur Oz et sur une circonférence du plan xOy, tangente à Oy au point O; de plus, cette droite L fait un angle constant avec Oz.

Pour chaque position de L, construisons le trièdre $O'x'y'z'$, symétrique du trièdre fixe par rapport à cette droite. Tous les points du plan $x'O'y'$ restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan xOy. Tous les points du plan $x'O'z'$ restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan xOz.

Chacun des plans $x'O'y'$ et $x'O'z'$ passe par un point fixe; le premier enveloppe un cône de révolution. Les lignes sphériques décrites par les points du premier sont des biquadratiques qui se projettent sur zOy suivant des cercles. Celles des points de $x'O'z'$ sont des courbes de même nature qui se projettent sur xOz suivant des paraboles.

2me Partie

ACTA MATHEMATICA. Tome XXI; 1897 (1).

Kantor (*S.*). — Théorie des transformations de l'espace R_3 qui ne possèdent aucune courbe fondamentale de première espèce, et de leurs groupes finis. (1-78).

Lorsqu'on passe au cas de l'espace, l'étude des translations birationnelles périodiques et de leurs groupes finis présente tant de circonstances nouvelles qui n'apparaissent pas dans le cas du plan, qu'il convient de se borner tout d'abord en se contentant d'examiner certaines classes de transformations et de groupes. M. Kantor, se référant d'ailleurs à son Mémoire précédent inséré au Tome XVIII de l'*American Journal* (1896) et à son Ouvrage intitulé *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene* (Berlin, Mayer et Müller, 1895), considère celles qui peuvent se représenter à l'aide des substitutions cubiques du type

$$x_i x'_i = 1 \tag{1}$$

(analogues aux transformations birationnelles quadratiques du plan) et de leurs combinaisons : transformations qui satisfont précisément à la condition mentionnée dans le titre, de ne présenter aucune courbe fondamentale de première espèce.

I. *Théorie des systèmes fondamentaux.* — L'auteur étudie d'abord (n° 1) les transformations qui peuvent se composer à l'aide des transformations cubiques (1), puis (n° 2) celles qui sont définies par la condition de n'admettre aucune courbe fondamentale de première espèce. Il démontre, pour les unes et les autres, certaines propriétés importantes, telles que l'égalité des ordres, celle du nombre des points fondamentaux et celle du nombre des courbes fondamentales dans les deux espaces, etc. Puis il établit (n° 3) l'identité des deux catégories étudiées aux n°s 1 et 2 et étudie (n° 4) certains cas particuliers.

II. *Théorie des caractéristiques périodiques. Équivalence avec les types.* — Le problème de la composition conduit à celui de la périodicité. L'auteur recherche d'abord les conditions pour que la caractéristique (c'est-à-dire l'ensemble des éléments fondamentaux et de leurs transformés) soit périodique. Après avoir établi quelques propositions générales, il classe les transformations qui présentent cette propriété en quatre catégories, et donne même de cette réduction quatre démonstrations différentes.

Il étudie enfin les formes canoniques correspondant aux trois dernières catégories, la première se ramenant à de simples collinéations.

III. *Les transformations périodiques. Construction des types.* — Il recherche ensuite à quelles conditions non seulement la caractéristique, mais la trans-

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 186.

formation elle-même est périodique, et détermine également les différents types canoniques correspondants.

IV. *Théorie des groupes finis de caractéristiques.*

V. *Théorie des groupes finis de transformations sans courbes fondamentales de première espèce.*

Mittag-Leffler (*G.*). — Weierstrass (79-82).

Poincaré (*H.*). — Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps (83-97).

Soient x_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) les coordonnées des trois corps, y_i, les composantes correspondantes des quantités de mouvement. Les équations étant mises sous forme canonique par l'emploi de ces inconnues, effectuons sur celles-ci une transformation linéaire. Il est aisé de voir qu'on peut, et cela d'une infinité de manières, choisir cette transformation de telle sorte qu'elle ne change ni l'état canonique des équations, ni la forme de l'intégrale des aires.

La transformation classique qui introduit les coordonnées relatives de deux corps par rapport au troisième et les composantes des vitesses relatives, est bien linéaire, mais ne satisfait pas aux conditions dont nous venons de parler. Un autre changement de variables, étudié par M. Radau (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. XV), vérifie, au contraire, ces conditions, mais il complique un peu l'expression de la fonction perturbatrice. L'auteur propose une troisième transformation, qui fait intervenir, avec les coordonnées *relatives* de deux points, les composantes de leurs quantités de mouvement *absolues*, et qui, sans compliquer la fonction en question, présente les mêmes avantages que la transformation de M. Radau.

D'ailleurs, en première approximation, les trois méthodes se valent. Mais il n'en serait pas de même aux approximations suivantes.

Darwin (*G.-H.*). — Orbites périodiques (99-242).

L'auteur considère le problème restreint des trois corps (mouvement plan d'un corps de masse infinitésimale sous l'action de deux autres en rotation uniforme l'un par rapport à l'autre) et se propose d'obtenir des trajectoires périodiques par une méthode directe qui consiste à calculer diverses orbites, correspondant à une série de valeurs des données initiales, et à faire varier celles-ci de manière à arriver (par interpolation) à la périodicité.

Après avoir exposé (n° 1) le but de ses recherches, et formé (n° 2) les équations du mouvement, il commence par simplifier son travail en se renseignant *a priori* autant que possible sur l'allure des trajectoires. Il délimite tout d'abord (n° 3) à l'aide de l'intégrale de Jacobi, certaines régions où chacune de ces trajectoires doit rester pour que la vitesse soit réelle, et discute la forme de ces régions. Il considère ensuite la courbure des trajectoires, courbure dont la considération lui fournit d'abord (n° 4) un nouvelle division du plan correspondant aux valeurs que cette courbure peut prendre. C'est elle qui servira également (n° 6) à tracer les trajectoires par approximation, à l'aide d'un calcul de différences finies qui est exposé au n° 5, ainsi que les

difficultés spéciales que l'on rencontre au voisinage des points de rebroussement, ou même des points de *quasi-rebroussement* (points où la courbure est très grande).

Dans certains cas (n° 7) au lieu d'employer une méthode d'approximations successives, on procède par développement en série de Taylor.

Pour vérifier l'exactitude de la méthode, M. Darwin l'a appliquée à un mouvement képlérien et a constaté la parfaite concordance des résultats obtenus avec ceux que fournit le calcul élémentaire.

Il s'occupe, d'autre part, de discuter la stabilité des trajectoires périodiques. A cet effet, il faut former (n° 8) l'équation aux variations infinitésimales: équation où il convient de prendre pour variable indépendante l'arc d'orbite. Le développement de la variation en série trigonométrique dépend alors d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Le déterminant infini correspondant, multiplié par un facteur simple, fournit un criterium de stabilité, celle-ci ayant lieu si l'expression ainsi obtenue est réelle et comprise entre zéro et un. Par conséquent, sans compter les cas (que l'auteur n'a jamais rencontrés) où l'expression en question, qui contient un radical, serait imaginaire, il y aura deux sortes d'instabilité possibles: celle qui correspond aux cas où cette expression est négative (dite instabilité *paire*) et celle qui correspond aux cas où elle est plus grande que 1 (instabilité *impaire*).

Les deux sortes d'instabilité ne peuvent s'échanger que par l'intermédiaire d'orbites stables (sauf le cas ou deux orbites se fondent en une seule en devenant le prolongement l'une de l'autre). La quantité qui a servi à distinguer les trajectoires stables des instables permet également d'obtenir un *module* qui indique le degré d'instabilité. L'auteur expose le calcul numérique de cette quantité et les méthodes par lesquelles on peut simplifier les déterminants qui y interviennent.

La seconde Partie du Mémoire (166-196) et l'Appendice (197-242) sont consacrés au détail du calcul et des résultats. Le rapport des masses des deux planètes attirantes est pris égal à 10. Dans ces conditions, il résulte de la discussion présentée au n° 9 que si la constante C qui figure dans l'intégrale de Jacobi est supérieure à 40, 1821, le corps influencé, tout en pouvant être soit une planète supérieure, soit une planète inférieure, soit un satellite, ne peut passer de l'un de ces états à un autre. L'auteur considère, au contraire, une valeur de C inférieure à la limite précédente, de sorte que les passages dont il vient d'être question ne sont pas exclus. Pour limiter le travail déjà considérable, le cas des planètes supérieures n'a pas été abordé non plus que celui des orbites rétrogrades.

Les résultats obtenus présentent d'ailleurs des circonstances assez imprévues, en particulier des changements d'allure importants pour de petites variations des circonstances initiales. On peut avoir des orbites *oscillantes* c'est-à-dire qui se ferment, non autour des deux corps troublants S et J, mais autour d'un autre point, position d'équilibre instable, situé soit entre les deux, soit extérieurement. Quant aux autres orbites, qui tournent soit autour de S (planètes inférieures) soit autour de J (satellites), elles se subdivisent en plusieurs familles, dont les unes (planètes et satellites A) se présentent quelles que soient les valeurs de C dans l'intervalle considéré, tandis que les autres B et C apparaissent par couples (à la façon des racines réelles d'une équation algébrique) pour une certaine valeur de C, un peu supérieure à 39,3. Ces orbites fermées qui apparaissent ainsi simultanément sont d'ailleurs l'une stable, l'autre instable (tout en étant, bien entendu, près de la limite de stabilité).

M. Darwin a d'ailleurs obtenu des orbites de *passage*, c'est-à-dire qui sont à la limite de formes voisines : tel est, par exemple, le cas où deux ovales voisines viennent se toucher pour se fondre en une trajectoire unique en huit de chiffre (ou inversement); ou encore, celui où une orbite atteint la courbe de vitesse nulle et présente un point de rebroussement.

Borel (*E.*). — Sur les séries de Taylor. Lettre adressée à M. Mittag-Leffler (243-247).

Les résultats obtenus dans deux Mémoires précédents (*Journal de Math.*, 1896) par l'emploi des séries divergentes, relativement à la détermination des points singuliers d'une série de Taylor, peuvent s'exposer par une méthode élémentaire et directe. A toute série de Taylor

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

ayant pour rayon de convergence l'unité, on fera correspondre une fonction entière

$$F(z) = \sum a_n \frac{z^n}{n!}.$$

dite *fonction entière associée*, et liée à la première par la relation (valable pour toute valeur de z intérieure au cercle de convergence)

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da.$$

Le maximum du module de $F(z)$ sur un cercle de rayon r, ayant pour centre l'origine, augmente plus vite que $e^{(1-\alpha)r}$, où α est un nombre positif quelconque.

Si, dès lors, on considère un argument déterminé quelconque θ, deux cas pourront se présenter :

1° Ou bien on peut donner au nombre positif α une valeur assez petite pour que le produit $e^{-(1-\alpha)r}|F(re^{i\theta})|$ tende vers zéro avec $\frac{1}{r}$;

2° Ou bien une telle valeur de α n'existe point.

L'argument θ sera dit *ordinaire* dans le premier cas, *singulier* dans le second.

Or ces arguments ordinaires et singuliers correspondent précisément aux points ordinaires et singuliers de $f(z)$ situés sur le cercle de convergence.

En particulier, il résulte de là que *si les coefficients sont choisis au hasard, le cercle de convergence est une coupure*. Cela tient à ce que l'on peut diviser les termes de la série en groupes qui déterminent, indépendamment les unes des autres, le mode de croissance de F pour des valeurs convenablement choisies de r.

Autonne (*L.*). — Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (249-264).

Lorsqu'une fonction de $r+1$ variables $y, x_1, x_2, \ldots, x_r$ se présente en un

point sous la forme $\frac{0}{0}$, l'indétermination est, en général, réelle et ne peut être levée. M. Autonne se propose d'étudier les lois de ces indéterminations et, d'une manière plus précise, d'étudier les valeurs limites que prennent simultanément, en un point d'indétermination commun, plusieurs quotients de la forme

$$\frac{F_i}{F_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les F sont des fonctions régulières, nulles au point considéré.

Le nombre n de ces quotients est supposé supérieur à $r+1$. A cela près, il peut être quelconque et ne joue pas un rôle primordial dans la discussion. Celle-ci est liée au contraire, d'une manière essentielle, à l'entier $r+1$. M. Autonne considère successivement les problèmes qui correspondent aux diverses valeurs de ce nombre, en nommant problème [1] celui qui correspond à $r=0$; problème [2], celui qui correspond à $r=1$; etc.

La solution du problème [1] est élémentaire; celles des problèmes [2] et [3] ont été données précédemment par l'auteur (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 11 novembre, 9 et 30 décembre 1895; *Rendiconti Circ. Palermo*, 1896). Mais, lorsque r augmente, les méthodes qui ont servi à obtenir les solutions pour les petites valeurs de r ne peuvent plus se généraliser. C'est ainsi que les développements en série des solutions de l'équation $F_i = 0$ n'ont point leurs analogues (ou ne se généralisent qu'avec beaucoup de peine) pour $r > 1$.

Une autre manière de procéder est donc nécessaire. Elle consiste à réduire le problème $[r+1]$ au problème $[r]$. Un théorème bien connu de Weierstrass permet de ramener le cas général à celui où les F_j sont des polynomes en y; après quoi les propriétés des courbes unicursales conduisent à la solution.

A l'aide de la méthode ainsi exposée on peut faire la discussion *complète* (pour des singularités aussi compliquées qu'on le veut) des points fondamentaux et des courbes fondamentales d'une substitution Cremona (*voir* le Mémoire des *Rendiconti*).

Kluyver (*J.-C.*). — Un cas particulier du problème de Dirichlet à deux dimensions (265-286).

L'aire considérée est la portion T du plan extérieure à un système de cercles $K_j (j = 1, 2, \ldots, 2p)$ symétriques deux à deux par rapport à l'axe réel et dont deux quelconques sont sans point commun.

M. Schottky s'est précédemment occupé de la représentation conforme d'une telle région et a introduit, à cet effet, un groupe kleinéen (qui a pour substitions fondamentales des couples d'inversions par rapport aux cercles K) et la fonction kleinéenne correspondante. M. Kluyver applique cette fonction à la résolution du problème de Dirichlet relatif à l'aire en question sans passer par la représentation conforme.

x étant l'affixe d'un point quelconque, appelons x_α le transformé de x par l'une quelconque des substitutions kleinéennes mentionnées il y a un instant. On peut alors, des quatre quantités complexes x, y, ξ, η, déduire le produit convergent

$$\varphi(x) = (x, y; \xi, \eta) = \prod_\alpha \frac{x - \xi_\alpha}{x - \eta_\alpha} : \frac{y - \xi_\alpha}{y - \eta_\alpha}.$$

D'autres produits analogues, désignés par la notation $E_\alpha(x)$, et qui se déduisent de la considération des points doubles des substitutions fondamentales, sont intimement liés à φ, mais ne dépendent d'aucun paramètre autre que la variable x.

Il est aisé de voir que, sur les contours fondamentaux (cercles K et axe réel), certains de ces produits ont un module constant. Dans ces conditions, les valeurs de la partie réelle d'une fonction analytique V étant données soit sur les circonférences des cercles K, soit plutôt sur la moitié d'entre elles et l'axe réel, il suffit de multiplier ces valeurs par une combinaison linéaire convenable des logarithmes des fonctions précédentes et d'intégrer le long des différents contours pour calculer l'expression de V. Il est clair, d'ailleurs, que l'on peut ramener au cas ainsi traité celui du plan percé de trous circulaires (non sécants) quelconques, l'un de ces trous pouvant toujours être transformé par inversion en une fente rectiligne.

M. Kluyver montre, sur un exemple particulier (trois trous en triangle équilatéral) que l'on peut, sans trop de difficulté, pousser l'application de sa méthode jusqu'au calcul numérique.

Vahlen (*K.-Th.*). — Le théorème fondamental de l'Algèbre et la résolution des équations par radicaux carrés (287-300).

Soit l'équation $f(x) = 0$ du $n^{ième}$ degré, dont les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont supposées toutes distinctes. Partageons ces racines (prises dans un ordre déterminé quelconque) par groupes de deux (une racine restant inemployée si n est impair); et remplaçons les racines de chaque groupe par leur somme et leur produit. Nous avons ainsi $\left[\frac{n}{2}\right]$ couples de quantités

$$\begin{matrix} x_1 + x_2, & x_3 + x_4, & x_5 + x_6, & \ldots, \\ x_1 x_2 & x_3 x_4 & x_5 x_6, & \ldots. \end{matrix}$$

Partageons, à leur tour, ces couples par groupes de deux et formons la somme et le produit des quantités de chaque couple dans la ligne supérieure et des quantités de chaque couple dans la ligne inférieure. Ceci donne quatre séries de $\left[\frac{n}{4}\right]$ quantités. Répétons cette opération autant de fois que le degré de l'équation le permettra.

Ajoutons ensuite les quantités fournies par la dernière série d'opérations, en les multipliant par autant d'indéterminées $u_1, u_2, \ldots$. [Par exemple, pour $n < 8$, on devra s'arrêter à la seconde opération, qui donne les quantités

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \\ x_1 x_2 + x_3 x_4, \\ x_1 x_2 x_3 x_4. \end{gathered}$$

et former la combinaison

$$\begin{aligned} u = \quad & u_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ & + u_2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + u_3(x_1 x_2 + x_3 x_4) + u_4 x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}]$$

La combinaison linéaire u ainsi formée vérifiera une certaine équation $G(u) = 0$ de degré toujours impair.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée soit résoluble par extractions de racines carrées est que $G(u) = 0$ *ait une racine rationnelle.*

Par exemple, pour l'équation du quatrième degré, $G(u) = 0$ ne sera autre que la résolvante cubique, et celle-ci devra avoir une racine rationnelle pour que la proposée soit résoluble par radicaux carrés.

D'autre part, cette équation auxiliaire $G(u) = 0$ étant de degré impair, a toujours une racine réelle [si $f(x)$ est réel] et comme, de la connaissance de cette racine, on peut déduire la résolution de la proposée par extraction de racines carrées, on a aussi une démonstration du théorème de d'Alembert. Cette démonstration, toutefois, comme toutes celles qui reposent sur les fonctions symétriques, doit être exposée avec des précautions convenables si l'on veut éviter un cercle vicieux. Elle réunit les trois avantages suivants :

1° N'employer que des moyens arithmétiques ;
2° Fournir un calcul effectif des quantités dont elle démontre l'existence ;
3° Se rapporter à toutes les racines ensemble.

D'Ocagne (*M.*). — Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés (301-330).

Considérons trois courbes planes représentées paramétriquement, les paramètres (ou *cotes* correspondant aux différents points) étant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. En écrivant que trois points pris respectivement sur les trois courbes sont en ligne droite, on a, entre les trois cotes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, une relation manifestement représentable sous forme de déterminant.

Si les trois courbes se réduisent à des droites, les cotes étant distribuées de telle façon que la variation de chacune d'elles soit homographique à celle du point correspondant, on aura des systèmes *linéaires* de points cotés. L'équation est alors de la forme

$$(E) \quad A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + B_1\alpha_2\alpha_3 + B_2\alpha_3\alpha_1 + B_3\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D = 0,$$

laquelle représente une surface du troisième ordre passant par les droites du plan de l'infini situées dans les plans coordonnés et ayant, par suite, pour points doubles les sommets du triangle formé par ces trois droites.

Inversement, à quelles conditions une équation de la forme (E) est-elle représentable par trois systèmes linéaires de points cotés ?

La solution dépend essentiellement d'une quantité Δ, ou *discriminant* (laquelle, égalée à zéro, exprime que la surface du troisième ordre a un quatrième point double), et aussi de trois équations du second degré à une inconnue,

$$\varphi_1(\rho) = 0, \qquad \varphi_2(\rho) = 0, \qquad \varphi_3(\rho) = 0,$$

ayant toutes pour discriminant Δ.

Deux cas sont à examiner séparément : celui où les trois droites fixes (*supports*) des systèmes de points cotés forment un triangle et celui où elles con-

courent. Dans le premier cas, l'équation (E) doit pouvoir s'écrire

$$M(\alpha_1 + s_1)(\alpha_2 + s_2)(\alpha_3 + s_3) + P(\alpha_1 + t_1)(\alpha_2 + t_2)(\alpha_3 + t_3) = 0,$$

et l'on voit aisément que les constantes s_i, t_i sont racines de l'équation $\varphi_i(\rho) = 0$. Il faut donc, pour que l'identification puisse se faire sous forme réelle, que le discriminant de cette équation, c'est-à-dire le discriminant Δ, soit positif (la valeur zéro étant exclue).

Au contraire, les équations représentables par des systèmes de points cotés supposés concourants correspondent à $\Delta = 0$.

M. d'Ocagne cherche ensuite à quelles conditions on peut s'arranger pour que les trois systèmes de points cotés soient *réguliers*, c'est-à-dire pour que les valeurs infinies des paramètres correspondent aux points à l'infini des droites. Il consacre à cette question (dont la solution géométrique serait d'ailleurs évidente) les calculs de la deuxième Partie de son Mémoire (318-330).

Poincaré (*H.*). — Sur les rapports de l'Analyse pure et de la Physique mathématique. Conférence faite au Congrès international des Mathématiciens à Zurich en 1897 (331-342).

Table des matières des vingt premiers Tomes, suivie d'une Table générale par noms d'auteurs des Tomes XI-XX.

J. H.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, éditeur.

Tome XX; 1887.

Predella (*P.*). — [C2*g*]. Sur les formules attribuées à Gauss et à Stokes pour les transformations d'intégrales indiquées ci-après. (215-222).

La formule

$$\int\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma = \int (X\,dy + Y\,dx)$$

peut s'établir en considérant la variation de l'intégrale simple qui est dans le second membre. La même chose a lieu pour les autres formules connues qui donnent les transformations des intégrales multiples

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\sigma,$$

$$\int \sum\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \cos(nx)\, d\sigma.$$

Borletti (*F.*). — [I19*b*]. Sur le théorème de Fermat relatif à l'équation $x^n + y^n = z^n$. (222-224).

Nouveaux cas d'impossibilité.

Celoria (*G.*). — [U]. Observations et orbite de la comète 1886, III (225-238).

Martinetti (*V.*). — [M¹1*f*]. Sur les systèmes linéaires de courbes planes algébriques de genre 1. (264-269).

Tout système linéaire de courbes elliptiques peut se réduire par une transformation crémonienne à un système linéaire de cubiques ou à un système de quartiques ayant deux points de base doubles.

Jung (*G.*). — [M¹1*f*]. Sur les systèmes linéaires de courbes algébriques de genre quelconque. (275-290).

Exposition abrégée de quelques résultats obtenus par l'auteur dans son Mémoire inséré dans le Tome XV des *Annali di Matematica*, concernant les systèmes linéaires d'ordres minimum d'un genre donné et d'un *degré* donné (*degré* est ici le nombre des intersections variables de deux courbes du système).

Morera (*G.*). — [R5*aα*]. Sur les dérivées secondes de la fonction potentielle d'espace. (302-310).

Étant x, y, z les coordonnées du pôle P, a, b, c celles de l'élément $k\,dS$, et k_0 la densité en P, si la fonction

$$\frac{|k - k_0|}{r}$$

est intégrable sur tout rayon vecteur sortant de P, les dérivées secondes de la fonction potentielle existent et sont données par

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -k_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} d\sigma + \int_S (k - k_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} dS,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -k_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} d\sigma + \int_S (k - k_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial b^2} dS,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -k_0 \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} d\sigma + \int_S (k - k_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2} dS.$$

Brioschi (*F.*). — [A3*h*]. Sur la transformation des équations algébriques. (364-370).

La forme normale de l'équation du 5e degré est

$$z^5 - 10z^3 + 45z + C = 0,$$

et Gordan [*Ueber Gleich. fünft. Grades* (*Mathematische Annalen*, Bd. XXVIII, p. 152)] a démontré que pour ses racines on a les relations

$$(1)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{1}{z+\sqrt{3}} = 0, & \sum \dfrac{1}{z-\sqrt{3}} = 0, \\ \sum \dfrac{1}{(z+\sqrt{3})^2} = 0, & \sum \dfrac{1}{(z-\sqrt{3})^2} = 0; \end{cases}$$

et la réduction d'une équation générale du 5e degré à la forme normale revient à déterminer une fonction $z = g(x)$ de manière à satisfaire aux conditions (1). L'auteur traite la question en général pour une équation du degré n, en déterminant $\frac{n-1}{2}$ fonctions (n impair) telles que leur somme, la somme de leurs carrés et celle de leurs produits deux à deux, les sommes étant portées sur toutes les racines de l'équation donnée $f(x) = 0$, soient égales à zéro. Suit l'application à l'équation du 7e degré.

Jung (*G.*). — [P6*a*]. Sur les transformations planes multiples d'ordre minimum. (370-376).

Étant S_0 un système linéaire de genre p, à k intersections variables, et de dimensions $\infty^{c'_0}$, complètement déterminé par les points fondamentaux, on a

$$c'_0 = k + 1 - p.$$

En y posant $p = 0, 1, \ldots, k-1$, on trouve les dimensions des systèmes dont on doit prendre respectivement les réseaux pour les transformations k-uples des divers genres $p (< k)$. En supposant que S_0 soit de l'ordre minimum, les transformations obtenues le seront aussi, et l'on trouve de cette manière toutes les transformations d'ordre minimum.

Pincherle (*S.*). — [C2*k*]. Sur l'inversion des intégrales définies. (376-379).

Détermination de la fonction $\varphi(y)$ telle qu'on ait

$$\int_{(l)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

étant $f(x)$ une fonction donnée. Cette détermination dépend de celle d'une fonction $\mathbf{A}(y, z)$, que l'auteur appelle *réciproque* de $A(x, y)$ et qui est telle que, pour des valeurs convenables de x et z, il soit

$$\int_{(l)} A(x, y)\, \mathbf{A}(y, z)\, dy = \frac{1}{z - x}.$$

On trouve alors, par le théorème de Cauchy,

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} \mathbf{A}(y, z) f(z)\, dz.$$

Beltrami (*E.*). — [D6*f*]. Sur les fonctions sphériques d'une variable. (469-478).

Des relations

$$\frac{d\mathrm{R}_{n-1}}{dx} = x\frac{d\mathrm{R}_n}{dx} + (n+1)\mathrm{R}_n,$$

$$\frac{d\mathrm{R}_{n-1}}{dx} = x\frac{d\mathrm{R}_n}{dx} - n\mathrm{R}_n$$

on peut déduire toutes les relations récurrentes qui ont lieu entre plusieurs fonctions sphériques de même espèce et d'ordre différent. Elles peuvent servir à déterminer complètement tout le système des fonctions sphériques, et l'on peut aussi en déduire leur expression analytique.

Morera (*G.*). — [R5*aα*]. Sur les dérivées normales de la fonction potentielle de surface. (543-548).

Conditions générales d'existence de ces dérivées.

Beltrami (*E.*). — [R5*aα*]. Sur les fonctions complexes. (624-635).

Étant a, b les coordonnées d'un point (variable) d'une région σ du plan, et x, y celles d'un point arbitrairement donné dans ce même plan, h une fonction réelle ou complexe de a, b (densité), et en posant

$$a + bi = c,$$
$$x + iy = z,$$

l'auteur envisage la fonction

$$\Pi(x, y) = \int_{\sigma} \frac{h\, dz}{c - z},$$

comme étant l'analogue de la fonction potentielle à trois coordonnées. Elle se rapproche, par certaines propriétés, des fonctions potentielles d'espace, par d'autres à celles de surface. L'équation différentielle qui remplace ici celle de Laplace et Poisson est

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + i\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = -2\pi h.$$

Somigliana (*C.*). — [R5*aα*, ref. D1*bα*]. Sur les fonctions potentielles logarithmiques et sur la série de Fourier. (635-642).

Détermination de la densité δ d'une distribution de masse sur une circonfé-

rence, étant données les valeurs que prend la fonction potentielle logarithmique aux points de la circonférence.

L'auteur trouve la formule

$$\delta(\theta') = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\pi}^{\pi} V''(\theta)\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta'}{2}\right)d\theta - \frac{1}{4\pi^2 R\log R}\int_{-\pi}^{\pi} V(\theta)\,d\theta,$$

qui est la réciproque de

$$V(\theta') = -R\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta'}{2}\right)d\theta - R\log R\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\theta)\,d\theta.$$

De là, il déduit une représentation de la fonction périodique $\delta(\theta')$ par intégrales définies, et démontre l'équivalence de cette représentation avec celle qu'on peut donner par la série de Fourier.

Bertini (*E.*). — [P1, ref. Q2]. Construction des homographies d'un espace linéaire quelconque. (650-666).

Généralisation des constructions de Staudt (*Beiträge,* n° 36), et démonstration du théorème suivant, dû à M. Segre :

Dans une homographie quelconque (*non dégénérée*) *d'un espace* S *en soi-même, les espaces fondamentaux de points* $S_{h'-1}$, $S_{h''-1}$, ..., $S_{h^{(\delta)}-1}$ *sont indépendants.*

Brambilla (*A.*). — [P1*c*, ref. M³6*a*]. Les homographies qui changent en elle-même une courbe gauche rationnelle du 4ᵉ ordre. (780-797).

L'auteur emploie la représentation paramétrique que M. Bertini (ces *Rendiconti,* 1872) a donnée pour la quartique rationnelle (exception faite pour celle qui a un point de rebroussement)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2(\omega^2 - E^2) : \omega^2 - 1 : \omega.$$

Il y a trois involutions axiales qui la changent en elle-même, et en général, il n'y a pas d'autres homographies ayant la même propriété. Il y en a d'autres pour la quartique à deux tangentes stationnaires, et elles ont été étudiées par M. Del Re (*Atti di Torino,* t. XXII, 1887). Celle qui a un point double à tangentes distinctes est transformée en elle-même par quatre homographies, c'est-à-dire par deux homographies harmoniques et deux cycliques du 4ᵉ ordre. La quartique équianharmonique a quatre homographies cycliques du 3ᵉ ordre (et par conséquent axiales) et leurs inverses, qui ont la même propriété. Enfin l'auteur traite le cas de la quartique à rebroussement en employant la représentation de Weyr [*Ueber Raumcurven 4ter Ordnung,* etc. (*Sitzungsb. d. k. Akad.,* Wien, 1875, et *Mathematische Annalen,* Bd. IV)]

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1.$$

Tome XXI, 1888.

Tondini de Quarenghi (*Le Père C.*). — [U]. Sur les avantages et la possibilité de l'adoption générale du calendrier grégorien. (95-104).

Bardelli (*G.*). — [R4*a*]. Propriétés stéréométriques d'un système de forces. (167-171).

Aschieri (*F.*). — [P6, ref. N¹1]. Sur la relation entre la théorie des complexes de droites et celle des correspondances univoques et multiples de l'espace. (216-226, 285-293, 446-449).

Ascoli (*G.*). — [D1]. Résumé de mon Mémoire : « Les courbes limites d'une variété donnée de courbes » et observations critiques sur le même Mémoire. Note I (226-239), II (257-265), III (294-300), IV (365-371).

Le Mémoire est inséré aux *Mémoires des Lincei*, t. XVIII, 3e série.

Celoria (*G.*). — [U]. Nouvelles orbites des étoiles doubles OΣ 298 dans la constellation de Boote et β du Dauphin. (247-256).

Schiaparelli (*V.*). — [U]. Observations faites à l'Observatoire royal de Bréra pendant l'éclipse totale de Lune du 28 janvier 1888. (278-285).

Bertini (*E.*). — [P4, ref. M¹4, 1*b*]. Sur quelques théorèmes fondamentaux des courbes planes algébriques. (326-333, 413-424).

L'auteur établit d'une manière rigoureuse le théorème de Noether, d'après lequel une courbe douée de singularités quelconques peut se réduire par une transformation crémonienne à une courbe n'ayant que des singularités ordinaires. Les considérations de l'auteur sur ce point sont principalement dirigées à démontrer que la succession des transformations quadratiques que l'on doit faire sur la courbe donnée est finie. Cela lui permet de démontrer rigoureusement les formules et les propriétés relatives au genre, et les formules de Plücker.

Brambilla (*A.*). — [P5*a*]. Sur une classe de surfaces algébriques

représentables point par point sur le plan. Note I (334-356), II (511-519).

Généralisation de la surface de Steiner, obtenue en partant de la correspondance

$$x_i = x_i'^n \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

entre les points de deux espaces.

Somigliana (*C.*). — [D3*c*]. Sur certaines représentations des fonctions par des intégrales indéfinies. (431-446).

Au lieu de la formule de Cauchy

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z - z'} - 2\pi i\, w(z') = 0,$$

qui n'a de signification que pour les points z' intérieurs à s, l'auteur donne l'autre

$$\int_{(s, z_0)} \frac{d^n w}{dz^n}(z - z')^p \log(z - z')\,dz + 2\pi i \int_{z_0}^{z'} \frac{d^n w}{dz^n}(z - z')^p\,dz = 0,$$

où, pour éviter l'ambiguïté provenant du facteur $\log(z - z')$, on a mis la notation (s, z_0), qui indique que l'intégration est faite en partant du point z_0 avec la moindre valeur positive de l'angle ω_0. Cette formule et l'autre qu'on en déduit pour $n = 1$, $p = 0$, restent applicables aussi aux points du contour; et, en séparant les parties réelle et imaginaire, l'auteur en déduit des expressions par intégrales définies pour les fonctions d'une variable réelle. En supposant le champ circulaire, il retrouve la représentation des fonctions périodiques qu'il avait donnée dans le Tome XX de ces *Rendiconti* (p. 635).

Jung (*G.*). — [M¹1*f*]. Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de genre quelconque. (488-495).

Exposé sans démonstration des résultats obtenus par l'auteur en résolvant le problème de déterminer tous les systèmes d'ordre minimum, les points de base pouvant être infiniment rapprochés et avoir des singularités quelconques.

Segre (*C.*). — [M¹4, ref. Q2]. Sur les courbes normales de genre p des divers espaces. Extrait d'une lettre à M. le professeur E. Bertini. (522-528).

Démonstration synthétique du théorème de Clifford :

Une courbe de genre p et d'ordre $n > 2p - 2$ ne peut appartenir à un espace de plus de $n - p$ dimensions.

Novarese (*E.*). — [R4*a*]. Propriétés stéréotomiques des systèmes de forces. Lettre à M. le professeur G. Bardelli. (575-579).

Montesano (*D.*). — [P4*g*]. Sur les transformations involutives monoïdales. (579-594, 684-690).

Ce sont les transformations dans lesquelles aux plans correspondent des monoïdes d'ordre n. Il y en a quatre espèces, qui se distinguent entre elles par la manière dont est constituée la congruence des droites qui correspondent aux droites passant par le point $(n-1)$-uple commun aux monoïdes.

Platner (*C.*). — [I10]. Sur le nombre de manières dont on peut obtenir une somme n ou une somme non supérieure à n (n entier positif) en prenant r termes de la série indéfinie 1.2.3.4.5.... (690-695, 702-708).

Jung (*G.*). — [$M_1$1*f*]. Sur l'*excès* des éléments fondamentaux d'un système linéaire de genre quelconque. (718-723).

L'*excès* est la différence entre le nombre de points de base et celui des courbes fondamentales. Dans un système de dimension >1, l'excès ne change pas par une transformation birationnelle quelconque, même lorsque les points de base se trouvent en des positions spéciales.

Jung (*G.*). — [$M_1$1*d*]. Sur le nombre des courbes dégénérées renfermées dans un faisceau de genre quelconque. (723-725).

S. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

TOME XXVII; 1903. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica. T. XXI, 1897. — 181-188.
Annales de la Faculté des Sciences de Marseille. T. VI-XIV, 1895-1902. — 30-38.
Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3e série, T. XVIII, 1901. — 5-17; T. XIX, 1902. — 122-135.
Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXX, 1902. — 150-161.
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences. T. CXXXIV-CXXXV, 1902. — 42-56.
Journal de Mathématiques pures et appliquées. 5e série, T. I-II, 1895-1896. — 135-150; T. III-IV, 1897-1898. — 162-180.
Mathematische Annalen. T. XL-XLIII, 1891-1893. — 56-94.
Nouvelles Annales de Mathématiques. 4e série, T. I, 1901. — 39-42.
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 2e série, T. XVII-XIX, 1884-1886. — 17-29; T. XX-XXI, 1887-1888. — 188-195.
Sitzungsberichte der k. Preussischen Akademie. 1899-1902. — 94-122.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Adhémar (R. d'). 44, 55.
Alezais (R.). 128.
Andoyer (H.). 134, 137.
André (D.). 141.
Anissimoff (W.). 13, 60, 123.
Appell (P.). 49, 142, 162.
Arsonval (d'). 53.
Aschieri (F.). 21, 25, 26, 27, 29, 193.
Ascoli (G.). 19, 20, 23, 25, 26, 27, 193.
Auric (A.). 54, 158.
Autonne (L.). 45, 49, 53, 155, 184.
Bachelier (L.). 8.
Bäcklund (A.). 62.
Baker (G.). 87, 93.
Bardelli (J.). 18, 25, 193.
Barisien (E.). 41.
Baur (L.). 76, 92.
Beaulard (E.). 52.
Beltrami (E.), 19, 26, 27, 191.
Bertini (E.). 19, 26, 29, 192, 193.
Bianchi (L.). 63, 79, 88, 128.
Bôcher (M.). 94.
Bochert (A.). 61, 62.
Bolza (O.). 82, 86.
Borel (E.). 8, 48, 49, 145, 149, 184.
Borletti (F.). 189.
Botzmann (L.). 83.
Boussinesq (J.). 50, 51, 52.
Boutroux (P.). 43, 44.
Brambilla (A.). 21, 27, 192, 193.
Bricard (R.). 39, 166, 180.
Brioschi (F.). 18, 189.
Burkhardt (H.). 72, 81, 89.
Busche (E.). 77.
Bussy (de). 46.
Cahen (E.). 161.
Cartan (E.). 10, 48, 49, 53.
Casorati (F.). 21.
Celoria (G.). 21, 22, 24, 189, 193.
Césaro (E.). 39.
Charves (L.). 36.
Chessin (A.). 52.
Clairin (J.). 47, 135, 152, 154.
Coculesco (N.). 142.
Collignon (E.). 41.
Combebiac. 55, 150, 155, 161.
Considère, 50, 51.
Cotton (E.). 42.
Cousin (P.). 122.
Dantscher (V.). 80.
Darwin (G.). 182.
Delassus. 125, 152.
Delaunay (N.). 155.
Dellac (H.). 31, 34.
Demoulin (A.). 46.
Desaint (L.). 47.
Deslandres (H.). 43.
Doehlemann (K.). 76.
Dobriner (H.). 82, 83.
Duhem (P.). 42, 43, 44, 46, 47, 48, 53, 54, 55, 137, 143, 166, 170, 172.
Duporcq (E.). 40, 142, 174.
Duport (H.). 162.
Elie (B.). 49.
Esclangon (E.). 54.
Estanave (E.). 159.
Fabry (E). 40, 47, 157, 178.
Fabry (L.). 32.
Fejer (L.). 45.
Ferrini (R.). 24, 29.
Fontené (G.). 39, 40.
Formenti (C.). 17, 21, 28.
Fouché (M.). 48.
Franklin (F.). 72.
Fredholm (I.). 43, 49.
Freycinet (de). 45.
Fricke (R.) 64, 75, 86.
Frobenius (G.). 102, 103, 109, 114, 115, 117, 118, 120.
Fuchs (L.). 101, 104, 111, 118
Gall (V.). 93.
Gallian. 39.

Godefroy (M.). 34.
Gordan (P.). 65, 80, 90, 108, 166.
Goursat (E.). 44, 46, 150, 166.
Graf (I.). 88.
Gravé (D.). 48, 148.
Gros (A.). 47.
Guichard (C.). 146.
Guldberg (A.). 43.
Günther (P.). 163.
Guyou (E.). 143.
Hadamard (J.). 11, 55, 152, 155, 158, 161, 170, 173.
Hamburger (M.). 77, 99.
Hamy (M.). 149.
Hancock (H.). 17.
Hastings-Moore (E.). 91.
Haton de la Goupillière. 52.
Hayashi (T.). 39.
Helmert (G.). 110, 114, 116, 119, 121.
Hermite (C.). 77.
Hilbert (D.). 83, 90.
Hölder (O.). 57, 92.
Holmgren (E.). 45.
Horn (J.). 66, 82.
Hoyer (P.). 80.
Humbert (G.). 46, 47, 139, 147, 151.
Hürwitz (A.). 74, 90, 130.
Iaggi (E.). 39, 40, 41, 42.
Issaly. 39, 42.
Jamet (V.). 30, 31, 33, 34, 55.
Jordan (C.). 47, 136, 150, 172.
Jouguet (E.). 48, 53.
Jung (J.). 22, 24, 26, 29.
Jung (G.). 189, 190, 194, 195.
Junker (F.). 90.
Kantor (S.). 181.
Killing (W.). 93.
Klein (F.). 58, 59, 78, 88.
Kluyver (J.). 45, 185.
Kneser (A.). 73, 84.
Kober (G.). 60.
Kœnigs (G.). 51, 143.
Kœnigsberger (L.). 71, 85, 103, 104, 111, 113, 116.
Korn (A.). 49, 50.
Korteweg (D.). 71.
Kötter (F.). 105.
Krause (M.). 55, 106.
Krazer (A.). 92.
Lacour (E.). 42.
Landsberg (G.). 108.
Laurent. 40, 173.
Lebesgue (H.). 44.
Lecornu (L.). 48, 49, 153, 158.
Legrand (E.). 41.
Leiss (C.). 101.
Lemeray (E.). 40, 42.
Lemoine (E.). 41.
Lerch (M.). 56.
Le Roux. 179.
Le Vavasseur. 54, 130.
Lévy (B.). 43, 45.
Lévy (M.). 150.
Liapounoff. 165, 177.
Lilienthal (R. v.). 85, 86.
Liouville (R.). 51, 53, 54.
Lindeberg (J.-W.). 7.
Lindelöf (E.). 50, 56.
Lipschitz (R.). 94.
Loria (G.). 25.
Lüroth (J.). 85.
Macé de Lépinay (J.). 31.
Maggi (J.). 20, 27, 29.
Maillet (E.). 43, 44, 46, 47, 51, 54, 135, 149, 156, 158, 168.
Mangeot (S.). 5.
Mannheim (A.). 144, 166.
Mayor (R.). 56.
Markoff (A.). 63.
Martinetti (V.). 22, 89.
Mathy. 148, 176.
Maurer (L.). 73.
Meyer (F.). 91.
Michel (C.). 7.
Mie (G.). 93.
Mittag-Leffler (G.). 54, 182.
Molien (T.). 68, 83.
Monnet. 39.
Montesano (D.). 195.
Montessus (de). 49, 151.
Morera (G.). 26, 27, 27, 28, 189, 191.
Muth (P.). 57, 82.
Netto (E.). 80, 85.
Nielsen (N.). 6, 43, 133.
Noether (M.). 60.
Novarese (E.). 194.
Obriot. 48.
Ocagne (M. d'). 41, 52, 153, 187.
Padé (H.). 126.
Paci (P.). 25.
Painlevé (P.). 43, 44, 46, 49, 50, 51, 53, 54.
Pasch (M.). 60.
Pellet (A.). 158.
Pennacchietti (G.). 18, 22.
Pépin (le P.). 141.
Petot (A.). 46.
Picard (E.). 5, 14, 42, 45, 50, 123, 124, 178.
Piccioli (H.). 41.
Pick (G.). 85.
Pincherle (S.). 29, 190.
Pirondini (G.). 171.
Planck (M.). 102, 115.

Platner (C.). 195.
Pochhammer (L.). 69.
Poincaré (H.). 139, 144, 152, 167, 175, 182, 188.
Pompeiu (D.). 47.
Predello (P.). 188.
Pringsheim (A.). 81.
Rabut. 46.
Raffy (L.). 12, 154, 160.
Rausenberger (M.). 94.
Réthy (M.). 83.
Reye (T.). 88.
Ringelmann. 48.
Riquier (C.). 16, 33.
Ritter (E.). 67.
Rouquet (V.) 35.
Saint-Germain (de). 40.
Saltykow (N.). 171, 172.
Sauvage (L.). 30, 34, 37.
Scheffers (G.). 78.
Schiaparelli (G.). 20, 21, 193.
Schlesinger (L.). 52, 119.
Schönfliess (A.). 63, 83, 87.
Schur (F.). 76, 119, 122.
Segre (C.). 64, 194.
Séguier (de). 45, 52, 161.
Servant. 48, 52, 151, 154.
Simon (M.). 85.
Somigliana (C.). 191, 194.
Stahl (W.). 56.
Stäckel (P.). 77, 86, 89.
Staude (O.). 70.
Stekloff (W.). 51, 53, 54, 55, 82, 127.
Stephan (E.). 32.
Stolz (O.). 93.
Story (W.). 75.
Stouff. 125.
Struve (L.). 19.
Study (E.). 66.
Suchar (P.). 52.
Tannenberg (W. de). 44, 47.
Tondini de Quarenghi. 193.
Tzitzéica. 46, 51.
Vahlen (K.). 186.
Vallier (E.). 50, 53, 54.
Vogt. 40, 41.
Vohlen (J.). 94.
Voigt (W.). 117.
Wallenberg (G.). 45.
Weber (H.). 87, 89, 92.
Weltermann (W.). 163.
Weltzien (C.). 87.
Wirtinger (W.). 62.
Wölffing (E.). 87.
Yung (G.). 189, 190.
Zaremba (S.). 169.
Zeuthen (H.). 58, 76.
Zoukis (A.). 158.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVII.

32844 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 38
Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY